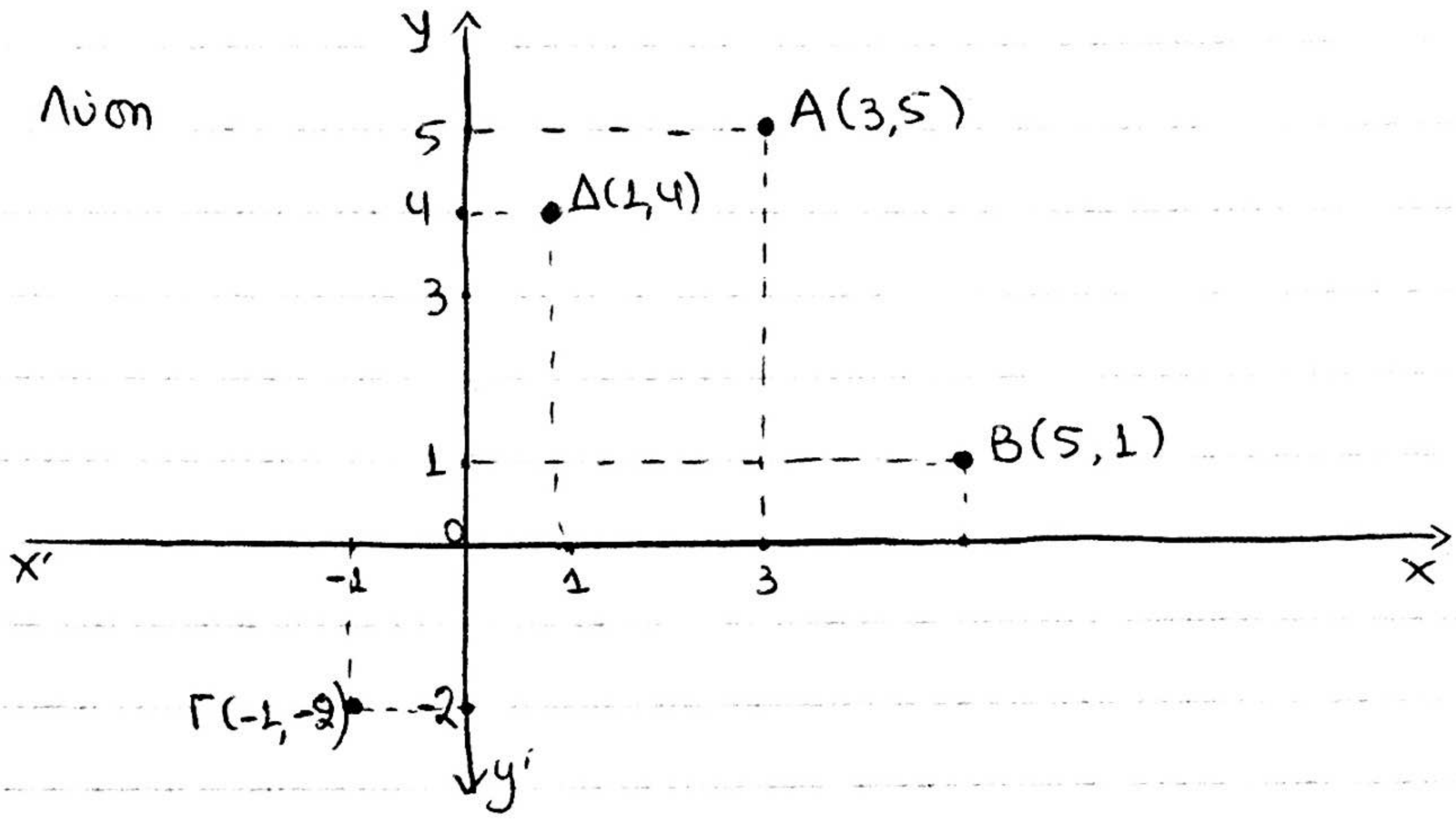
①

Άσκηση 1: Τοποθετήστε τα παρακάτω ζεύγη σημείων σε σύστημα συντεταγμένων και βρείτε τη μεταξύ τους απόσταση:

1. $A(3,5)$ και $B(5,1)$
2. $\Gamma(-1,-2)$ και $\Delta(1,4)$

Λύση




Ο τύπος για τον υπολογισμό της απόστασης δυο σημείων $A(x_2,y_2)$ και $B(x_1,y_1)$, είναι: $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

