Ἀποδῶστε στή γλῶσσα Q χρησιμοποιώντας τό λεξιλόγιο:

a: Ἄννα
b: Βρασίδας
m: Μαρία.
F: ... μιλᾶ οὐαλλικά
G: ... εἶναι κορίτσι
L: .... ἀγαπᾶ....

1. Ἡ Ἄννα δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τή Μαρία.

$a = m$.

2. Ἐάν ἡ Ἄννα μιλᾶ Οὐαλλικά, καί ἡ Μαρία ὄχι, τότε εἶναι διαφορετικοί ἄνθρωποι

$(Fa \land \neg Fm) \rightarrow \neg a = m$

3. Ὅλοι ἐκτός ἀπό τήν Ἄννα ἀγαποῦν τόν Βασίλη

$\forall x(\neg x = a \rightarrow Lxb$.

4. Κάποιος ἄλλος ἀπό τόν Βρασίδα ἀγαπᾶ τήν Ἄννα.

$\exists x(Lxa \land \neg x = b)$

5. Μόνο ἡ Μαρία ἀγαπᾶ τόν Βρασίδα

$Lmb \land \forall x(Lxb \rightarrow x = m)$

6. Μόνο ἡ Ἄννα καί ὁ Βρασίδας ἀγαποῦν τή Μαρία

$Lam \land Lbm \land \forall x(Lxm \longrightarrow (x = a \lor x = b))$

8. Ἡ Ἄννα ἀγαπᾶ τό πολύ ἕνα πρόσωπο

$\forall x \forall y((Lax \land Lay) \rightarrow x = y)$

9. Τό πολύ ένα κορίτσι μιλά Ουαλλικά

$$\forall x \forall y \{[(Fx \wedge Gx) \wedge (Fy \wedge Gy)] \rightarrow x=y\}.$$

10. Όποιος αγαπά τη Μαρία δεν αγαπά καμμία άλλη

$\forall x\, (Lxm \rightarrow$ x δεν αγαπά κανέναν άλλο).

$\forall x\, (Lxm \rightarrow \forall y(\neg y=m \rightarrow \neg Lxy))$ ή ισοδύναμα.

$\forall x\, (Lxm \rightarrow \forall y(Lxy \rightarrow y=m))$.

11. Εάν ο Βρασίδας αγαπά κάποιον πού μιλά Ουαλλικά διαφορετικό από την Άννα, τότε αγαπά τη Μαρία.

$$\exists x\, (Lbx \wedge Fx \wedge \neg x=a) \rightarrow Lbm$$

12. Κάθε κορίτσι άλλο από την Άννα αγαπά κάποιον άλλον από τον Βρασίδα.

$$\forall x [(Gx \wedge \neg x=a) \rightarrow \exists y\, (Lxy \wedge \neg y=b)]$$

Αριθμητικοί ποσοδείκτες

1. Υπάρχει τό πολύ ένα F

$$\forall x \forall y [(Fx \wedge Fy) \rightarrow x=y]$$

2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα F

$$\exists x Fx.$$

3. Υπάρχει ακριβώς ένα F (δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα και τό πολύ ένα F)

$\exists x Fx \wedge \forall x \forall y [(Fx \wedge Fy) \rightarrow x=y]$ ή ισοδύναμα.

$\exists x\, [Fx \wedge \forall y\, (Fy \rightarrow y=x)]$ ή ισοδύναμα.

$\exists x \forall y\, (Fy \leftrightarrow y=x)$

4. Ὑπάρχουν τοὐλάχιστον δύο F

$$\exists x \exists y [(Fx \wedge Fy) \wedge \neg x = y]$$

5. Ὑπάρχουν τὸ πολὺ δύο F

$$\forall x \forall y \forall z \{[(Fx \wedge Fy) \wedge Fz] \longrightarrow [(x = y \vee y = z) \vee z = x]\}$$

6. Ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο F.
Αὐτὸ μεταφράζεται ὡς ἡ σύζευξη τοῦ 4 καὶ 5.
ἢ πιὸ σύντομα:

$$\exists x \exists y \{[(Fx \wedge Fy) \wedge \neg x = y] \wedge \forall z\, [Fz \longrightarrow (z = x \vee z = y)]\}$$

7. Ὑπάρχουν ἀκριβῶς τρία F

$$\exists x \exists y \exists z\ (\{[(Fx \wedge Fy) \wedge Fz] \wedge [(\neg x = y \wedge \neg y = z) \wedge \neg z = x]\} \wedge \forall w \{Fw \rightarrow (w = x \vee w = y) \vee w = z\})$$

Ὑποθέστε ὅτι συντομογραφοῦμε τὸ 3 ὡς $\exists_1 v Fv$, τὸ 6 ὡς $\exists_2 v Fv$ καὶ τὸ 7 ὡς $\exists_3 v Fv$.

Ἂς ἐξετάσουμε τὸν τύπο:

$$[(\exists_2 v Fv \wedge \exists_1 v Gv) \wedge \neg \exists x (Fx \wedge Gx)] \longrightarrow \exists_3 v (Fv \vee Gv)$$

Ὁ τύπος λέει ὅτι ἐὰν ὑπάρχουν δύο F καὶ ἕνα G καὶ τίποτα δὲν εἶναι F καὶ G, τότε ὑπάρχουν τρία ὄντα ποὺ εἶναι F ἢ G. Μὲ ἄλλα λόγια 2+1=3