ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ, ΙΙ

Κ. Δημητρακόπουλος
Τμήμα ΙΦΕ, ΕΚΠΑ

Το πρώτο μέρος των σημειώσεων ήταν αφιερωμένο στην ανάπτυξη και ιστορία της Λογικής από την αρχαιότητα μέχρι τον 14ο αιώνα. Αυτά που θα ακολουθήσουν αφορούν τη συνέχεια, δηλαδή την ανάπτυξη και ιστορία της στο χρονικό διάστημα από τον 19ο αιώνα μέχρι σήμερα.

Η περίοδος από τον 14ο μέχρι την αρχή του 19ου αιώνα θεωρείται φτωχή από τους ιστορικούς της Λογικής. Κατά την περίοδο αυτή κυκλοφόρησαν διάφορα εγχειρίδια Λογικής, αλλά δεν υπήρξαν σημαντικοί νεωτερισμοί. Ένα από τα δημοφιλέστερα ήταν το *Λογική, ή η τέχνη της σκέψης* (*Logic, or the art of thinking)* των Αντουάν Αρνώ (Antoine Arnaud, 1612-1694) και Πιέρ Νικόλ (Pierre Nicole, 1625-1695), το οποίο δημοσιεύθηκε το 1662, αλλά παρέμεινε σε χρήση μέχρι το 19ο αιώνα. Ένα άλλο σημαντικό έργο ήταν το *Νέον Όργανον* (*Novum Organum)* του Φράνσις Μπέϊκον (Francis Bacon, 1561-1626), που δημοσιεύθηκε το 1620 και φιλοδοξούσε να αποτελέσει το νέο *Όργανον*. Ο Μπέϊκον απέρριψε τη συλλογιστική του Αριστοτέλη, υπέρ μιας εναλλακτικής διαδικασίας, ουσιαστικά της *επαγωγικής συλλογιστικής*, η οποία στηρίζεται σε εμπειρικές παρατηρήσεις για να εξαγάγει (με επαγωγή) αξιώματα και άλλες προτάσεις.

Άλλα εγχειρίδια περιλαμβάνουν το *Ένα Σύστημα Λογικής* (*A System of Logic)* του Τζων Στιούαρτ Μιλ (John Stuart Mill, 1806-1873), το οποίο επηρέασε την άποψη για τη Λογική, οδηγώντας στο να θεωρηθεί για τα επόμενα πενήντα χρόνια ως κλάδος της Ψυχολογίας, ιδιαίτερα στη Γερμανία. Πράγματι, ο Γερμανός ψυχολόγος Βίλχελμ Βουντ (Wilhelm Wundt, 1832-1920) πίστευε ότι οι λογικοί νόμοι μπορούσαν να εξαχθούν από ψυχολογικούς νόμους της σκέψης, ενώ ο Γερμανός φιλόσοφος Κριστόφ φον Ζίγκβαρτ (Christoph von Sigwart, 1830-1904) θεωρούσε ότι η Λογική ήταν θεμελιωμένη στον καταναγκασμό του ατόμου να σκέφτεται με συγκεκριμένο τρόπο. Η ψυχολογική προσέγγιση της Λογικής θεωρήθηκε εντελώς απαράδεκτη από τον Γκότλομπ Φρέγκε (Gottlob Frege, 1848-1925) και τον Έντμουντ Χούσερλ (Edmund Husserl, 1859-1938), που υποστήριξε ότι η θεμελίωση της Λογικής στην Ψυχολογία επέτρεπε στους λογικούς νόμους να παραμένουν αναπόδεικτοι και οδηγούσε στο σκεπτικισμό και το σχετικισμό.

Ο Χέγκελ (Hegel, 1770-1831) έδωσε βασικό ρόλο στη Λογική στην *Εγκυκλοπαίδεια των Φιλοσοφικών Επιστημών* του, θεωρώντας ότι στο πλαίσιό της μεταβαίνουμε από την κατηγορία του "Τίποτε" στην κατηγορία του "Απόλυτου", η οποία περιέχει όλες τις κατηγορίες που προηγούνται. Όμως, η Λογική του, αντί να στοχεύει στην εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω συλλογιστικών τρόπων, επιδιώκει να δείξει ότι η σκέψη για μια έννοια μας οδηγεί στη σκέψη μιας άλλης έννοιας. Όπως υποστηρίζει, δεν είναι δυνατό να σκεφθούμε για την έννοια "ποιότητα" αγνοώντας την έννοια "ποσότητα". Η μέθοδος που θεωρεί ότι μας οδηγεί από μια σκέψη στην αντίθετή της, και στη συνέχεια σε περαιτέρω έννοιες, καλείται *Διαλεκτική*. Αν και η Λογική του Χέγκελ επηρέασε λίγο την κύρια κατεύθυνση των λογικών αναζητήσεων, επηρέασε αρκετά την ιστορία του κλάδου, συγκεκριμένα το έργο *Ιστορία της Λογικής στη Δύση* (*Geschichte der Logik im Abendland)* του Καρλ φον Πραντλ (Carl von Prantl, 1820-1888), καθώς και το έργο των Βρετανών ιδεαλιστών.

