Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση: Έστω ν ένας φυσικός. Τότε το άθροισμα είναι:

$$\nu+(\nu+1)+(\nu+2) = 3\nu+3 = 3\cdot\underbrace{(\nu+1)}_{\text{θέτω } \nu+1=\kappa,\ \text{φυσικός}}$$

Άρα το άθροισμα ισούται με 3κ, δηλαδή είναι πολ/σιο του 3.

Άσκηση 3: Αν $5|\alpha+7$ και $5|\beta-2$ τότε $\alpha+\beta=$ πολ5.

Το 5 διαιρεί το $\alpha+7$ και το 5 διαιρεί το $\beta-2$. Οπότε το $\alpha+7$ είναι πολλαπλάσιο του 5, δηλαδή το $\alpha+7$ γράφεται:

$\alpha+7 = 5\kappa_{(1)}$ όπου κ φυσικός.

Αντίστοιχα $\beta-2=5\lambda_{(2)}$ όπου λ φυσικός.

Προσθέτω σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχω:

$$\alpha+\beta+7-2 = 5\kappa+5\lambda \Rightarrow$$
$$\alpha+\beta+5 = 5\kappa+5\lambda \Rightarrow$$
$$\alpha+\beta = 5\kappa+5\lambda-5 \Rightarrow$$
$$\alpha+\beta = 5\cdot(\kappa+\lambda-1),\ \text{θέτω } \kappa+\lambda-1=\mu,\ \text{φυσικός.}$$

άρα $\alpha+\beta = 5\mu$, δηλαδή το $\alpha+\beta$ είναι πολ/σιο του 5.

Άσκηση 4: Ελέγξτε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων:

α) Το άθροισμα 4 διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολ/σιο του 4.

β) Το άθροισμα 5 διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολ/σιο του 5.

γ) Το άθροισμα 6 διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι πολ/σιο του 3.

Λύση:

α) $\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)=4\nu+6=4(\nu+1)+2$. Άρα δεν είναι πολ/σιο του 4. (δηλαδή δεν γράφεται στη μορφή $4\cdot\mu$ όπου μ κάποιος φυσικός)

β) $\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)+(\nu+4) = 5\nu+10 = 5\cdot(\nu+2) \overset{\text{θέτω } \nu+2=\mu}{=} 5\mu$. Άρα το άθροισμα είναι πολ/σιο του 5.

(2)

Θέτω $2\nu+5=\mu$.

γ) $\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)+(\nu+4)+(\nu+5)=6\nu+15=3\cdot(2\nu+5)=3\cdot\mu$

Άρα το άθροισμα είναι πολ/σιο του 3.

Άσκηση 5: Δίνονται α, β ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι $7|\alpha+5$ και $7|19-\beta$. Να δείξετε ότι $7|\alpha+\beta$.

Λύση:

Το 7 διαιρεί το α+5 άρα: $\alpha+5=7\cdot\kappa \ (1)$ όπου κ ακέραιος.

Το 7 διαιρεί το 19-β άρα: $19-\beta=7\cdot\lambda \ (2)$ όπου λ ακέραιος.

Αφαιρώ (1) και (2) κατά μέλη (για να σχηματίσω το α+β)

$\alpha+5-19+\beta=7\kappa-7\lambda \Rightarrow$

$\alpha+\beta-14=7\kappa-7\lambda \Rightarrow$

$\alpha+\beta=7\kappa-7\lambda+14 \Rightarrow$

$\alpha+\beta=7(\kappa-\lambda+2) \Rightarrow$ Θέτω $\kappa-\lambda+2=\mu$, ακέραιος.

$\alpha+\beta=7\mu$. Άρα: $7|\alpha+\beta$, αποδείχθηκε.

Άσκηση 6: Υπολογίστε με τρεις τρόπους (ευκλείδιο αλγόριθμο, γινόμενο πρώτων παραγόντων, εύρεση διαιρετών) το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:

α) 274 και 36

β) 63 και 84.

α) Λύση α' τρόπος - Ευκλείδιος Αλγόριθμος.

- $274=7\cdot 36+22$
- $36=1\cdot 22+14$

$22=1\cdot 14+8$

$14=1\cdot 8+6$

$8=1\cdot 6+2$

$6=3\cdot 2+0$. Ο ΜΚΔ είναι το τελευταίο, μη μηδενικό υπόλοιπο των διαιρέσεων, δηλαδή το 2.

