Βασικές έννοιες της αναλυτικής γεωμετρίας

Ιστορικά στοιχεία

Εισαγωγή

Η ιδέα της χρησιμοποίησης ενός συστήματος συντεταγμένων για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου πάνω σε μια επιφάνεια προέρχεται από την Γεωγραφία και ήταν γνωστή στους αρχαίους γεωγράφους. Στην εφαρμογή αυτής της ιδέας στη Γεωμετρία στηρίζεται η έννοια της εξίσωσης μιας καμπύλης, δηλαδή της αλγεβρικής ισότητας που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης (και μόνο αυτών). Η έννοια αυτή θεωρείται σήμερα τόσο απλή, ώστε η διδασκαλία της να αρχίζει από το Γυμνάσιο. Στην πραγματικότητα όμως η εξέλιξή της χρειάστηκε πολύ χρόνο και υπήρξε το αποτέλεσμα μιας σύνθεσης ανάμεσα στη Γεωμετρία και στην Άλγεβρα, με επαναστατικές συνέπειες για τα Μαθηματικά και τις Θετικές Επιστήμες.

Η ανάγκη και τα πρώτα ίχνη ενός "συστήματος αναφοράς" εμφανίζονται στην αρχαία ελληνική Γεωμετρία κατά τη μελέτη των κωνικών τομών (δηλαδή της παραβολής, της υπερβολής και της έλλειψης, τις οποίες θα μελετήσουμε παρακάτω). Ο Απολλώνιος στο 1ο βιβλίο των "Κωνικών", αφού ορίζει αυτές τις καμπύλες στερεομετρικά ως τομές του κώνου από ένα επίπεδο, χρησιμοποιεί δύο συγκεκριμένες ευθείες του σχήματος, για να αποδείξει χαρακτηριστικές ιδιότητες κάθε καμπύλης.

Η ένωση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία αποτέλεσε μια εξέλιξη, η οποία σημαδεύτηκε αναμφισβήτητα από τις ιδέες του Καρτέσιου (Rene Descartes, 1596-1650) και άλλαξε την εικόνα των Μαθηματικών.

Η ένωση αυτή, που σήμερα ονομάζουμε Αναλυτική Γεωμετρία, έδωσε το απαραίτητο εργαλείο που χρειάζονταν οι επιστήμονες του 17ου αιώνα για να ποσοτικοποιήσουν τις εργασίες τους και έθεσε τα θεμέλια για εκπληκτικές προόδους στα Μαθηματικά, τη Φυσική, την Αστρονομία και τη Βιολογία.

Το 1637, όταν ο Καρτέσιος ήταν 41 ετών, πείσθηκε από τους φίλους του να δημοσιεύσει το μεγάλο έργο του «Πραγματεία πάνω στη Μέθοδο της Ορθής Χρήσης του Λόγου και της Έρευνας της Αλήθειας στην Επιστήμη. Επιπλέον, η Διοπτρική, οι Μετεωρίτες και η Γεωμετρία, Δοκίμια σ’ αυτή τη Μέθοδο».

Αυτή η εργασία πέρασε στην ιστορία ως η «Μέθοδος». Το έτος, λοιπόν, αυτό η Αναλυτική Γεωμετρία δόθηκε στον κόσμο.

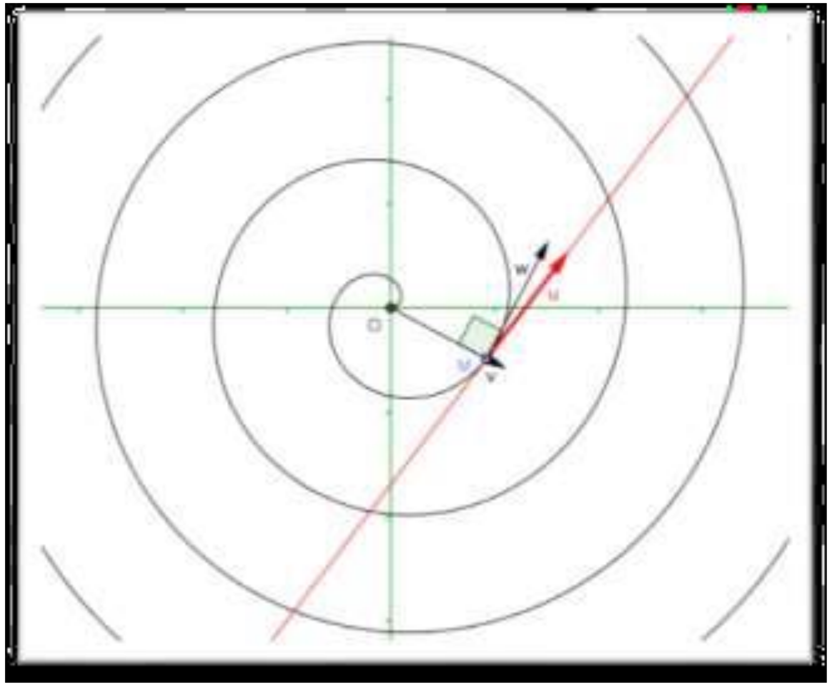
Οι καρτεσιανές συντεταγμένες, η εξίσωση και η γραφική παράσταση μιας οποιασδήποτε καμπύλης και η χρήση της Άλγεβρας για την επιλυση γεωμετρικών προβλημάτων έγινε ευρέως γνωστή.

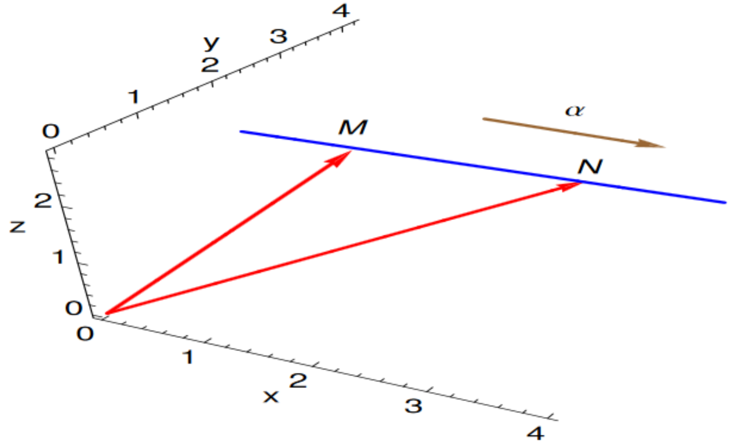
Αναλυτική γεωμετρία και σύστημα συντεταγμένων

- Η Αναλυτική Γεωμετρία ξεκινά με τον καθορισμό **αριθμητικών συντεταγμένων για όλα τα σημεία ενός επιπέδου.**
  - Οι συντεταγμένες επιτρέπουν τη γραφική παράσταση αλγεβρικών εξισώσεων δύο μεταβλητών με ευθείες ή καμπύλες.
  - Επίσης, μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε γωνίες, αποστάσεις και να γράφουμε εξισώσεις για την περιγραφή των τροχιών διαφόρων αντικειμένων.
  - Όλα αυτά θα ήταν αρκετά για προσδιορίσουν την αξία της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όμως συμβαίνει κάτι ακόμη πιο ενδιαφέρον και σπουδαίο.
    - Αφού το μεγαλύτερο μέρος του Απειροστικού Λογισμού μπορεί να παρουσιαστεί γεωμετρικά και αφού οι εφαρμογές του Απειροστικού Λογισμού αναφέρονται κυρίως στην κίνηση και τη μεταβολή, το επίπεδο των συντεταγμένων είναι ο φυσικός χώρος για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού και των εφαρμογών του.