Από τα μέσα του 19ου αιώνα και μετά, η Λογική αναπτύχθηκε ραγδαία σε μια επιστήμη με έντονη επιρροή από τα Μαθηματικά. Οδηγηθήκαμε έτσι στην λεγόμενη *Συμβολική* ή *Μαθηματική Λογική*, με θεωρίες και αποτελέσματα που αποτελούν ορόσημα στην Επιστήμη, αλλά και γενικότερα στην πορεία του ανθρώπινου πνεύματος. Ως βασικές διαφορές μεταξύ της Λογικής αυτής της περιόδου και της παραδοσιακής Λογικής αναφέρουμε τις ακόλουθες

1. η μοντέρνα Λογική αποτελεί ένα λογισμό, οι κανόνες του οποίου καθορίζονται μόνο από τη μορφή και όχι τη σημασία των εκφράσεών του. Αυτό θεωρήθηκε σημαντικό πλεονέκτημα, αφού στην παραδοσιακή Λογική υπήρχαν πολλές ασάφειες, οι οποίες εξαφανίζονται όταν χρησιμοποιούνται μαθηματικά μέσα.
2. η μοντέρνα Λογική είναι κατασκευαστική παρά αφαιρετική, δηλαδή αντί να κάνει αφαιρέσεις που οδηγούν σε θεωρήματα εκκινώντας από τη φυσική γλώσσα (ή ψυχολογικές διαισθήσεις περί εγκυρότητας), κατασκευάζει θεωρήματα με τυπικές μεθόδους και στη συνέχεια ψάχνει για ερμηνείες τους στη φυσική γλώσσα.
3. η μοντέρνα Λογική είναι εξ ολοκλήρου συμβολική, αφού χρησιμοποιεί σύμβολα για όλες τις εκφράσεις, ενώ η παραδοσιακή

Λογική χρησιμοποίησε μεικτή γλώσσα (π.χ. στη Λογική του Αριστοτέλη τα σύμβολα-μεταβλητές αντιπροσώπευαν γενικούς όρους).

Για λόγους ευκολίας, ο Μποχένσκι (Bochenski, 1902-1995) διακρίνει τις ακόλουθες περιόδους ανάπτυξης της νεότερης Λογικής, επιτρέποντας μικρές (χρονικά) επικαλύψεις μεταξύ τους:

- *νηπιακή*, που διήρκεσε από τα μέσα του 17ου αιώνα μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα
- *αλγεβρική*, που διήρκεσε από τα μέσα του 19ου αιώνα μέχρι την αρχή του 20ου
- *λογικιστική*, που διήρκεσε από τα τέλη του 19ου αιώνα μέχρι περίπου τα τέλη της πρώτης δεκαετίας του 20ου αιώνα
- *μεταμαθηματική*, που διήρκεσε από το 1910 περίπου μέχρι το 1940
- *μεταπολεμική*, από τα τέλη της δεκαετίας του 1940 και μετά.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε όλες τις περιόδους αυτές, ανάλογα με τη σπουδαιότητα των εξελίξεων καθεμιάς.

Όπως αναφέραμε, ήδη από την εποχή του Λουλ, υπήρχε η ιδέα ότι η συλλογιστική θα μπορούσε να αναχθεί σε αμιγώς υπολογιστικές διαδικασίες. Στο έργο λογικών που ανήκαν στην ομάδα *Υπολογιστές της Οξφόρδης* (*Oxford Calculators*, 14ος αιώνας), εισήχθη η χρήση γραμμάτων αντί λέξεων, ενώ παρόμοια μέθοδος χρησιμοποιήθηκε και στο έργο *Μεγάλη Λογική* (*Logica Magna)* του Παύλου του Βενετού (Paul of Venice, 1368-1428). Περίπου τρεις αιώνες μετά τον Λουλ, ο Τόμας Χομπς (Thomas Hobbes, 1588-1679) ισχυρίστηκε ότι η συλλογιστική θα μπορούσε να αναχθεί στις μαθηματικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αυτή η ιδέα αναπτύχθηκε περίπου κατά τη νηπιακή περίοδο, καταρχήν από τον Γκότφριντ Β. Λάϊμπνιτς (Gottfried W. Leibniz, 1646-1706), ο οποίος υποστήριξε ότι η Λογική μπορεί να αναχθεί σε ένα συνδυαστικό λογισμό. Με αφορμή τη διαπίστωση ότι οι συνήθεις γλώσσες υπόκεινται σε “αμέτρητες ασάφειες”, πράγμα που τις κάνει ακατάλληλες για δημιουργία λογισμού, ο Λάϊμπνιτς πρότεινε τη δημιουργία

α) μιας *καθολικής χαρακτηριστικής* (*characteristica universalis*), δηλαδή ενός συμβολικού αλφαβήτου για θεμελιώδεις έννοιες, με σύνθεση των οποίων είναι δυνατό να εκφραστούν πολύπλοκες έννοιες, και

β) ενός *συλλογιστικού λογισμού* (*calculus ratiocinator*), δηλαδή ενός λογισμού συμβολικών εκφράσεων που θα ανήγαγε όλη τη Λογική στην εκτέλεση υπολογισμών, με βάση τους οποίους κάθε πρόβλημα θα οδηγείτο σε λύση.
Στο ίδιο πνεύμα, ο Ζ. Τ. Ζεργκόν (J. T. Gergonne, 1771-1859) είπε ότι η συλλογιστική δεν πρέπει κατ' ανάγκην να αφορά αντικείμενα για τα οποία έχουμε απόλυτα ξεκάθαρες ιδέες, αφού και οι αλγεβρικές πράξεις εκτελούνται χωρίς να έχουμε ξεκάθαρη εικόνα για τη σημασία των συμβόλων που χρησιμοποιούνται.