Γράφω ΜΚΔ(274, 36) = 2.

③

a) β' τρόπος - Γινόμενο πρώτων παραγόντων:

Αναλύω το 274 και το 36 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

274	2
137	137
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

άρα $274 = 2 \cdot 137$. άρα $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Για να βρω ΜΚΔ, παίρνω μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη, δηλαδή το 2. Άρα ΜΚΔ(274, 36) = 2.

a) γ' τρόπος - Εύρεση διαιρετών:

- Διαιρέτες 36 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
- Διαιρέτες 274 = 1, 2, 137, 274.

Παρατηρώ ότι ο ΜΚΔ είναι το 2, ΜΚΔ(274, 36) = 2.

β). α' τρόπος - Ευκλείδιος Αλγόριθμος.

$84 = 1 \cdot 63 + 21$.

$63 = 3 \cdot 21 + 0$, ο ΜΚΔ είναι το τελευταίο, μη μηδενικό υπόλοιπο των διαιρέσεων δηλαδή το 21. , ΜΚΔ(63, 84) = 21.

β' τρόπος - Γινόμενο πρώτων παραγόντων:

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

63	3
21	3
7	7
1	

άρα. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ και $63 = 3^2 \cdot 7$.

Για να βρώ ΜΚΔ, παίρνω μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη, δηλαδή: $ΜΚΔ(84, 63) = 3 \cdot 7 = 21$.

γ' τρόπος: -Εύρεση διαιρετών.

• Διαιρέτες 84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

• Διαιρέτες 63: 1, 3, 7, 9, 21, 63.

Παρατηρώ ότι ο ΜΚΔ είναι το 21, άρα ΜΚΔ(84, 63) = 21.

Άσκηση 7: Υπολογίστε με ανάλυση πρώτων παραγόντων το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών: α) 18 και 375

β) 63 και 84.

γ) 1769 και 2378.

α) Αναλύω το 18 και το 375 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

18	2
9	3
3	3
1	

375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Άρα $18 = 2 \cdot 3^2$ και $375 = 3 \cdot 5^3$

• Για να βρω το ΜΚΔ παίρνω μόνο τους κοινούς παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη. άρα ΜΚΔ(18, 375) = 3.

• Για να βρω το ΕΚΠ παίρνω κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη. άρα ΕΚΠ(18, 375) $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 =$
$= 2.250$

β) Υπολογίσαμε το ΜΚΔ(63, 84) = 21, στην Άσκηση 6(β).
Με βοήθεια την ανάλυση πρώτων παραγόντων που έγινε στην άσκ. 6, οι αριθμοί γράφονται: $63 = 3^2 \cdot 7$ και $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

• Άρα το ΕΚΠ είναι ΕΚΠ(63, 84) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$.

γ) Αναλύω το 1769 και το 2378 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

1769	29		2378	2
61	61		1189	29
1			41	41
			1	

Άρα $1769 = 29 \cdot 61$ και $2378 = 2 \cdot 29 \cdot 41$

Ο $ΜΚΔ(1769, 2378) = 29$ και $ΕΚΠ(1769, 2378) = 2 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 41$
$= 145.058$.

Ασκηση 8 i) Στη συγκέντρωση τροφίμων για άπορες οικογένειες συγκεντρώθηκαν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Πόσα το πολύ ίδια δέματα μπορούν να γίνουν χωρίς να περισσέψει κανένα απ' τα τρόφιμα που συγκεντρώθηκαν;

ii) Τρεις αντιπρόσωποι μιας εταιρείας συνηθίζουν όταν επιστρέφουν από τα ταξίδια τους να τρώνε μαζί. Αν ο Α χρειάζεται 6 ημέρες για να καλύψει την περιοχή του, ο Β χρειάζεται 9 ημέρες και ο Γ 12 μέρες, να βρεθεί πόσο συχνά τρώνε μαζί.

Λύση:

i) Για να βρω το μέγιστο αριθμό δεμάτων που μπορούν να γίνουν, πρέπει να βρω το $ΜΚΔ(96, 72, 48)$. Για να τον υπολογίσω επιλέγω έναν από τους 3 τρόπους υπολογισμού, έστω ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

96	2		72	2		48	2
48	2		36	2		24	2
24	2		18	2		12	2
12	2		9	3		6	2
6	2		3	3		3	3
3	3		1			1	
1							

άρα $96 = 2^5 \cdot 3$ και $72 = 2^3 \cdot 3^2$ και $48 = 2^4 \cdot 3$

άρα $ΜΚΔ(96, 72, 48) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$ δέματα μπορούν να γίνουν.

ii) Πρέπει να βρω το ΕΚΠ (6, 9, 12). Με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οι αριθμοί γράφονται:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

άρα $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2$ και $12 = 2^2 \cdot 3$

και $ΕΚΠ(6,9,12) = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ μέρες.