Αναλυτική γεωμετρία και διανυσματικός χώρος

- **Αναλυτική γεωμετρία** είναι το είδος της γεωμετρίας που θεωρεί τον γεωμετρικό χώρο διανυσματικό χώρο.
- Κάθε διάνυσμα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου, ενώ τα γεωμετρικά σχήματα και οι γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των σημείων και διάφορων σχημάτων περιγράφονται με διανυσματικές σχέσεις οι οποίες μπορούν να υποστούν επεξεργασία όπως και οι αλγεβρικές.
- Έτσι μέσω της αναλυτικής γεωμετρίας **έγινε μια αλγεβροποίηση της γεωμετρίας.**

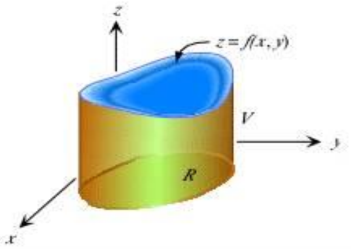




η ευθεία MN που διέρχεται από σημείο M και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ όπου $\mathbf{r} = \mathbf{ON}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}$.

Γεωμετρική ερμηνεία διπλού ολοκληρώματος

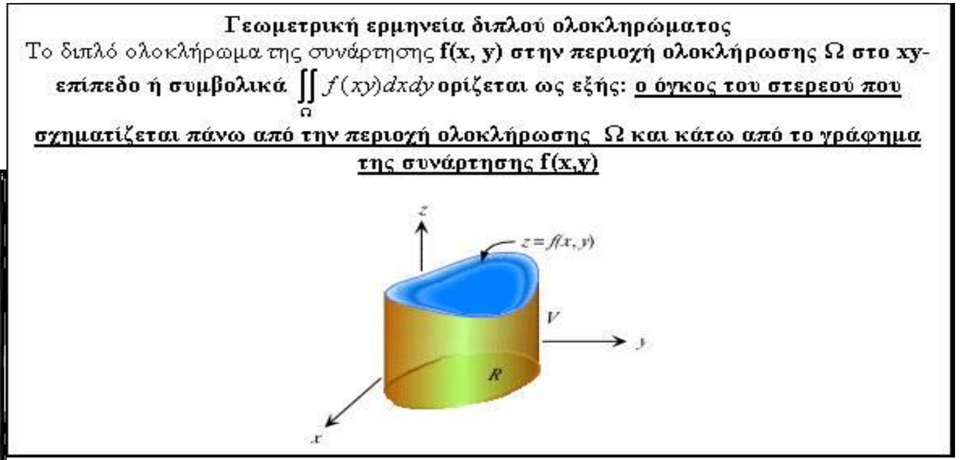
Το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης **f(x, y) στην περιοχή ολοκλήρωσης Ω στο xy-επίπεδο ή συμβολικά** $\iint_{\Omega} f(xy)dxdy$ **ορίζεται ως εξής:** **ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται πάνω από την περιοχή ολοκλήρωσης Ω και κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f(x,y)**

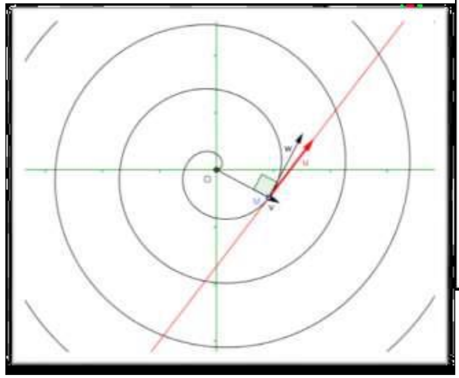


Η σημασία της Αναλυτικής Γεωμετρίας

- Το πέρασμα από τη Γεωμετρία στην Άλγεβρα.
- Η μελέτη γεωμετρικών καμπυλών με αλγεβρικές εξισώσεις
- Η ανάπτυξη του διαφορικού λογισμού (η εφαπτομένη καμπύλης) και του ολοκληρωτικού λογισμού (΄π.χ. όγκος στερεού σώματος)
- Η εφαπτομένη σε μια καμπύλη (σπείρα) του Αρχιμήδη με μεθόδους αντίστοιχες με τις εξισώσεις.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

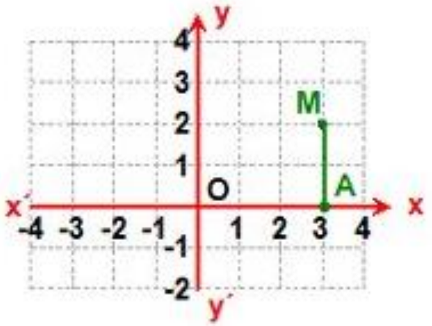

Γεωμετρική ερμηνεία διπλού ολοκληρώματος
Το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης **f(x, y) στην περιοχή ολοκλήρωσης Ω στο xy-επίπεδο ή συμβολικά** $\iint_\Omega f(xy)dxdy$ **ορίζεται ως εξής: ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται πάνω από την περιοχή ολοκλήρωσης Ω και κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f(x,y)**



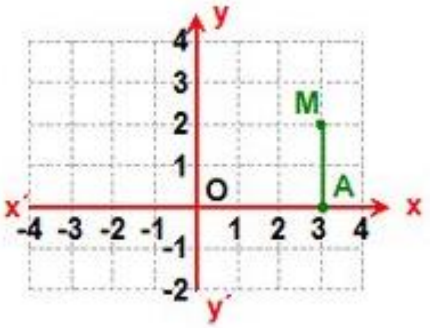
Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο δισδιάστατο χώρο

- Το 2-διάστατο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θέσης σημείων στο επίπεδο (σε μία επίπεδη επιφάνεια).
  - αποτελείται από δύο **προσανατολισμένες ευθείες, κάθετες μεταξύ τους**, οι οποίες καλούνται συμβατικά **άξονας τετμημένων** (οριζόντιος άξονας) και **άξονας τεταγμένων** (κατακόρυφος άξονας) και συμβολίζονται αντίστοιχα με x και y.
  - Το σημείο όπου τέμνονται οι δύο άξονες λέγεται **αρχή του συστήματος συντεταγμένων**.