Ας έρθουμε τώρα στην αλγεβρική περίοδο, κατά την οποία διάφοροι λογικοί ασχολήθηκαν με την ανάπτυξη ενός λογισμού με αλγεβρικό χαρακτήρα, που θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε σύνολα, προτάσεις και πιθανότητες. Το 1847 δημοσιεύθηκαν δύο έργα για αυτό το αντικείμενο, δηλαδή το *Μαθηματική Ανάλυση της Λογικής* (*Mathematical Analysis of Logic)* του Τζ. Μπουλ (G. Boole, 1779-1848) και το *Τυπική Λογική* (*Formal Logic)* του Α. Ντε Μόργκαν (A. de Morgan, 1806-1871). Η βασική ιδέα και των δύο ήταν ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλγεβρικοί τύποι για να εκφραστούν λογικές σχέσεις. Στην ίδια κατεύθυνση ήταν το έργο *Συμβολική Λογική* (*Symbolic Logic)* του Τζ. Βεν (J. Venn, 1834-1923), ο οποίος χρησιμοποίησε διαγράμματα για να εκφράσει σχέσεις μεταξύ συνόλων ή αληθοσυναρτησιακές συνθήκες μεταξύ προτάσεων. Κάποια ελαττώματα του συστήματος του Μπουλ διορθώθηκαν από μεταγενέστερους λογικούς, π.χ. στο έργο *Καθαρή Λογική, ή η Λογική της Ποιότητας εκτός από την Ποσότητα* (*Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity)*, που δημοσίευσε ο Γ. Σ. Τζέβονς (W. S. Jevons, 1835-1882) το 1864, και στο *Διαλέξεις περί της Άλγεβρας της Λογικής* (*Vorlesungen über die Algebra der Logik)* του Ε. Σρέντερ (E. Schröder, 1841-1902).

Προχωρούμε τώρα στη λογικιστική περίοδο, η οποία άρχισε το 1879, όταν δημοσιεύθηκε το έργο του Γκότλομπ Φρέγκε (Gottlob Frege, 1848-1925) με τίτλο *Εννοιογραφία* (*Begriffsschrift)* και υπότιτλο *Μία Τυπική Γλώσσα για καθαρή Σκέψη με πρότυπο εκείνη της Αριθμητικής* (*Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens)*. Το έργο αυτό συνέβαλε καθοριστικά στην εξέλιξη της (Μαθηματικής) Λογικής, όντας πρωτοπόρο για την εποχή του. Ο Φρέγκε πίστευε ότι τα Μαθηματικά ανάγονται στη Λογική και υποστήριξε τη θέση του κατασκευάζοντας ένα λογικό σύστημα που υπερέβαινε τόσο αυτό του Αριστοτέλη, όσο και εκείνο των Στωϊκών. Ουσιαστικά το σύστημά του είναι αυτό που στη νεότερη εποχή καλείται *Κατηγορηματική (Predicate)* ή *Πρωτοβάθμια (First-Order) Λογική,* στο πλαίσιο του οποίου γίνεται εντελώς σαφής η έννοια της ποσόδειξης. Πράγματι, στην παραδοσιακή λογική, η πρόταση "Ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος" και η πρόταση "Κάθε Αθηναίος είναι φιλόσοφος" θεωρούνται της ίδιας μορφής, παρόλο που η πρώτη είναι *ενική*, ενώ η δεύτερη είναι *γενική*. Ο Φρέγκε διαφώνησε με την άποψη αυτή, παρατηρώντας ότι η πρόταση "Ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος" είναι απλή, ενώ η πρόταση "Κάθε Αθηναίος είναι φιλόσοφος" είναι σύνθετη. Συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με Α(.) τον γενικό όρο "Αθηναίος", με Φ(.) τον γενικό όρο "φιλόσοφος", με σ το άτομο "Σωκράτης" και με χ το τυχόν στοιχείο του "σύμπαντος αναφοράς", η πρώτη πρόταση συμβολίζεται με $\Phi(\sigma)$, ενώ η δεύτερη με $(\forall\chi)(A(\chi) \rightarrow \Phi(\chi))$, όπου το σύμβολο $\forall$ αντιστοιχεί στον καθολικό ποσοδείκτη, δηλαδή στην έκφραση «κάθε», και το σύμβολο $\rightarrow$ αντιστοιχεί στη συνεπαγωγή, δηλαδή στην έκφραση «αν ... ,τότε ...». Η υπεροχή του συμβολισμού του Φρέγκε είναι ακόμη εντονότερη, όταν έχουμε προτάσεις που περιέχουν πολλαπλή ποσόδειξη, η οποία θα ήταν συγκεχυμένη, αν όχι απαράδεκτη, στο παραδοσιακό πλαίσιο. Ας πάρουμε, π.χ., την πρόταση «Κάθε άνθρωπος έχει κάποιον πατέρα». Ενώ η παραδοσιακή λογική έχει δυσκολία να χειριστεί την ποσόδειξη που υποδηλώνει η έκφραση «κάποιον», με το συμβολισμό του Φρέγκε η πρόταση γράφεται

$$(\forall\chi)[A(\chi) \rightarrow (\exists\psi)(A(\psi)\ \&\ \Pi(\psi,\chi))],$$

όπου με Α(.) συμβολίζεται ο γενικός όρος «άνθρωπος», με Π(.,.) η (διμελής) σχέση «πατέρας» και με $\exists$ ο υπαρκτικός ποσοδείκτης, δηλαδή η έκφραση «κάποιος».

