**8η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

1. **(Τετράγωνοι αριθμοί)** Στον επόμενο πίνακα φαίνονται διαδοχικά τα αθροίσματα των ν πρώτων περιττών αριθμών για ν=1, 2, 3, 4 αντίστοιχα.

|  |  |
| --- | --- |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 1 |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 1+3 = |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 1+3+5 = |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 1+3+5+7 = |

1. Πόσο είναι το άθροισμα των 5 πρώτων περιττών αριθμών, δηλαδή το άθροισμα 1+3+5+7+9;
2. Πόσο είναι το άθροισμα των 100 πρώτων περιττών αριθμών;
3. Πόσο είναι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών αριθμών, δηλαδή το άθροισμα 1+2+3+...+(2ν-1); Αποδείξτε το με μαθηματική επαγωγή.
4. **(Επιμήκεις αριθμοί)** Στον επόμενο πίνακα φαίνονται διαδοχικά τα αθροίσματα των ν πρώτων αρτίων αριθμών για ν=1, 2, 3, 4 αντίστοιχα.

|  |  |
| --- | --- |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 2 |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 2+4 = |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 2+4+6 = |
| https://i.stack.imgur.com/2kbGG.gif | 2+4+6+8 = |

1. Πόσο είναι το άθροισμα των 5 πρώτων αρτίων αριθμών, δηλαδή το άθροισμα 2+4+6+8+10;
2. Πόσο είναι το άθροισμα των ν πρώτων αρτίων αριθμών, δηλαδή το άθροισμα 2+4+6+...+2ν; Αποδείξτε το με μαθηματική επαγωγή.
3. Πόσο είναι το άθροισμα των ν πρώτων φυσικών αριθμών;
4. Δίνεται η παρακάτω εσφαλμένη πρόταση με την απόδειξη της. Βρείτε που βρίσκεται το λάθος. «Κάθε φυσικός αριθμός είναι ίσος με τον επόμενο του». Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής υποθέτω ότι ισχύει η πρόταση για κάποιο φυσικό αριθμό κ. Τότε κ=κ+1. Θα αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για τον επόμενο του κ τον κ+1. Δηλαδή ότι κ+1 =κ+2. Επειδή κ=κ+1 από την υπόθεση προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον αριθμό 1 έχουμε ότι κ+1=κ+1+1 δηλαδή κ+1=κ+2. Άρα έχω αποδείξει την αρχική εικασία.
5. **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε ν ∈ Ν\* ισχύει: .

**ii)** Να δείξετε ότι η ισότητα  αν αληθεύει για ν, τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε ν ∈ Ν\*; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ν ∈ Ν\* ισχύει :

Ι. 1+2+3+...+ν = .

ΙΙ. 1+3+5+...+(2ν-1) = ν2.

ΙΙΙ. 1⋅2+2⋅3+3⋅4+...+ν(ν+1) = ν(ν+1)(ν+2).

IV. 12+22+32+...+ν2 = ν(ν+1)(2ν+1).

V. 21+22+23+...+2ν = 2ν+1 – 2.

VI. .

1. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του ν ∈ Ν\* για την οποία ισχύει η σχέση   
   2ν > ν2. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.
2. Να λύσετε στο σύνολο των ακεραίων (δηλαδή α, β ακέραιοι) τις εξισώσεις. Σε κάθε βήμα της διαδικασίας να αναφέρετε ποια αξιώματα ή ιδιότητες των ακεραίων χρησιμοποιήσατε.
3. (α+1)(β2 – 1) = 1
4. (α – 1)(α2 – 1) = 1
5. –2α– α2 = 1
6. 2⋅α3 – α4 = 1
7. Ποιες από τις παρακάτω ανισοτικές σχέσεις ισχύουν στο σύνολο των ακεραίων αριθμών (α, β ακέραιοι). Αποδείξτε όποιες ισχύουν. Δώστε ένα αντιπαράδειγμα για αυτές που δεν ισχύουν. Στην περίπτωση που οι σχέσεις αυτές δεν ισχύουν υπάρχουν προϋποθέσεις που μπορούν να τεθούν ώστε να ισχύουν;
8. α2 ≥ α
9. 2⋅α ≥ α
10. α+2 ≥ α
11. α – 2 ≤ α
12. Εάν α < β τότε α < < β
13. Εάν α < β και γ < δ τότε α+γ < β+δ, αγ < βδ, < .