Προσδιορισμός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο

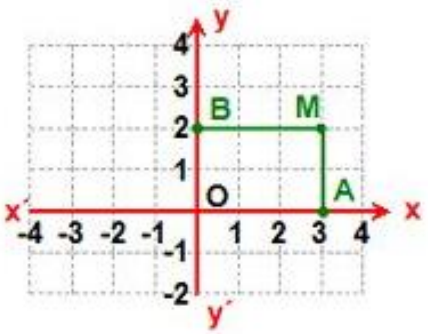


1. Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x'x και y'y, με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο M.



2. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα y'y που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A.

Για το σχήμα μας το A αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα x'x.

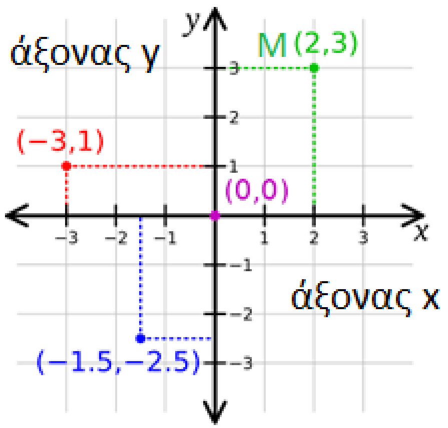


3. Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x'x που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο B. Για το σχήμα μας το B αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα y'y.

Δηλαδή, το σημείο M αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών (3, 2) και συμβολίζεται M(3, 2). Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου M και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M.

Η τετμημένη και η τεταγμένη του M λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου M.

Συντεταγμένες σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο



Ένα σημείο πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο προσδιορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, **την τετμημένη** και **την τεταγμένη**. Η τετμημένη αναφέρεται στον άξονα x και ταυτόχρονα είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα y ενώ η **τεταγμένη αναφέρεται στον άξονα y αλλά είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα x**. Η τετμημένη και η τεταγμένη αποτελούν **τις *συντεταγμένες* του σημείου**.

Ασκηση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Δίνονται τα σημεία Α(2, 3) και Β(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους ΑΒ.

Τι συμπεραίνετε;

Λύση: Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.

Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (10, 3),

οπότε ΑΓ = 10 - 2 = 8 και ΒΓ = 9 - 3 = 6.

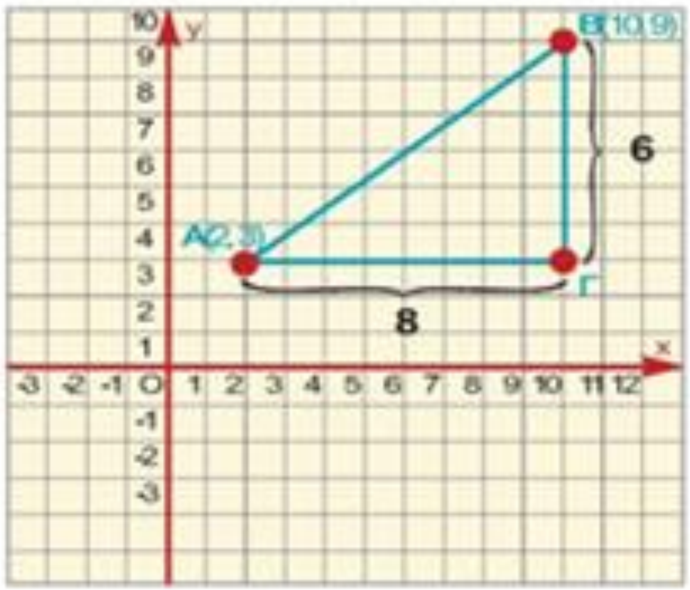
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή

$AB^2 = 8^2 + 6^2$ ή

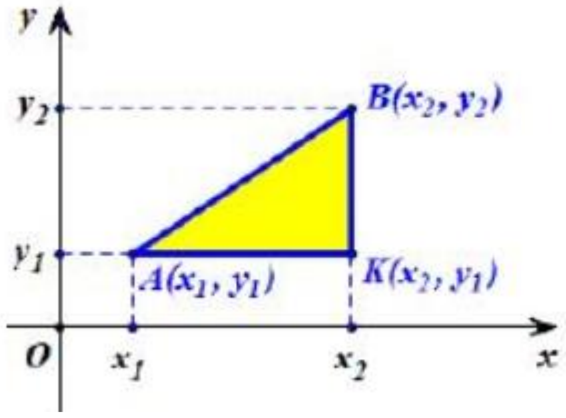
$AB^2 = 100$ ή

$AB = 10$



Απόσταση 2 σημείων στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

- Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ στο καρτεσιανό σύστημα
- Η απόσταση συμβολίζεται με (AB)



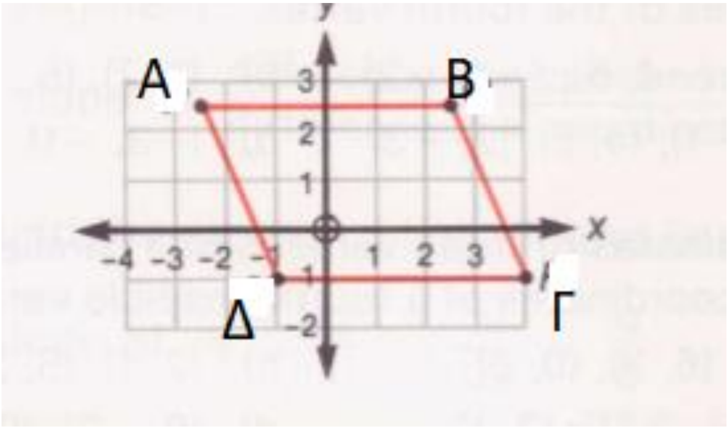
$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Σχεδιασμός σχήματος στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων

- Σχεδίασε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα σημεία

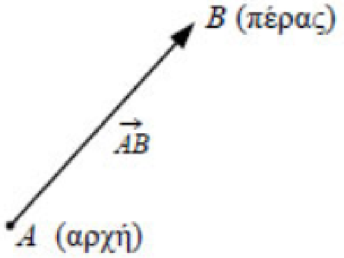
Α(-2.5 , 2.5), Β(2.5, 2.5), Γ(4, -1) και Δ(-1, -1).

- Ένωσε τα σημεία ως εξής:
  - Α με Β, Β με Γ, Γ με Δ και Δ με Α.
- Ανέφερε και αιτιολόγησε τι σχήμα προκύπτει.