Ένας από τους βασικούς στόχους που έθεσε ο Φρέγκε ήταν να δείξει ότι μπορούμε να απαλλαγούμε από τη διαίσθηση στα Μαθηματικά. Πίστευε ότι τα διαισθητικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις μπορούν να αντιπροσωπευθούν από ένα μικρό αριθμό μη λογικών αρχών (ή αξιωμάτων), έτσι ώστε οι μαθηματικές αποδείξεις να κατασκευάζονται, από αυτές τις αρχές, μόνο με χρήση λογικών κανόνων. Ειδικότερα, πίστευε ότι η Αριθμητική αποτελεί μέρος της Λογικής και μάλιστα δεν απαιτεί καθόλου μη λογικές αρχές, πράγμα που προσπάθησε να αποδείξει στα έργα του *Θεμέλια της Αριθμητικής* (*Die Grundlagen der Arithmetik,* 1884) και *Θεμελιώδεις Νόμοι της Αριθμητικής* (*Grundgesetze der Arithmetik*, τ. I, 1893 και τ. II, 1903). Τα περισσότερα αξιώματα που χρησιμοποιούνται στα έργα αυτά προέρχονται ουσιαστικά από την *Εννοιογραφία*, αλλά υπάρχει και ένα νέο, που το ονόμασε *Βασικό Νόμο V* (*Basic Law V*). Το εγχείρημα του Φρέγκε κινδύνευσε να καταστραφεί ολοκληρωτικά, όταν ο Μπέρτραντ Ράσελ (Bertrand Russell, 1872-1970) εντόπισε ένα παράδοξο, λίγο πριν εκδοθεί ο δεύτερος τόμος των *Θεμελιωδών Νόμων της Αριθμητικής* (1903). Ο Φρέγκε αναγκάστηκε να προσθέσει ένα παράρτημα στο έργο του, όπου εξηγούσε πώς προέκυπτε το παράδοξο από το Βασικό Νόμο V, προσθέτοντας ότι αυτό έδειχνε την ανάγκη τροποποίησης του νόμου αυτού.

Όπως ήταν φυσικό, η ανακάλυψη του παραδόξου του Ράσελ προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση και ανησυχία. Ακολούθησαν διάφορες προσπάθειες να ξεπεραστεί η κρίση που δημιουργήθηκε, μέσω της κατασκευής στέρεων θεμελίων για την Αριθμητική και, γενικότερα, τα Μαθηματικά.

Μία από τις προσπάθειες που έγιναν οφείλεται στην Ράσελ και το συνεργάτη του Άλφρεντ Νορθ Ουάϊτχεντ (Alfred North Whitehead, 1861-1947), οι οποίοι κατέβαλαν μεγάλη προσπάθεια για τη δημιουργία της *θεωρίας τύπων* (*theory of types*), με την βοήθεια της οποίας ήλπιζαν ότι θα έφερναν σε πέρας το πρόγραμμα του λογικισμού. Με τη θεωρία αυτή ασχολήθηκαν στο τρίτομο έργο τους *Αρχές των Μαθηματικών* (*Principia Mathematica*), το οποίο εκδόθηκε την περίοδο 1910-1913. Σύμφωνα με τη θεωρία τύπων, τα σύνολα εντάσσονται σε μια ιεραρχία, με συνέπεια ερωτήματα που αφορούν τη σχέση του *ανήκειν* να έχουν νόημα μόνον όταν αφορούν το κατά πόσον ένα σύνολο χαμηλότερου τύπου ανήκει σε ένα σύνολο υψηλότερου τύπου και, τελικά, να αποφεύγεται το παράδοξο του Ράσελ.

Η δεύτερη προσπάθεια θεμελίωσης των Μαθηματικών, ώστε να μην προκύπτει το παράδοξο του Ράσελ, έγινε από τον Ερνστ Ζερμέλο (Ernst Zermelo, 1871-1953). Ο Ζερμέλο εισήγαγε το 1908 ένα σύστημα αξιωμάτων για τη θεωρία συνόλων, στο πλαίσιο του οποίου δεν είναι δυνατό να αναπαραχθεί το παράδοξο του Ράσελ. Πράγματι, αντί για τη γενική *αρχή συμπερίληψης* (*comprehension principle*), σύμφωνα με την οποία κάθε ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο, ο Ζερμέλο υιοθέτησε το *σχήμα του διαχωρισμού* (*separation schema*), σύμφωνα με το οποίο, δεδομένου ενός συνόλου X και μιας ιδιότητας P, υπάρχει το σύνολο των μελών του X που ικανοποιούν την ιδιότητα P. Το 1922, ο Άντολφ Φρένκελ (Adolf Fraenkel, 1891-1965) βελτίωσε το σύστημα του Ζερμέλο κι έτσι δημιουργήθηκε η θεωρία συνόλων Ζερμέλο-Φρένκελ (παρόμοιο έργο έκανε, ανεξάρτητα, ο Θόραλφ Σκόλεμ, Thoralf Skolem, 1887-1963).

Πριν περάσουμε στη μεταμαθηματική περίοδο, πρέπει να σημειώσουμε ότι, κατά την περίοδο του λογικισμού, υπήρξε έντονη δραστηριότητα από μέλη της *μαθηματικής σχολής*, όπως ο Ρίχαρντ Ντέντεκιντ (Richard Dedekind, 1831-1916), ο Τζουζέπε Πεάνο (Giuseppe Peano, 1858-1932) και ο Ντάβιντ Χίλμπερτ (David Hilbert, 1862-1943). Η έρευνα που πραγματοποιήθηκε από μέλη της σχολής αυτής είχε ως στόχο την κατασκευή και μελέτη αξιωματικών συστημάτων για διάφορες περιοχές των Μαθηματικών, όπως η Αριθμητική, η Γεωμετρία και η Ανάλυση.