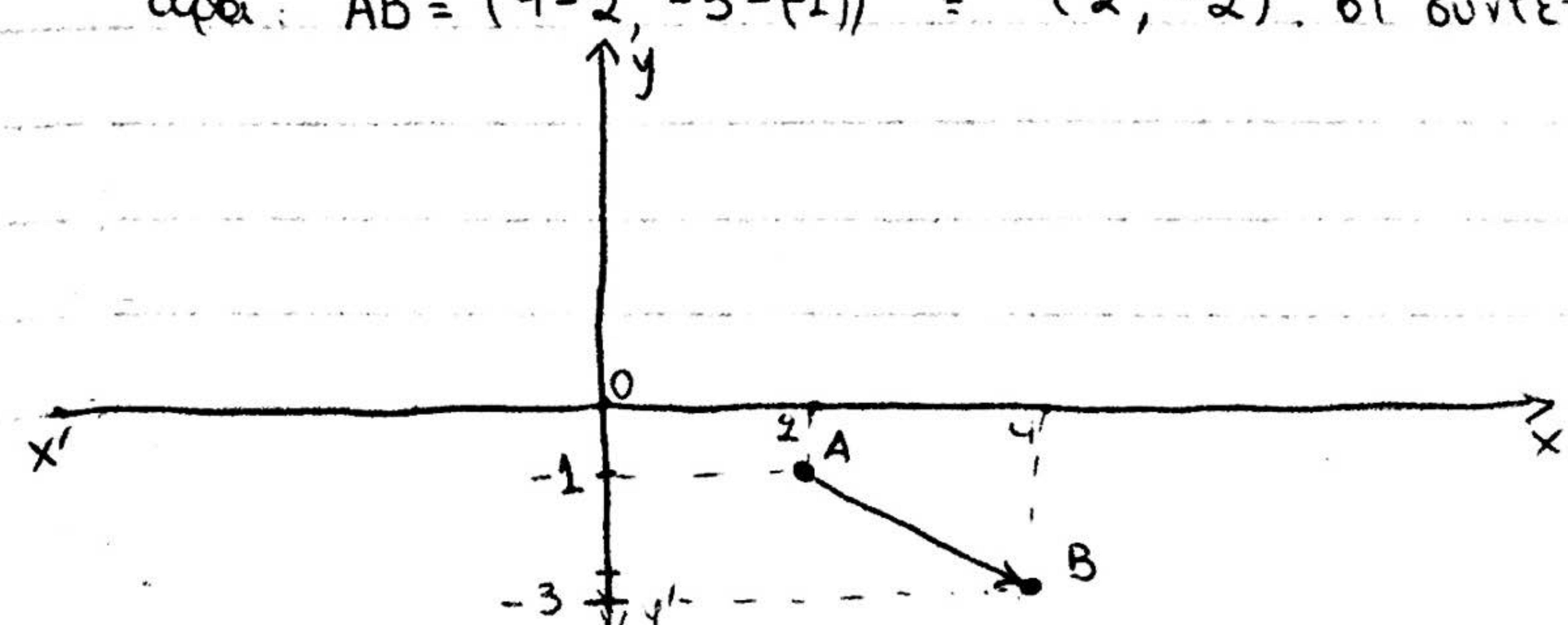
άρα $(AB)=\sqrt{(3-5)^2+(5-1)^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.

και $(\Gamma\Delta)=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-4)^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$.

Άσκηση 2: Τα σημεία $A(2,-1)$ και $B(4,-3)$ είναι το αρχικό και το τελικό σημείο αντίστοιχα, ενός διανύσματος. Να βρείτε το διάνυσμα στην αλγεβρική του μορφή και να το αναπαραστήσετε γραφικά.

Λύση: Ένα διάνυσμα $\vec{u}$ με αρχή το $A(x_1,y_1)$ και πέρας το $B(x_2,y_2)$ έχει συντεταγμένες $\vec{u}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$

άρα: $\vec{AB}=(4-2,\ -3-(-1)) = (2,-2)$. οι συντεταγμένες $\vec{AB}$.



Ασκηση 3: Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u}=(-2,-7)$ με αρχικό σημείο το $\Gamma(3,6)$. Να βρείτε το τελικό του σημείο.