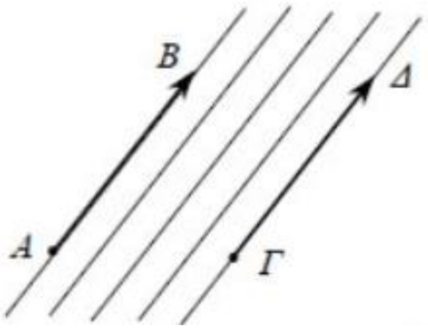
Διανύσματα

• Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως έναπροσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ωςένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκραθεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεταιαρχή ή σημείο εφαρμογής του διανύσματος, ενώ τοδεύτερο λέγεται πέρας του διανύσματος. Τοδιάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεταιμε $\vec{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στοB.



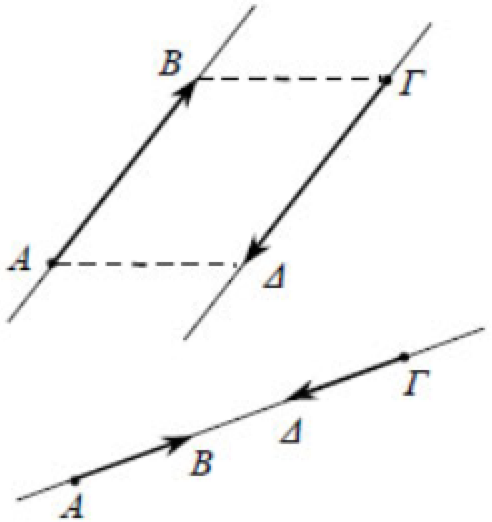
Ίσα Διανύσματα

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** ότανέχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για ναδηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναιίσα, γράφουμε $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$.



Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα,** όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσαμέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα,γράφουμε

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ ή } \overrightarrow{\Gamma\Delta}=-\overrightarrow{AB}.$$



Είναι φανερό ότι

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Ειδικότερα, έχουμε $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Συντεταγμένες διανύσματος

Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1.$$

Δηλαδή

τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$= τετμημένη του B — τετμημένη του A

τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$=τεταγμένη του B — τεταγμένη του A.

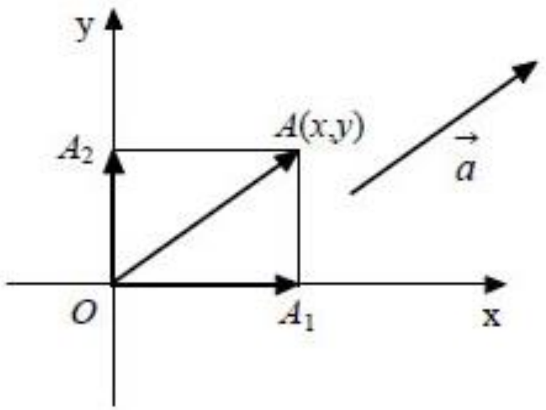
- Βρείτε τις συντεταγμένες διανύσματος ΑΒ όπου Α(1,2) και Β(3,7)

διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το $A(1,2)$ και πέρας το $B(3,7)$ έχει συντεταγμένες $x = 3-1 = 2$ και $y = 7-2 = 5$, δηλαδή είναι ίσο με το $\vec{\alpha} = (2,5)$.

Μέτρο διανύσματος

Μέτρο Διανύσματος

• Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(OA_1)=|x|$ και $(OA_2)=|y|$. Έτσι θα έχουμε:



$$|\vec{\alpha}|^2=(OA)^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2=(OA_1)^2+(OA_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2.$$

Επομένως:

$$\boxed{\text{Αν } \vec{\alpha}=(x,y), \quad \text{τότε} \quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

Άσκηση

- Τοποθετήστε τα σημεία Α (-3,5) και Β (2, -4) σε καρτεσιανό επίπεδο
- Βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων ΑΒ και ΒΑ

Τι παρατηρείτε;

- Βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων ΑΒ, ΒΑ

Τι παρατηρείτε;

Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1 .$$

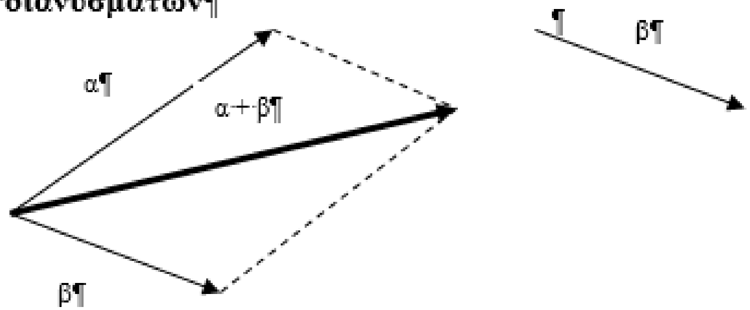
Δηλαδή

τετμημένη του $\vec{AB}$= τετμημένη του B — τετμημένη του A

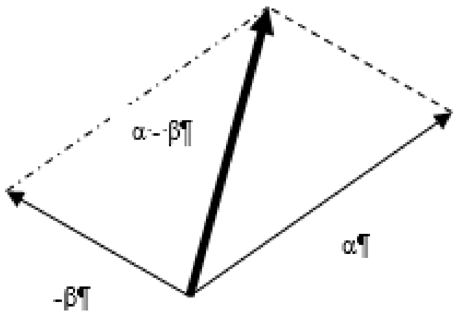
τεταγμένη του $\vec{AB}$=τεταγμένη του B — τεταγμένη του A.

Πράξεις με διανύσματα

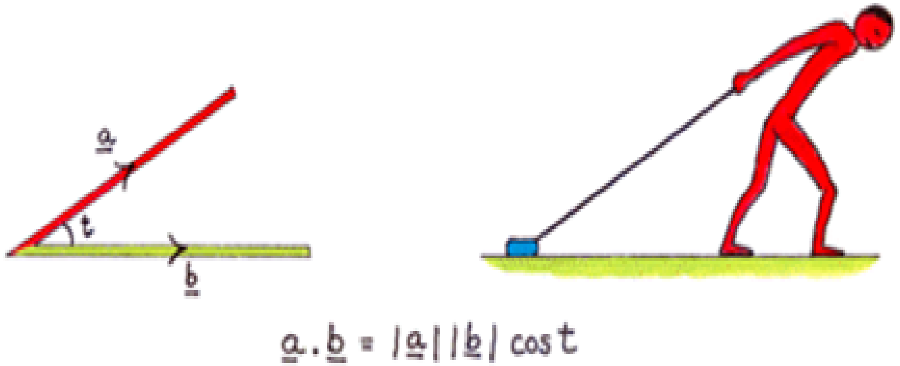
Πρόσθεση διανυσμάτων



Αφαίρεση διανυσμάτων



Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

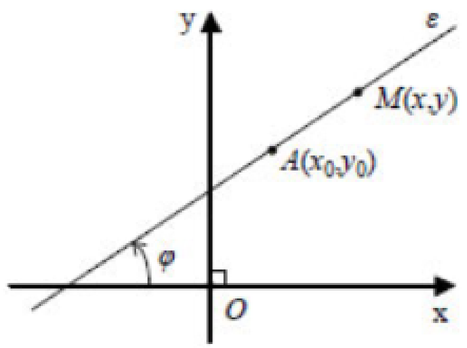


Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο (π.χ. Α(xo, yo))

Εξίσωση Ευθείας

Μια ευθεία στο επίπεδο καθορίζεται, όταν δίνονται ένα σημείο της και ο συντελεστής διεύθυνσής της ή δύο σημεία της. Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας σε καθεμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις

• Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0,y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου. Ζητάμε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.