Ο Χίλμπερτ χρησιμοποίησε τον όρο *Μεταμαθηματικά* για να αναφερθεί στη μελέτη των Μαθηματικών με χρήση μαθηματικών μεθόδων. Τα Μεταμαθηματικά συνδέθηκαν στενά με τη Μαθηματική Λογική, σε βαθμό που οι δύο όροι να χρησιμοποιηθούν ως συνώνυμοι για αρκετά χρόνια. Οι πρώτες αναφορές στα Μεταμαθηματικά έγιναν στο πλαίσιο του *Προγράμματος του Χίλμπερτ*, δηλαδή του προγράμματος που κατέστρωσε ο Χίλμπερτ για την αντιμετώπιση της κρίσης θεμελίων, που προκλήθηκε από την ανακάλυψη παραδόξων, όπως το παράδοξο του Ράσελ. Ο βασικός στόχος του προγράμματος αυτού ήταν να αποδειχθεί ότι τα κύρια μαθηματικά συστήματα, π.χ. αυτό της *Πραγματικής Ανάλυσης*, είναι *συνεπή*, δηλαδή αποκλείεται να οδηγήσουν κάποτε σε αντίφαση. Σύμφωνα με το Χίλμπερτ, η συνέπεια των βασικών συστημάτων για διάφορες περιοχές των Μαθηματικών ανάγεται στη συνέπεια της Αριθμητικής, δηλαδή του συστήματος αξιωμάτων που αφορούν τους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους.

Κατά τη διάρκεια της διάλεξής του στο Δεύτερο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, που πραγματοποιήθηκε στο Παρίσι τον Αύγουστο 1900, ο Χίλμπερτ έθεσε 23 μαθηματικά προβλήματα, που πίστευε ότι αποτελούσαν μεγάλη πρόκληση για τους ερευνητές του αιώνα που άρχιζε. Το 2ο από τα προβλήματα αυτά αφορούσε τη συνέπεια της Αριθμητικής, συγκεκριμένα του αξιωματικού συστήματος για τους φυσικούς αριθμούς που είχε επικρατήσει εκείνη την εποχή, που έγινε γνωστό αργότερα ως *Αριθμητική Πεάνο* (*Peano Arithmetic*), επειδή τα αξιώματά του προτάθηκαν από τον Πεάνο το 1889 (παρόμοια αξιώματα είχαν προταθεί από τον Ντέντεκιντ το 1888).

Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα της μεταμαθηματικής περιόδου ήταν το *Θεώρημα Πληρότητας* (*Completeness Theorem*), που απέδειξε ο Κουρτ Γκέντελ (Kurt Gödel, 1906-1978) το 1929. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, που απετέλεσε τον κορμό της διδακτορικής του διατριβής, για κάθε πρόταση της Κατηγορηματικής Λογικής, η πρόταση είναι αποδείξιμη από τα αξιώματα της λογικής αυτής εάν και μόνο εάν η πρόταση είναι λογικά έγκυρη, δηλαδή αληθεύει για κάθε *ερμηνεία* (*interpretation*) της λογικής αυτής. Στη συνέχεια, ο Γκέντελ ασχολήθηκε με την επίλυση του 2ου προβλήματος του Χίλμπερτ και έτσι προέκυψαν τα *Θεωρήματα Μη Πληρότητας* (*Incompleteness Theorems*), δύο θεωρήματα-ορόσημα, που αποδείχθηκαν στην εργασία του *Περί τυπικά μη αποκρίσιμων προτάσεων των Αρχών των Μαθηματικών και παρεμφερών συστημάτων I* (*Űber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Syste-me I*), που δημοσιεύθηκε το 1930.

Σύμφωνα με το πρώτο από αυτά, κάθε σύστημα S που έχει *αναδρομικό* σύνολο αξιωμάτων και είναι συνεπές είναι *μη πλήρες*, δηλαδή υπάρχει πρόταση (της γλώσσας του συστήματος) που ούτε αυτή ούτε η άρνησή της είναι αποδείξιμη στο S. Ως πόρισμα του θεωρήματος αυτού, έπεται ότι υπάρχει πρόταση για τους φυσικούς αριθμούς που είναι αληθής, αλλά δεν είναι αποδείξιμη από την Αριθμητική Πεάνο. Το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας λέει ότι για κάθε σύστημα S όπως παραπάνω, αν το S αποδεικνύει μερικές βασικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών, τότε το S δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπειά του. Ως πόρισμα του θεωρήματος αυτού, έπεται ότι η Αριθμητική Πεάνο δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπειά της. Κατά συνέπεια, το 2ο πρόβλημα του Χίλμπερτ έχει αρνητική λύση, δηλαδή το πρόγραμμα του Χίλμπερτ δεν είναι δυνατό να εκτελεστεί επιτυχώς.