Λύση: Έστω $\Delta(x,y)$ το τελικό σημείο του διανύσματος.
Για το διάνυσμα $\vec{u}$, με αρχή το $\Gamma(3,6)$ και πέρας το $\Delta(x,y)$ ισχύει:

$$\vec{u}=(x-3,\ y-6) \Leftrightarrow$$

$$(-2,-7)=(x-3,\ y-6)$$

. Εξισώνω τετμημένη με τετμημένη και τεταγμένη με τεταγμένη:

Έχω: $-2=x-3 \Rightarrow x=1$ (1)

και $-7=y-6 \Rightarrow y=-1$ (2)

άρα από (1) και (2): $\Delta(1,-1)$, το τελικό σημείο.

Ασκηση 4: Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u}=(5,-8)$ με τελικό σημείο το $K(0,1)$. Να βρείτε το αρχικό του σημείο.

Λύση: Έστω $M(x,y)$ το αρχικό σημείο του διανύσματος.
Για το διάνυσμα $\vec{u}$, με αρχή το $M(x,y)$ και πέρας το $K(0,1)$ ισχύει:

$$\vec{u}=(0-x,\ 1-y) \Leftrightarrow$$

$$(5,-8)=(-x,\ 1-y)$$

. Εξισώνω τετμημένη με τετμημένη και τεταγμένη με τεταγμένη:

Έχω $5=-x \Rightarrow x=-5$ (1)

και $-8=1-y \Rightarrow y=9$ (2)

άρα από (1) και (2): $M(-5,9)$ το αρχικό σημείο.

Ασκηση 5: Να βρεθεί το μέτρο και ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $u=(2,-4)+2\cdot(-2,3)$.

Λύση: Αρχικά βρίσκω τις συντεταγμένες του διανύσματος.
Προσθέτω τετμημένη με τετμημένη και τεταγμένη με τεταγμένη:
και έχω: $u=(2+2\cdot(-2),\ -4+2\cdot 3)$, άρα $\vec{u}=(-2,2)$

Το μέτρο του είναι: $|\vec{u}|=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

$$|\vec{u}|=\sqrt{8}.$$

②

Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}(-2,2)$ είναι:

$$\lambda_{\vec{u}} = \frac{2}{(-2)} = -1$$

<u>Άσκηση 6:</u> Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$,

β) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$,

γ) είναι παράλληλη προς την ευθεία $x+2y+1=0$,

δ) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x-y+5=0$.

<u>Λύση:</u> Η γενική εξίσωση της ευθείας είναι: $y-y_0=\lambda\cdot(x-x_0)_{(1)}$, όπου $\lambda$ ο συντελεστής διεύθυνσης και $(x_0,y_0)$ ένα σημείο που την επαληθεύει.

Το $A(1,2)$ ανήκει στην ευθεία, άρα το αντικαθιστώ στην (1)

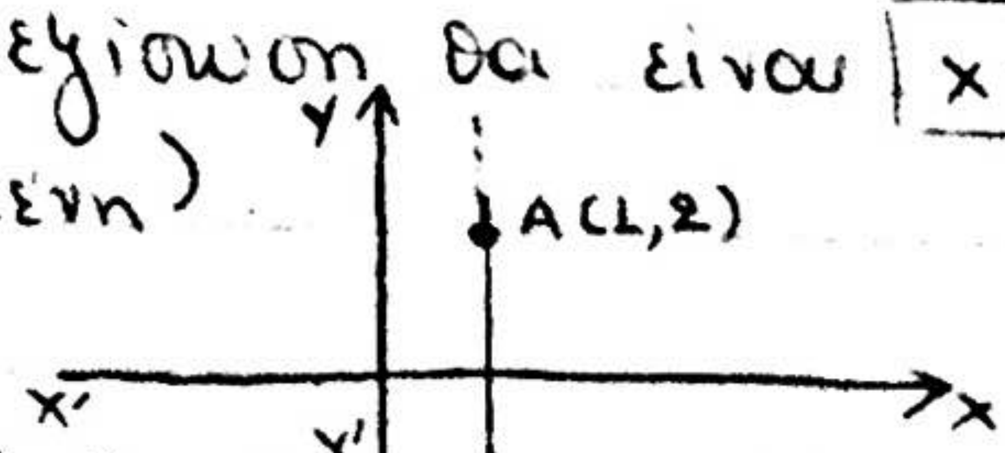
$$\varepsilon_1: \boxed{y-2=\lambda\cdot(x-1)} \quad (2)$$ η γενική μορφή των ευθειών που περνούν από το A.