Ένα σημείο $M(x,y)$ διαφορετικό του $A(x_0,y_0)$ ανήκει στην ε, αν και μόνο αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι παράλληλο στην ε, δηλαδή αν και μόνο αν το $\overrightarrow{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή $\overrightarrow{AM}=(x-x_0,y-y_0)$, έχουμε $\lambda_{\overrightarrow{AM}}=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$. Επομένως, το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\lambda$ ή $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο $A(x_0,y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

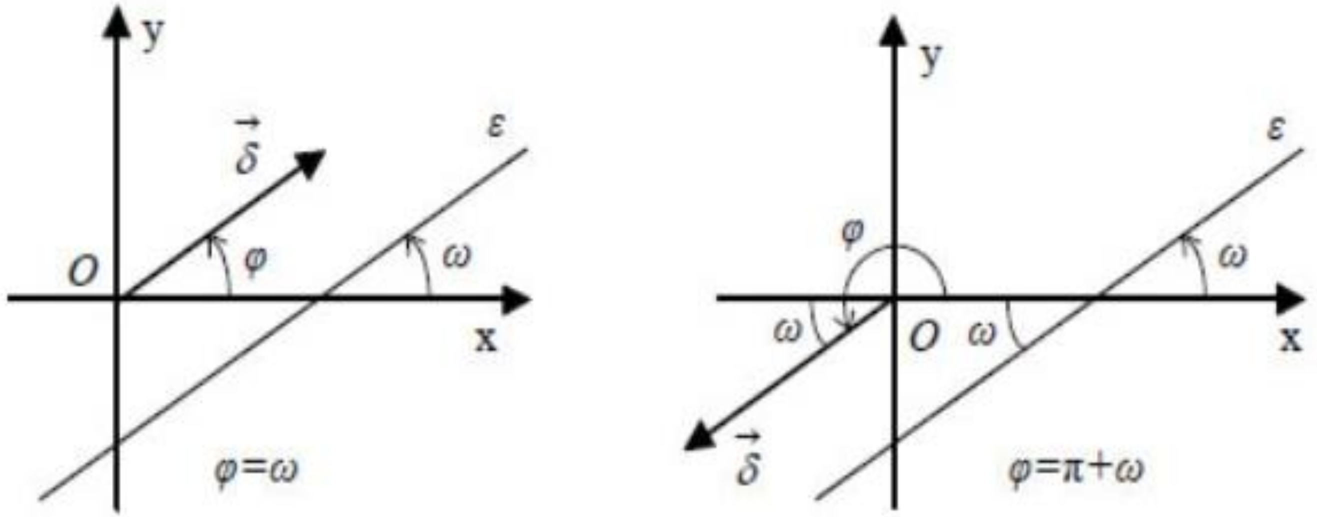
$$\boxed{y-y_0=\lambda(x-x_0)}$$

Άσκηση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

- Ποια είναι η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(1,-2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 2;
- Ποια είναι η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο A(1,-2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = -1/2;
- Σχεδιάστε τις δυο ευθείες.
- Τι παρατηρείτε;

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".



Αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες δύο σημείων μιας μη κατακόρυφης ευθείας ε, δηλαδή μιας ευθείας που δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε μπορούμε να βρούμε και το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής. Πράγματι, αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία της ευθείας ε, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, δηλαδή ίσος με $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

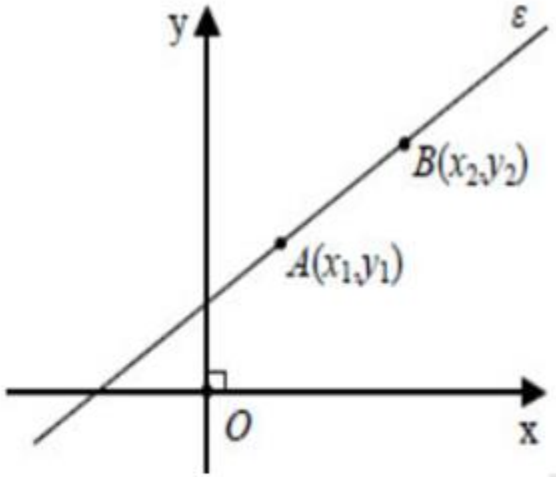
- Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος που διέρχεται από τα σημεία A(1,-2) και B(-1,4)

ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,-2)$ και $B(-1,4)$ είναι

$$\lambda = \frac{4-(-2)}{-1-1} = -3.$$

• Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Αν $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ και επομένως η εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ γίνεται:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (2)$$



- Ποια είναι η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α(-3,5) και Β(4,1);

Για παράδειγμα, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-3,5)$ και $B(4,1)$ έχει εξίσωση $y-5=\frac{1-5}{4+3}(x+3)$, η οποία μετά τις πράξεις γίνεται $y=-\frac{4}{7}x+\frac{23}{7}$

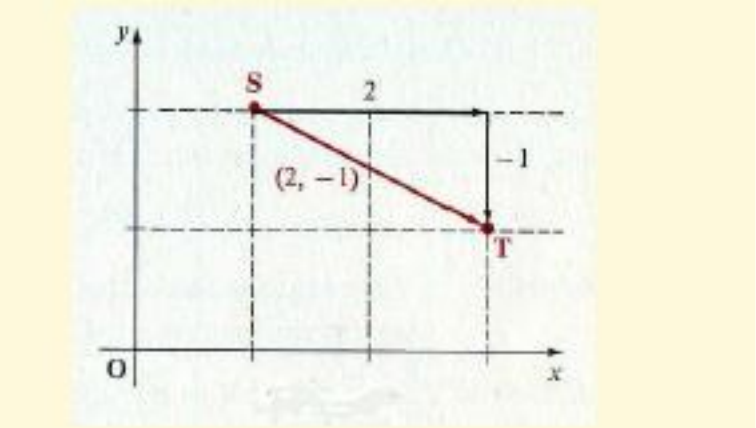
.

Μετάθεση σημείου S κατά διάνυσμα (x,y)

- Μετάθεση ή μετατόπιση ενός σημείου Σ σε μια άλλη θέση του επιπέδου κατά διάνυσμα (x, y)

ΑΣΚΗΣΗ: Εστω σημείο S(1,2) το οποίο μετατοπίζεται κατά διάνυσμα ST (2,-1).