Ένας άλλος σημαντικός λογικός της περιόδου ήταν ο Άλφρεντ Τάρσκι (Alfred Tarski, 1901-1983), που ξεκίνησε την ερευνητική του πορεία στην Πολωνία, αλλά την ολοκλήρωσε στις ΗΠΑ. Ο Τάρσκι είναι γνωστός κυρίως για τον ορισμό των εννοιών της *λογικής αλήθειας* και της *λογικής συνεπαγωγής*, τις οποίες εισήγαγε το 1933 στο άρθρο του *Η έννοια της αλήθειας σε τυποποιημένες γλώσσες* (*The concept of truth in formalized languages*), στο οποίο ανέλυσε τη σημασιολογική θεωρία αλήθειας. Η θεωρία αυτή στηρίζεται στο διαχωρισμό μεταξύ της *γλώσσας-αντικείμενο*, δηλαδή της γλώσσας που περιέχει την πρόταση που εξετάζουμε αν είναι ή όχι αληθής, και της *μετα-γλώσσας*, δηλαδή της γλώσσας εντός της οποίας αναφερόμαστε στην αλήθεια της πρότασης. Η θεωρία του Τάρσκι είχε μεγάλη επίδραση στη Λογική και στη Φιλοσοφία, ειδικότερα στην ανάπτυξη του κλάδου της Λογικής που καλείται *Θεωρία Προτύπων* (*Model Theory*). Ο Τάρσκι πραγματοποίησε σημαντικό έργο και στον κλάδο της μεθοδολογίας των αξιωματικών συστημάτων, ειδικότερα σχετικά με ερωτήματα που αφορούν την πληρότητα και τη συνέπεια τέτοιων συστημάτων.

Σημαντικό έργο κατά τη διάρκεια της ίδιας περιόδου πραγματοποίησε και ο Γκέρχαρτ Γκέντσεν (Gerhard Gentzen, 1909-1945), θεμελιώνοντας τον κλάδο της Λογικής που καλείται *Θεωρία Αποδείξεων* (*Proof Theory*). Συγκεκριμένα, ο Γκέντσεν ανέπτυξε συστήματα *φυσικής παραγωγής* (*natural deduction*) και τον *λογισμό ακολουθητών* (*sequent calculus*), τα οποία χρησιμοποιήθηκαν πολύ αργότερα στη Θεωρητική Πληροφορική. Τα συστήματα φυσικής παραγωγής αναπαριστούν αποδεικτικούς κανόνες που χρησιμοποιούμε «φυσικά», ενώ ο λογισμός ακολουθητών ξεκαθαρίζει τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται αποδείξεις στο πλαίσιο οποιουδήποτε τυπικού συστήματος.

Την ίδια εποχή, ο Λ.Ε.Τζ. Μπράουερ (L.E.J. Brouwer, 1881-1966) εφεύρε την *Ιντουϊσιονιστική* ή *Ενορατική Λογική* (*Intuitionistic Logic*), σε μια εξέλιξη που επεδίωκε να προσφέρει μια εναλλακτική πρόταση για το ξεπέρασμα των παραδόξων, όπως το παράδοξο του Ράσελ (υπενθυμίζουμε ότι οι άλλες προτάσεις ήταν η Θεωρία Συνόλων Ζερμέλο-Φρένκελ και η Θεωρία των Τύπων του Ράσελ). Παρά το αρχικά μεγάλο ενδιαφέρον που προσέλκυσε η Ιντουϊσιονιστική Λογική, δεν έγινε αποδεκτή από το μεγαλύτερο μέρος των λογικών και μαθηματικών, αφού απέρριπτε αρχές που είχαν γίνει αποδεκτές επί πολλούς αιώνες, όπως την *Αρχή της Αποκλείσεως του Τρίτου* (*Law of the Excluded Middle*, *Tertium Non Datur*).

Δυο άλλοι λογικοί της μεταμαθηματικής περιόδου, που ακολούθησαν ρηξικέλευθους δρόμους στην έρευνά τους, υπήρξαν ο Αλόνζο Τσερτς (Alonzo Church, 1903-1995) και ο Άλαν Τιούρινγκ (Alan Turing, 1912-1954). Ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, οι Τσερτς και Τιούρινγκ θεμελίωσαν την *Θεωρία Υπολογισμού* (*Computation Theory* ή *Computability Theory*), δηλαδή τον κλάδο της Λογικής που ασχολείται με τη μελέτη των αναδρομικών συναρτήσεων και παρεμφερών εννοιών. Η έννοια της αναδρομικότητας προέκυψε ουσιαστικά από το έργο που έκανε ο Γκέντελ για τα θεωρήματα μη πληρότητας. Περίπου μια πενταετία μετά την απόδειξη των θεωρημάτων αυτών, έγινε σαφές ότι υπήρχε ανάγκη για τη θεμελίωση της έννοιας της *υπολογισιμότητας*, πράγμα που πέτυχαν οι Τσερτς και Τιούρινγκ. Η προσέγγιση του πρώτο οδήγησε σε αυτό που αργότερα ονομάστηκε *λ-λογισμός*, ενώ του δεύτερου σε αυτό που ονομάστηκε *Θεωρία Μηχανών Τιούρινγκ*. Με βάση τα μοντέλα υπολογισμού τους, οι Τσερτς και Τιούρινγκ έδωσαν, ανεξάρτητα, λύση στο *Πρόβλημα Απόφασης* (*Entscheidungsproblem*) του Χίλμπερτ, δηλαδή απέδειξαν ότι δεν υπάρχει αλγοριθμική διαδικασία, με βάση την οποία μπορούμε να αποκρινόμαστε αν η τυχούσα (τυπική) πρόταση είναι αληθής ή όχι. Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι, όχι μόνο η προσέγγιση του Τσερτς ήταν ισοδύναμη αυτής του Τιούρινγκ, αλλά όλες οι προσεγγίσεις που προτάθηκαν μετέπειτα ήταν ισοδύναμες με τις αρχικές. Για το λόγο αυτό, έχει γίνει ευρέως αποδεκτή η *Θέση Τσερτς-Τιούρινγκ* (*Church-Turing Thesis*), σύμφωνα με την οποία η διαισθητική έννοια της υπολογίσιμης συνάρτησης ταυτίζεται με την αυστηρή έννοια της αναδρομικής συνάρτησης.