α) Αντικαθιστώ στην (2) $\lambda=-2$ και έχω:

$$y-2=(-2)(x-1) \Rightarrow$$
$$y-2=-2x+2 \Rightarrow \boxed{y=-2x+4}$$

β) Εφόσον η ευθεία είναι παράλληλη στον $y'y$, δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της, και είναι της μορφής $x=\alpha$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$

Αφού το $A(1,2)$ ανήκει στην ευθεία, η εξίσωση θα είναι $\boxed{x=1}$ (όλα τα σημεία της ευθείας έχουν την ίδια τετμημένη)




γ) Εφόσον είναι παράλληλη με την $\varepsilon_2: x+2y+1=0$, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

$$\varepsilon_2: x+2y+1=0 \Rightarrow 2y=-x-1$$
$$\varepsilon_2: \boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}},$$

Επομένως $\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{1}{2}$ (ο συντελεστής του x)

Ξέρω ότι $\lambda_{\varepsilon 1} = \lambda_{\varepsilon 2}$ (αφού είναι παράλληλες)
άρα $\lambda_{\varepsilon 1} = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώ στην (1).

$$y-2=\lambda(x-1)$$
$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \text{ άρα } \boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$$

δ) Εφόσον είναι κάθετη στην $\varepsilon_3: 3x-y+5=0$, για τους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon 1}, \lambda_{\varepsilon 3}$ θα ισχύει $\lambda_{\varepsilon 1} \cdot \lambda_{\varepsilon 3} = -1$.

Βρίσκω συντ. διεύθυνσης $\varepsilon_3$: $y = 3x+5$, άρα $\lambda_{\varepsilon 3} = 3$.
Ισχύει ότι $\lambda_{\varepsilon 1} \cdot \lambda_{\varepsilon 3} = -1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon 1} \cdot 3 = -1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon 1} = -\frac{1}{3}$.

Αντικαθιστώ στην (2) $y-2=\lambda(x-1)$.

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y-2=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+2 \Rightarrow$$
$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}$$

Γενική Σημείωση:
Δύο ευθείες είναι:
- παράλληλες, όταν $\lambda_1=\lambda_2$
- κάθετες, όταν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Άσκηση 7: Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία:

α) $A(1,5)$ και $B(3,2)$
β) $A(1,0)$ και $B(3,0)$

Λύση: Η γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. Όπου το $\lambda$, ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

α) $\lambda=\frac{2-5}{3-1}=\frac{-3}{2}$   $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{2}$.

Το B ανήκει στην ευθεία, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, οπότε το αντικαθιστώ στην (1) για να βρω την εξίσωση.
(Θα μπορούσα να έχω αντικαταστήσει και το A).

(3)

$y-y_0=-\frac{3}{2}(x-x_0)$. , αντικαθιστώ όπου $(x_0,y_0)$ το $B(3,2)$

$y-2=-\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 3}{2} \Rightarrow$

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}+2 \Rightarrow$ $\boxed{y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}}$

β) $\lambda=\frac{0-0}{1-3}=0$. $\lambda_\varepsilon=0$

Το A ανήκει στην ευθεία άρα ~~...~~ επαληθεύει την εξίσωση.
Αντικαθιστώ: $y-y_0=0\cdot(x-x_0) \Rightarrow$
$y-y_0=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ (επειδή $y_0=0$).

<u>Άσκηση 8:</u> Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη ευθειών. Να τις αναπαραστήσετε γραφικά, και να προσδιορίσετε αλγεβρικά και γεωμετρικά ποιά απ' αυτά τα ζεύγη είναι τεμνόμενες (να βρεθεί και το σημείο τομής) ή παράλληλες:

1) $\varepsilon_1: 3x-y+1=0$ και $\varepsilon_2: y-5=0$.
2) $\eta_1: 3x-y+10=0$ και $\eta_2: 6x-2y-14=0$.

<u>Λύση:</u> <u>Αλγεβρικός τρόπος:</u> Αν οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών είναι ίσοι, οι ευθείες είναι παράλληλες, αλλιώς τεμνόμενες (ένα κοινό σημείο)

1) $\varepsilon_1: 3x-y+1=0 \Rightarrow y=3x+1$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1}=3$.
$\varepsilon_2: y-5=0 \Rightarrow y=0x+5$ άρα $\lambda_{\varepsilon_2}=0$

Επομένως οι ευθείες τέμνονται. Για σημείο τομής εξισώνω: $y=5$ και $y=3x+1$
$3x+1=5 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=4/3$ άρα σημείο τομής $(4/3, 5)$

2) $\eta_1: 3x-y+10=0 \Rightarrow y=3x+10$ άρα $\lambda_{\eta_1}=3$.
$\eta_2: 6x-2y-14=0 \Rightarrow 2y=6x-14 \Rightarrow y=3x-7$ άρα $\lambda_{\eta_2}=3$.