- Σχεδιάστε την αναπαράσταση του ST. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου T.

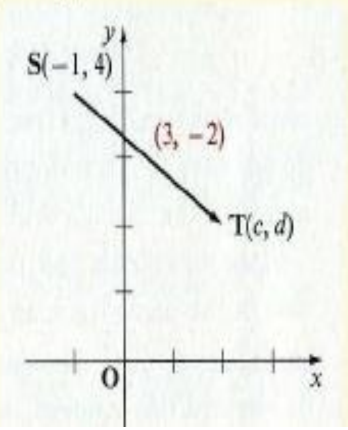


Παράδειγμα 1. Ποιές είναι οι συντεταγμένες του τερματικού σημείου **T** του γεωμετρικού διανύσματος που αντιστοιχεί στο $(3, -2)$ που έχει αρχικό σημείο το $\mathbf{S}(-1, 4)$;

Λύση: Ένα σχεδιάγραμμα όπως αυτό που βλέπετε στα δεξιά σας βοηθάει να αναπαραστήσετε με μια εικόνα τα δεδομένα. Εαν το (c, d) δηλώνει τις συντεταγμένες του τερματικού σημείου **T** του βέλους, τότε

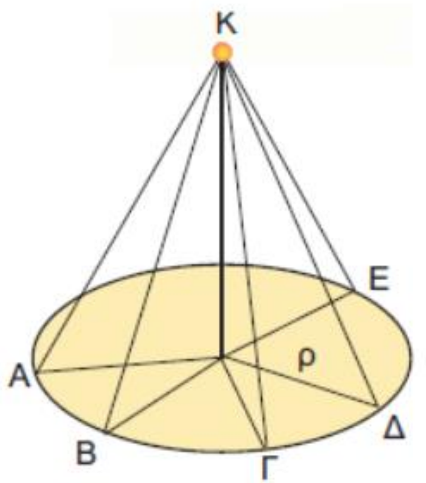
$$(c, d) = (-1 + 3, 4 + (-2)) = (2, 2).$$

□



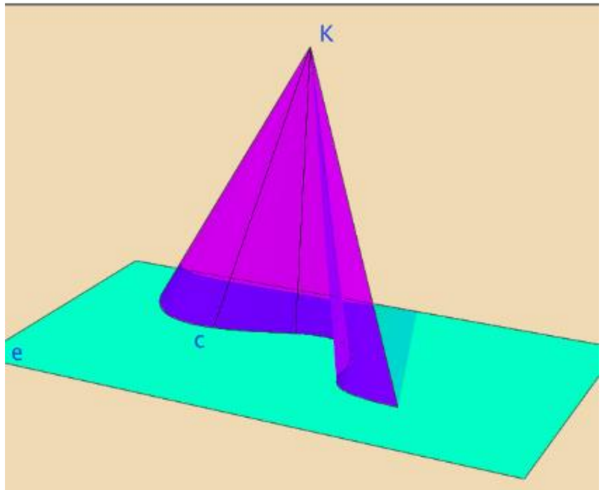
Κωνικές τομές

Κωνικές τομές ή τομές μιας κωνικής επιφάνειας

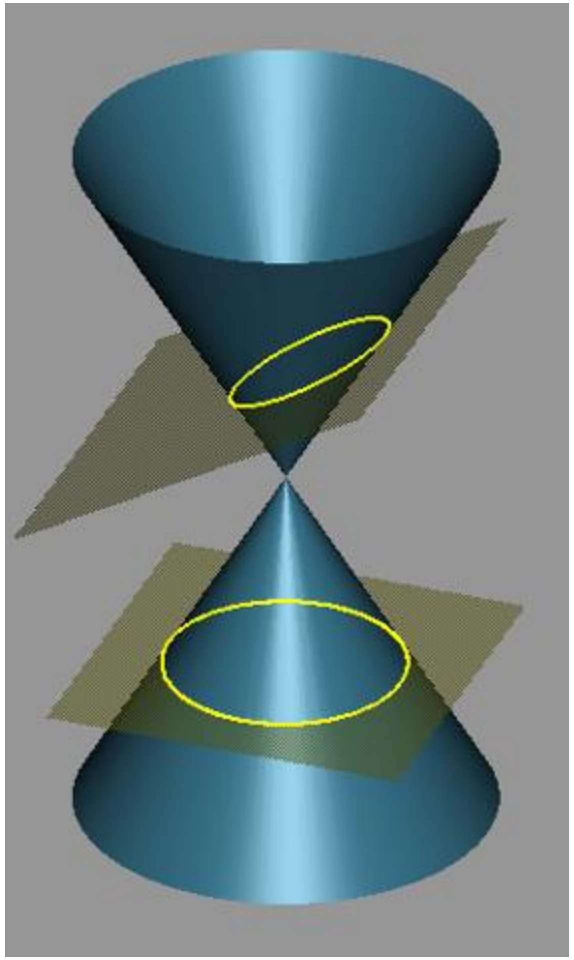


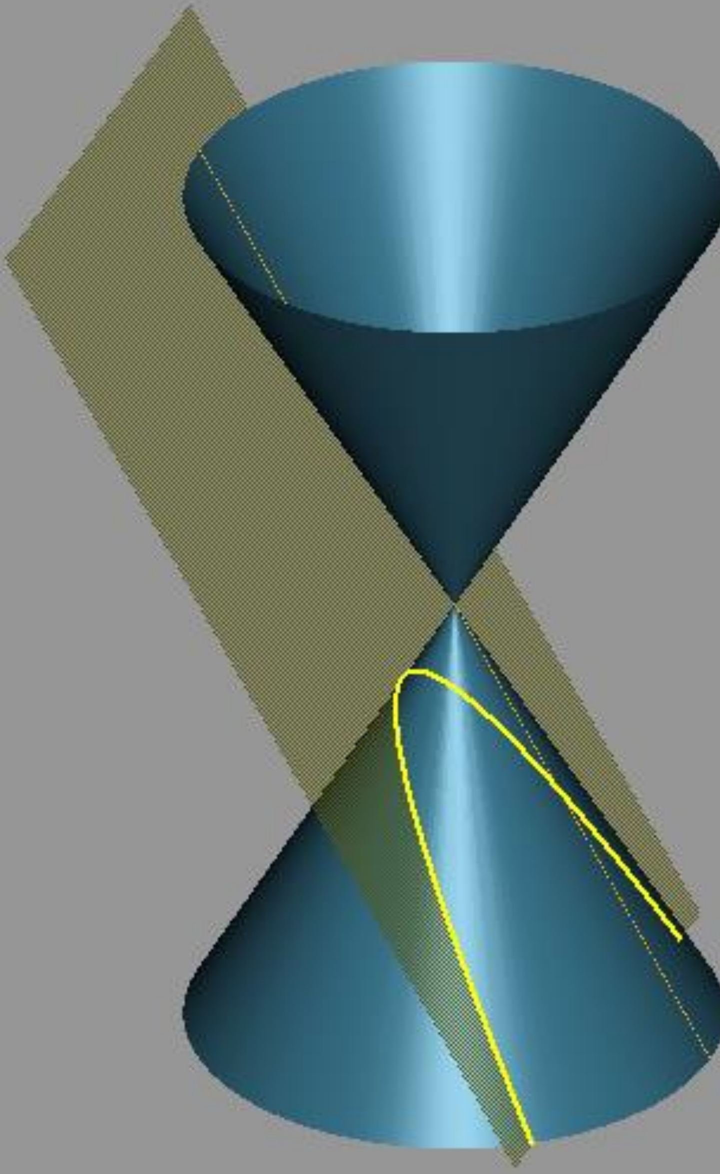
- **Κωνική τομή** ονομάζεται μία καμπύλη που προκύπτει από την τομή κώνου και επιπέδου, ή ακριβέστερα, από την τομή ενός επιπέδου με δύο ίσες ορθές άπειρες κωνικές επιφάνειες που έχουν κοινό άξονα και συνδέονται στην κορυφή τους (ο ένας κώνος εφαρμόζει "αναποδογυρισμένος" πάνω στην κορυφή του άλλου).
- **Η θέση του επιπέδου ως προς τον κώνο καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής**