Ας έρθουμε τώρα στην τελευταία περίοδο της ιστορίας της Λογικής, δηλαδή αυτή που αφορά τις εξελίξεις μετά τον $2^{ο}$ παγκόσμιο πόλεμο. Η Λογική διαχωρίστηκε σε τέσσερις υποπεριοχές, δηλαδή τη *Θεωρία Συνόλων (Set Theory)*, τη *Θεωρία Προτύπων (Model Theory)*, τη *Θεωρία Αποδείξεων* (*Proof Theory*) και τη *Θεωρία Υπολογισμού*.

Η Θεωρία Συνόλων ξεκίνησε ουσιαστικά με το έργο των Ζερμέλο και Φρένκελ. Μετά την επικράτηση του συστήματος αξιωμάτων Ζερμέλο-Φρένκελ, μεγάλο μέρος της έρευνας αφιερώθηκε σε ερωτήματα που αφορούσαν το *Αξίωμα Επιλογής* (*Axiom of Choice*) και την *Υπόθεση του Συνεχούς* (*Continuum Hypothesis*). Χρησιμοποιώντας την έννοια του *κατασκευάσιμου σύμπαντος* (*constructible universe*), ο Γκέντελ απέδειξε ότι οι αρχές αυτές ήταν συνεπείς με τα αξιώματα Ζερμέλο-Φρένκελ, στο ιστορικό άρθρο του *Συνέπεια του αξιώματος επιλογής και της γενικευμένης υπόθεσης του συνεχούς με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων* (*Consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*), που δημοσιεύθηκε το 1940. Περίπου 20 χρόνια αργότερα, ο Πωλ Κοέν (Paul Cohen, 1934-2007) εφεύρε τη μέθοδο του *εξαναγκασμού* (*forcing*), με χρήση της οποίας απέδειξε ότι η άρνηση του Αξιώματος Επιλογής και της Υπόθεσης του Συνεχούς είναι επίσης συνεπείς με τα αξιώματα Ζερμέλο-Φρένκελ. Με συνδυασμό των αποτελεσμάτων των Γκέντελ και Κοέν, προκύπτει ότι το Αξίωμα Επιλογής και η Υπόθεση του Συνεχούς είναι αρχές *ανεξάρτητες* από τα αξιώματα Ζερμέλο-Φρένκελ.

Όπως προαναφέραμε, η Θεωρία Προτύπων ξεκίνησε με το έργο του Τάρσκι, ο οποίος δημοσίευσε σειρά άρθρων με γενικό τίτλο *Συνεισφορές στη Θεωρία Προτύπων*

(*Contributions to the theory of models*). Σπουδαία μορφή στη συνέχεια υπήρξε ο Αβραάμ Ρόμπινσον (Abraham Robinson, 1918-1974), στον οποίο οφείλεται η εφεύρεση της *Μη-Συμβατικής Ανάλυσης* (*Non-Standard Analysis*), δηλαδή της θεωρίας στην οποία θεμελιώνεται αυστηρά η έννοια του *απειροστού* (*infinitesimal*), που είχε χρησιμοποιηθεί από τον Λάϊμπνιτς.

Η Θεωρία Υπολογισμού είχε ως αφετηρία το έργο των Τσερτς και Τιούρινγκ. Μεγάλη ήταν η συνεισφορά στην περιοχή αυτή των Εμίλ Ποστ (Emil Post, 1897-1954) και Στήβεν Κλίνι (Stephen C. Kleene, 1909-1994), οι οποίοι επέκτειναν την προβληματική της, εισάγοντας την έννοια του *αφηρημένου υπολογισμού (abstract computation)*, καθώς και την έννοια του *βαθμού ανεπιλυσιμότητας (degree of unsolvability)*. Μεγάλη πρόοδος στη θεωρία βαθμών ανεπιλυσιμότητας επετεύχθη τη δεκαετία του 1950, με την εισαγωγή της *μεθόδου προτεραιότητας* (*priority method*) από τον Άλμπερτ Μούχνικ (Albert Muchnik, 1934-2019) και, ανεξάρτητα, τον Ρίτσαρντ Φρίντμπεργκ (Richard Friedberg, 1935 -).

Βασική κατεύθυνση έρευνας στη Θεωρία Αποδείξεων υπήρξε η μελέτη της σχέσης των *Κλασικών Μαθηματικών*, δηλαδή των Μαθηματικών με υπόβαθρο την κλασική, δίτιμη λογική, και των *Ιντουϊσιονιστικών Μαθηματικών*, δηλαδή των Μαθηματικών με υπόβαθρο την ιντουϊσιονιστική λογική. Η σχέση αυτή ξεκαθαρίστηκε μέσω της *ερμηνείας Dialectica (Dialectica interpretation)* του Γκέντελ και της μεθόδου *πραγματοποιησιμότητας* (*realizability*) που εισήγαγε το 1945 ο Κλίνι. Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον θέμα στη Θεωρία Αποδείξεων υπήρξε η *αντιστοιχία Κάρυ-Χάουαρντ* (*Curry-Howard correspondence*), που αφορά την αναλογία μεταξύ τυπικών αποδείξεων και υπολογιστικών προγραμμάτων.