άρα συναντιούνται κάθε 36 μέρες.

Άσκηση 9: Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε. Αν ναι, αποδείξτε τους.

(α) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 2.

(β) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

Λύση: (α) Έστω δύο διαδοχικοί ακέραιοι $α$, $α+1$.

• Αν ο $α$ είναι άρτιος, δηλαδή $α = 2κ$, $κ \in Z$, τότε:

$$α \cdot (α+1) = 2\underbrace{κ \cdot (2κ+1)}_{λ} = 2 \cdot λ, \text{ άρτιος.}$$

• Αν ο $α$ είναι περιττός, δηλαδή $α = 2κ+1$, $κ \in Z$, τότε:

$$α \cdot (α+1) = (2κ+1)(2κ+2) = 2 \cdot \underbrace{(2κ+1) \cdot (κ+1)}_{λ} = 2 \cdot λ, \text{ άρτιος}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση το γινόμενο δυο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιοι.

(β) Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείχθηκε ότι το γινόμενο αυτό ισούται σε κάθε περίπτωση με $2λ$. Άρα το γινόμενο διαιρείται με το 3 μόνο στην περίπτωση που το $λ$ διαιρείται με το 3.

Άρα αυτή η πρόταση (β) δεν ισχύει πάντοτε.

Άσκηση 10: Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε, ισχύουν μερικές φορές, δεν ισχύουν ποτέ. Αποδείξτε αυτούς που ισχύουν πάντοτε

α) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακέραιους αριθμούς διαιρεί και τη διαφορά τους.

β) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακέραιους αριθμούς, διαιρεί και το γινόμενό τους.

γ) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται από δύο άλλους, τότε διαιρείται και από το γινόμενό τους.

δ) Αν ένας ακέραιος διαιρείται από δύο άλλους, τότε διαιρείται και από το άθροισμά τους.

Λύση

α) Έστω $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$. Τότε γράφονται: $\beta = \kappa \cdot \alpha_{(1)}$ και $\gamma = \lambda \cdot \alpha_{(2)}$ όπου κ, λ ακέραιοι. Αφαιρώ (1), (2) κατά μέλη:

$$\beta - \gamma = \kappa\alpha - \lambda \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$\beta - \gamma = \alpha \cdot (\kappa - \lambda).$$ Θέτω $\kappa - \lambda = \mu$, ακέραιοι.

Άρα $\beta - \gamma = \alpha \cdot \mu \Rightarrow$.

$\alpha | \beta - \gamma$. Άρα η πρόταση ισχύει πάντοτε.

β) Έστω $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, δηλαδή $\beta = \kappa \cdot \alpha_{(1)}$ και $\gamma = \lambda \cdot \alpha_{(2)}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Πολ/ζω (1) ς' (2) κατα μέλη:

$$\beta \cdot \gamma = \kappa \cdot \lambda \cdot \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot (\kappa \cdot \lambda \cdot \alpha) \Rightarrow$$ Θέτω $\kappa \cdot \lambda \cdot \alpha = \mu$, ακέραιος.

$$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \mu. \Rightarrow$$

$\alpha | \beta \cdot \gamma$. Άρα η πρόταση ισχύει πάντοτε.

γ) Περίπτωση που ισχύει: Το 24 διαιρείται από το 3 και το 4, και διαιρείται και από το γινόμενο αυτών. (12)

Περίπτωση που δεν ισχύει: Το 36 διαιρείται από το 6 και το 9, αλλά δεν διαιρείται από το γινόμενό τους ($6 \cdot 9 = 54$)

Άρα η πρόταση ισχύει μερικές φορές.

δ) Περίπτωση που ισχύει: Το 36 διαιρείται από το 2 και το 4, και διαιρείται και από το άθροισμά τους (2+4=6)
Περίπτωση που δεν ισχύει: Το 36 διαιρείται από το 6 και το 9 αλλά δεν διαιρείται από το άθροισμά τους. (6+9=15)

Άρα η πρόταση ισχύει μερικές φορές.