Επομένως οι ευθείες είναι παράλληλες.

<u>Γεωμετρικός τρόπος.</u> Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες, σχεδιάζουμε τις ευθείες, και βλέπουμε παραλληλία ή σημεία τομής....

<u>Άσκηση 9</u>: Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2,3)$, $B(-6,1)$ και $\Gamma(-10,-1)$ είναι συνευθειακά.

<u>Λύση</u>: Ξέρω ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες, εφόσον έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Βρίσκω $\lambda_{AB}$ (συντελεστής διεύθυνσης AB) και $\lambda_{B\Gamma}$ (συντ. διευθ. BΓ).

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad \text{Άρα} \quad \lambda_{AB} = \frac{1-3}{(-6)-(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\lambda_{AB} = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Επίσης} \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{-1-1}{-10-(-6)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{\lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}}$$

Επειδή οι 2 ευθείες AB και BΓ έχουν τον ίδιο συντ. διεύθυνσης, είναι παράλληλες. Έχουν κοινό σημείο το B,
άρα αναγκαστικά τα σημεία A, B, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία
δηλαδή είναι συνευθειακά.

Γενική Σημείωση: Όταν 2 ευθείες έχουν το ίδιο λ (συντελεστή διεύθυνσης) είναι παράλληλες ή θα ταυτίζονται, εφόσον έχουν κοινό σημείο.

<u>Άσκηση 10</u>

Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2

β) έχει κέντρο το σημείο $(3,-1)$ και ακτίνα 5.

γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2,1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2,3)$.

<u>Λύση</u>: Η γενική εξίσωση του κύκλου με κέντρο $(\alpha,\beta)$ και ακτίνα R είναι:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

α) αντικαθιστώ όπου $(\alpha,\beta)$ το $(0,0)$ και $R=2$.

Και έχω: $x^2 + y^2 = 2^2$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

β) Αντικαθιστώ όπου $(\alpha,\beta)$ το $(3,-1)$ και $R=5$:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

γ) Αντικαθιστώ όπου $(\alpha,\beta)$ το $(-2,1)$:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=R^2.$$

Για να βρω το $R$, αντικαθιστώ στην εξίσωση το σημείο $(-2,3)$ που από εκφώνηση την επαληθεύει:

$$(-2+2)^2+(3-1)^2=R^2$$

$$0+2^2=R^2 \Rightarrow \underline{R=2}$$

άρα η εξίσωση: $\boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=2^2}$

<u>Άσκηση 11</u> Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Να δείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

<u>Λύση:</u> Θέλω να το φέρω στη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

$$x^2+2x+y^2-4y+1=0.$$

$$x^2+2x+1-1+y^2-4y+4-4+1=0.$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2-1-4+1=0.$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=2^2.$$

άρα είναι κύκλος με κέντρο το $(-1,2)$ και ακτίνα 2.

<u>Άσκηση 12</u>: Να εξετάσετε αν οι παρακάτω εξισώσεις είναι εξισώσεις κύκλου, και για όσες είναι να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους.

α) $x^2+y^2+2x-4y+10=0$

β) $x^2+y^2+4x-4y+8=0$

<u>Λύση:</u> α) $x^2+y^2+2x-4y+10=0$. Θέλω να το φέρω στη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$$x^2+2x+1-1+y^2-4y+4-4+10=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2-1-4+10=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=-5.$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση δεν είναι εξίσωση κύκλου. (αφού $R^2$ δεν μπορεί να ισούται με $-5$, δεν υπάρχουν σημεία που την επαληθεύουν β) $x^2+y^2+4x-4y+8=0$. Θέλω να το φέρω στη μορφή $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

$$x^2+4x+y^2-4y+8=0$$
$$x^2+4x+4-4+y^2-4y+4-4+8=0$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2-4-4+8=0$$
$$(x+2)^2+(y-2)^2=0.$$

Δεν είναι εξίσωση κύκλου. (Η εξίσωση επαληθεύεται μόνο για $x=-2$ και $y=2$)