Τελειώνοντας, πρέπει να σημειώσουμε ότι, κατά τη διάρκεια της περιόδου αυτής, ιδέες και μέθοδοι της Λογικής εφαρμόστηκαν, με αυξανόμενη συχνότητα και βαρύτητα, τόσο στη Φιλοσοφία, όσο και στη Θεωρητική Πληροφορική.

Η Λογική έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της Νεότερης Φιλοσοφίας, ιδιαίτερα σε σχέση με σχολές όπως ο Κύκλος της Βιέννης, ο Νεο-ποζιτιβισμός και η Αναλυτική Φιλοσοφία. Αρχικά ήταν το έργο των Φρέγκε και Ράσελ που επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τη Φιλοσοφία, ενώ καθοριστική ήταν η επίδραση του έργου που πραγματοποιήθηκε στη Λογική κατά τη “χρυσή δεκαετία” 1930-1940. Κατά την περίοδο 1940-1960, η Λογική αποτέλεσε μέθοδο λειτουργίας στη Φιλοσοφία, μέσω του έργου των φιλοσόφων Ρούντολφ Κάρναπ (Rudolf Carnap,1891-1970), Χανς Ράϊχενμπαχ (Hans Reichenbach, 1891-1953) και Γουίλαρντ Κουάϊν (Willard Quine, 1908-2000). Στη συνέχεια, δημιουργήθηκε η ερευνητική περιοχή που καλείται *Φιλοσοφική Λογική*, στην οποία ξεχώρισε το έργο των Γιάακο Χιντίκα (Jaako Hintikka, 1929-2015), Μάϊκλ Ντάμετ (Michael Dummett, 1925-2011) και Σαούλ Κρίπκε (Saul Kripke, 1940-).

Οι *Τροπικές Λογικές* (*Modal Logics*) αποτελούν επεκτάσεις της κλασικής λογικής, που προκύπτουν όταν προστεθούν τελεστές που αντιστοιχούν στις έννοιες «αναγκαίος», «δυνατός» κτλ. Η *σημασιολογία των δυνατών κόσμων* (*possible worlds semantics*) που εφεύρε ο Κρίπκε, έχει επηρεάσει βαθιά την Αναλυτική Φιλοσοφία. Οι *Δεοντικές Λογικές* (*Deontic Logics*), που σχετίζονται στενά με τις Τροπικές, επιχειρούν να συλλάβουν την έννοια του «δέοντος» και παρεμφερείς έννοιες. Η *Χρονική Λογική* (*Tense Logic*) αποτελεί μια άλλη επέκταση της Κλασικής Λογικής, που αναπτύχθηκε κυρίως από το φιλόσοφο Άρθουρ Πράϊορ (Arthur Prior, 1914-1969) κατά τη δεκαετία του 1960, με σκοπό να αναπαρασταθούν τελεστές που αναφέρονται στο χρόνο.

Η επίδραση της Λογικής στη Θεωρητική Πληροφορική εκτείνεται σε πολλές περιοχές της δεύτερης. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι λογικά εργαλεία και μέθοδοι χρησιμοποιούνται

- στην *Περιγραφική Πολυπλοκότητα* (*Descriptive Complexity*), δηλαδή στην περιοχή που έχει ως στόχο τον χαρακτηρισμό κλάσεων πολυπλοκότητας συναρτήσεων μέσω του τύπου της λογικής που απαιτείται για να εκφραστούν οι γλώσσες που ανήκουν στις κλάσεις αυτές
- στο *Λογικό Προγραμματισμό* (*Logic Programming*), δηλαδή στην περιοχή που αφορά τη χρήση λογικών προτάσεων για την αναπαράσταση προγραμμάτων και την εκτέλεση υπολογισμών
- στις *Τυπικές Μεθόδους* (*Formal Methods*), δηλαδή στην περιοχή που έχει ως στόχο την εξειδίκευση, ανάπτυξη και επαλήθευση λογισμικού.

Βιβλιογραφία

1. Δ. Α. Αναπολιτάνος (επιμ.): *Στιγμές και διάρκειες, Δεκατρία κείμενα φιλοσοφίας και ιστορίας των μαθηματικών και της λογικής*, Νεφέλη, 2009.

2. Κ. Δημητρακόπουλος: «Αριστοτέλεια Λογική και Leibniz», στο Μ. Μουζάλα (επιμ.), *Θέματα Οντολογίας-Μεταφυσικής, Φιλοσοφίας των Μαθηματικών και της Λογικής, Τιμητικός τόμος in memoriam Δ. Μούκανου*, Gutenberg, 2018, 141-172.

3. Γ. Κολέτσος: «Λογική και Πληροφορική ή Αποδείξεις και Προγράμματα», στο Δ. Α. Αναπολιτάνος (επιμ.), *Στιγμές και διάρκειες*, Νεφέλη, 2009, 165-189.

4. I. M. Bochenski: *Formale Logik*, Orbis Academicus, 1956 (translated in English as *A history of formal logic* by I. Thomas and published by University of Notre Dame Press, 1961).

5. M. Kneale and W. Kneale: *The development of logic*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

6. http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_logic