Η κωνική επιφάνεια ή κώνος, προκύπτει από τις διαδοχικές θέσεις μιας ευθείας (γενέτειρες) η οποία διέρχεται από το σταθερό σημείο Κ (κορυφή του κώνου) και συναντά μία καμπύλη c (οδηγός καμπύλη) (Σχ. 1)

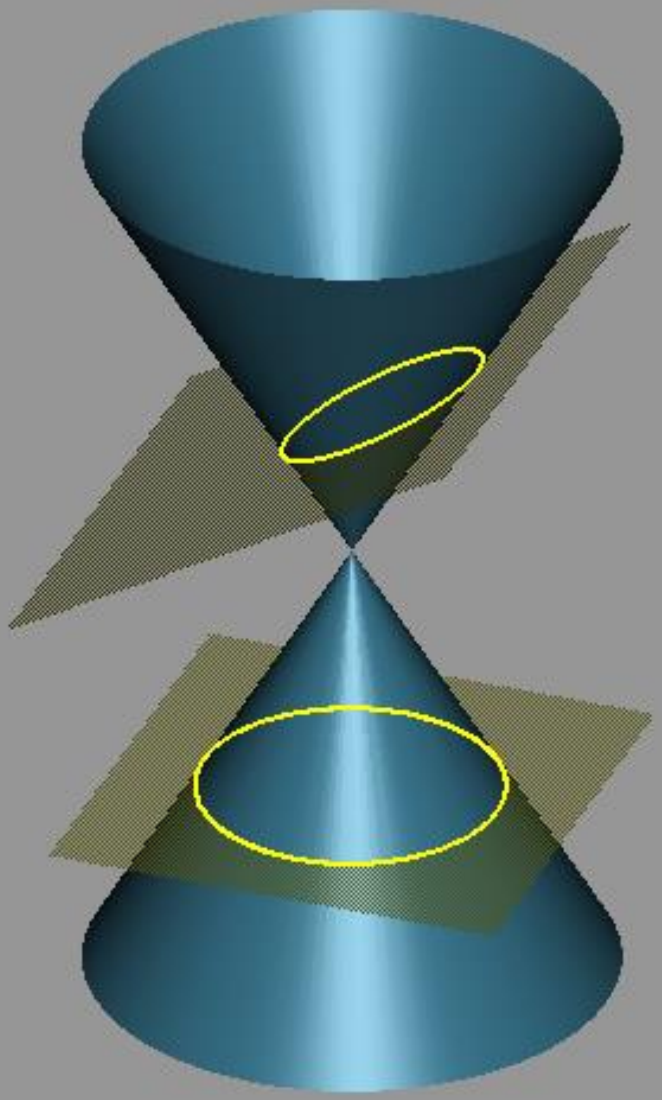


1. Εάν το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα του κώνου η τομή είναι **κύκλος**.
2. Εάν το επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα του κώνου και τέμνει όλες τις γενέτειρες αυτού, η κλειστή καμπύλη που δημιουργείται είναι **έλλειψη**
3. Εάν το επίπεδο είναι παράλληλο προς μια γενέτειρα του κώνου, η τομή είναι **παραβολή**.
4. Εάν το επίπεδο δεν είναι κάθετο στον άξονα του κώνου και ούτε παράλληλο προς μια γενέτειρα αυτού, τότε η καμπύλη που προκύπτει είναι **υπερβολή**.

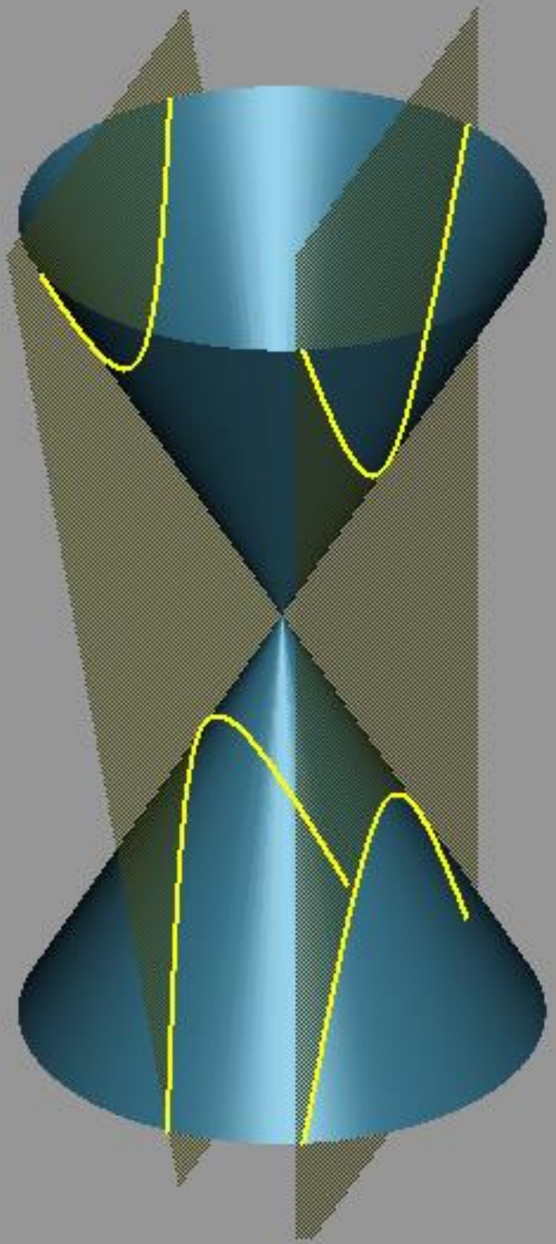




Parabola- cutting plane parallel to side of cone.



