**1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ**

1. Αν α,β,γ,δ ∈Ζ, α≠0, να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες (το σύμβολο α⏐β σημαίνει ότι ο α διαιρεί τον β):
2. α⏐β, β≠0 ⇒ $\left|α\right|\leq \left|β\right|$.
3. α⏐β και β⏐α ⇒ α = ±β.
4. α⏐β και α⏐γ ⇒ α⏐(χβ+ψγ), όπου χ,ψ∈Ζ.
5. α⏐β και γ⏐δ ⇒ αγ⏐βδ.
6. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε, ισχύουν μερικές φορές, δεν ισχύουν ποτέ. Αποδείξτε αυτούς που ισχύουν πάντοτε.

(α) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και τη διαφορά τους

(β) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το γινόμενο τους

(γ) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρεί δύο άλλους ακεραίους αριθμούς διαιρεί και το πηλίκο τους

(δ) Αν α είναι ένας ακέραιος αριθμός, τότε ο μόνο θετικός διαιρέτης του α και του α+1 είναι ο 1.

(ε) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται από δύο άλλους, τότε διαιρείται και από το γινόμενό τους.

(ζ) Αν ένας ακέραιος αριθμός διαιρείται από δύο άλλους, τότε διαιρείται και από το άθροισμά τους.

1. Δίνονται α, β ακέραιοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει ότι 7ǀ(α+5) και 7ǀ(19-β). Να δείξετε ότι 7ǀ(α+β).
2. Δίνεται ένας τριψήφιος αριθμός αβγ. Αποδείξτε για τον αριθμό αυτό το κριτήριο διαιρετότητας με το 3 (δηλαδή ότι ο αβγ διαιρείται με το 3 αν και μόνο αν το άθροισμα α+β+γ των ψηφίων του διαιρείται με το 3).
3. Ένας τριψήφιος αριθμός διαιρείται με το 37.

Α) Τι συμβαίνει για τους αριθμούς που προκύπτουν όταν αλλάξεις κυκλικά τη σειρά των ψηφίων του σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού; Για παράδειγμα αν ο αρχικός τριψήφιος είναι ο 296 παίρνω τους αριθμούς 296, 962, 629, 296. Διατυπώστε μια εικασία και ελέγξτε την ισχύ της.

Β) Ισχύει το ίδιο για τετραψήφιους αριθμούς;

Γ) αν έχουμε άλλους διαιρέτες άλλους από το 37 ισχύει η εικασία;

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε ν ∈ Ν\* ισχύει: 3⏐4ν – 1.
2. Υπολογίστε με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο το ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών:

α) 30 και 72.

β) 63 και 84.

γ) 1769 και 2378.

1. Υπολογίστε με ανάλυση πρώτων παραγόντων το ΜΚΔ και το ΕΚΠ των παρακάτω αριθμών:

α) 18 και 375.

β) 63 και 84.

γ) 1769 και 2378.

1. i) Στη συγκέντρωση τροφίμων για άπορες οικογένειες συγκεντρώθηκαν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Πόσα το πολύ ίδια δέματα μπορούν να γίνουν χωρίς να περισσέψει κανένα απ’ τα τρόφιμα που συγκεντρώθηκαν;

ii) Τρεις αντιπρόσωποι μίας εταιρείας συνηθίζουν όταν επιστρέφουν από τα ταξίδια τους να τρώνε μαζί. Αν ο Α χρειάζεται 6 ημέρες για να καλύψει την περιοχή του, ο Β χρειάζεται 9 ημέρες και ο Γ 12 ημέρες, να βρεθεί πόσο συχνά τρώνε μαζί.

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί ισχύουν πάντοτε. Αν ναι αποδείξτε τους.

(α) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 2.

(β) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

(γ) Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 3.

(δ) Το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων ότι διαιρείται με το 4.

1. Έστω α φυσικός αριθμός και ρ θετικός πρώτος αριθμός. Αν ρǀα2, να δείξετε ότι ρ2ǀα2.

Μπορούμε με βάση το προηγούμενο να δείξουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος;

[Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι $\sqrt{2}=\frac{κ}{λ}$ με (κ,λ)=1. Υψώστε στο τετράγωνο και οδηγηθείτε σε άτοπο].

1. Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με το 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.
2. Αν α,β ακέραιοι αριθμοί με (α,β)=1 (δηλαδή είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους), να δείξετε ότι:
3. (α+5β,β)=1.
4. (α, αβ+β)=1.