Circle and Ellipse



Hyperbolas

Κύκλος

- Κύκλος: Ο **Γεωμετρικός τόπος των σημείων** **που ισαπέχουν** **από ένα σταθερό σημείο**
- Εξίσωση του κύκλου με **κέντρο (α, β)** και **ακτίνα R**

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Έτσι, για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο $K(1, -3)$ και ακτίνα $\rho=2$ έχει εξίσωση $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \rho^2$.

- **(x-1)^2+(y+3)^2=2^2 ή (x-1)^2+(y+3)^2=4**

Γενική εξίσωση κύκλου

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0\,,\quad \text{με}\quad A^2+B^2-4\Gamma>0 \qquad \text{(I)}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (I) παριστάνει κύκλο.

Η εξίσωση $x^2+y^2-4x+6y+12=0$, για παράδειγμα, γράφεται διαδοχικά

$$(x^2-4x)+(y^2+6y)=-12$$
$$(x^2-2\cdot 2x+2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2)=-12+2^2+3^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=1^2\,.$$

Άρα, παριστάνει κύκλο με κέντρο *K(2, -3)* και ακτίνα $\rho=1$.

Ασκήσεις

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

Να βρείτε το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση

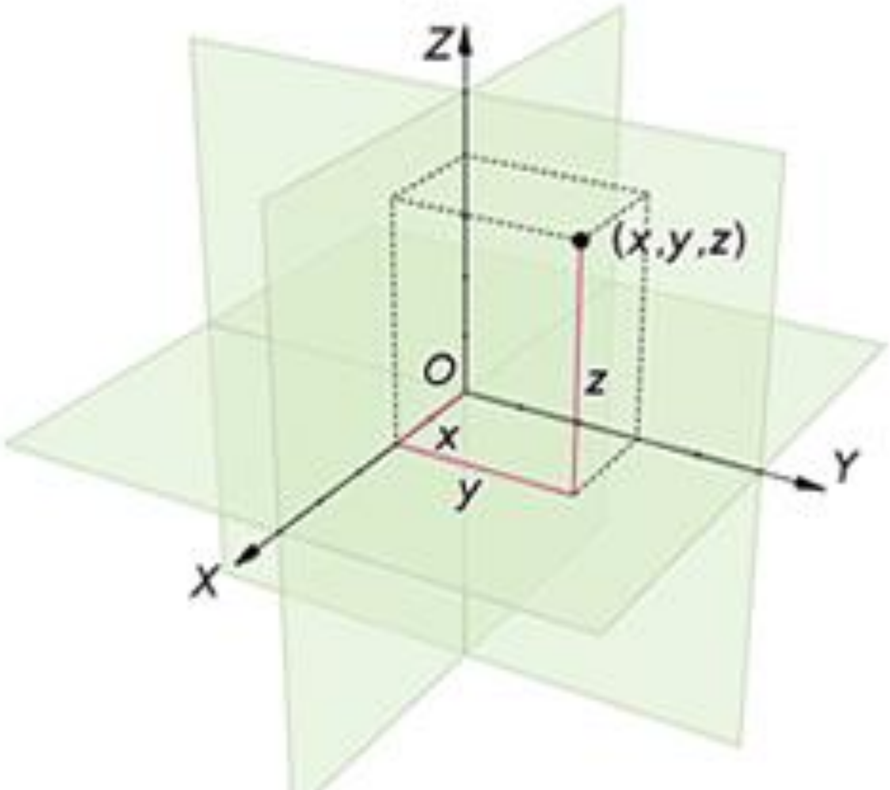
(i) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

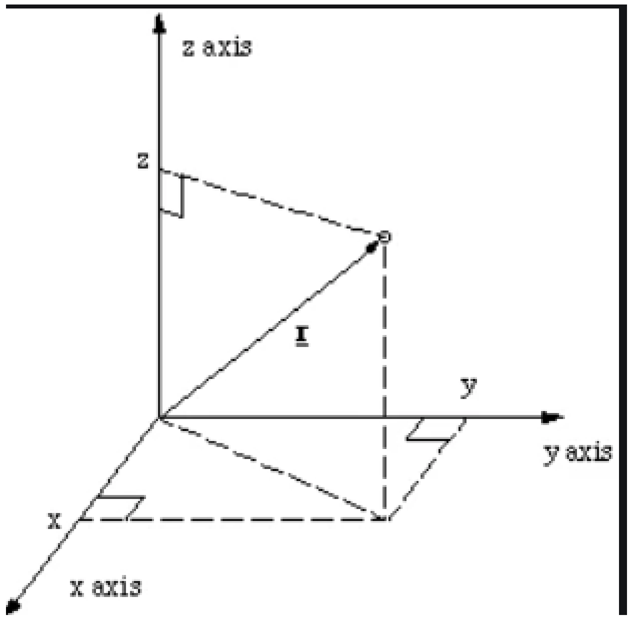
(ii) $x^2+y^2-10x+12y-20=0$

(iii) $3x^2+3y^2+6x-9y+1=0$

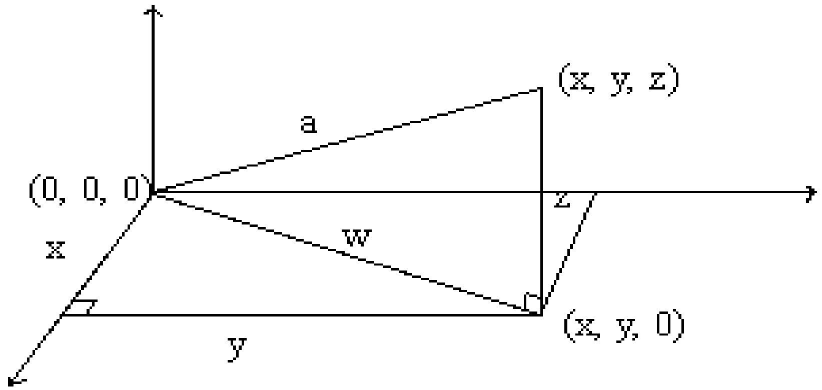
(iv) $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$.

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο 3-διάστατο χώρο





Μήκος διανύσματος στον 3-διάστατο χώρο



Πηγές

- ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ: Κορνάρος Χαράλαμπος, Αναλυτική Γεωμετρία, Τμήμα Μαθηματικών, Σάμος (url: http://www.aegean.gr)
- **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ,**

ΚΕΦ 1ο, (1.1 & 1.4)

ΚΕΦ.2ο (2.1)

και από το 3ο ΚΕΦ μόνο το 3.1 (εύρεση και σχεδίαση κύκλου, όταν γνωρίζω το κέντρο του και την ακτίνα του)