

6 Θέμα 2^ο (9/7/2021): Χρησιμοποιώντας καιόμενες φυσικής παραγωγής, να κατασκευάσετε δύο τυπικές αποδείξεις εγκυρότητας για την ακόλουθη επιχειρηματική μορφή:

$$p \rightarrow (r \rightarrow q)$$

$$\sim s \vee p$$

$$\underline{\sim (s \rightarrow q)}$$

$$\sim r$$

Λύση: (α) με μέθοδο απαγωγής σε άτοπο

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $p \rightarrow (r \rightarrow q)$ | υπόθεση |
| 2. $\sim s \vee p$ | " |
| 3. $\sim (s \rightarrow q)$ | " |
| 4. $\sim \sim r$ | βασθ. υπόθεση |
| 5. $\sim p \vee (\sim r \vee q)$ | 1, \vee -αντικατάσταση) συνεπαγωγής |
| 6. $(\sim r \vee q) \vee \sim p$ | 5, \vee -αντιμετάθ. |
| 7. $\sim r \vee (q \vee \sim p)$ | 6, \vee -προσεταιρ. |
| 8. $q \vee \sim p$ | 4, 7, διαφ. συλλογισμός |
| 9. $s \& \sim q$ | 3, \vee - (άρμοσ) συνεπαγωγής |
| 10. $\sim q \& s$ | 9, \vee -αντιμετάθ. |
| 11. $\sim q$ | 10, απλοποίηση |
| 12. $\sim p$ | 8, 11, διαφ. συλλογ. |
| 13. $p \vee \sim s$ | 2, \vee -αντιμετάθ. |
| 14. $\sim s$ | 12, 13, διαφ. συλλογ. |
| 15. s | 9, απλοποίηση |
| 16. $s \& \sim s$ | 14, 15, σύμφωνη. |
| 17. $\sim r$ | 3-16, μέθ. έμμεσης απόδειξης |

(b) με άμεση απόδειξη

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1. $p \rightarrow (r \rightarrow q)$ | υπόθεση |
| 2. $\sim s \vee p$ | " |
| 3. $\sim (s \rightarrow q)$ | " |
| 4. $s \wedge \sim q$ | 3, \vee (άρμοιος) συνεπαγωγής |
| 5. s | 4, απλοποίηση |
| 6. $\sim s$ | 5, \vee σμηληγρώματος (διηλής άρμους) |
| 7. p | 2, 6, διαφ. συλλογ. |
| 8. $r \rightarrow q$ | 1, 7, Modus Ponens |
| 9. $\sim q \wedge s$ | 4, \vee ανει μετάφ. |
| 10. $\sim q$ | 9, απλοποίηση |
| 11. $\sim r$ | 8, 10, Modus Tollens |

Θέμα 3^ο (-3/7/2020): Εκφράστε σε συμβολική μορφή το ακόλουθο επιχείρημα και ελέγξτε ότι η ανεισοταχη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη, χρησιμοποιώντας καλόνες φυσικής παραγωγής

Αν αγοράσω το νέο iPhone, θα ξοδέψω το χαρτζηλίκι μου. Θα πάω στη Μύκονο για διακοπές αν και μόνο αν έχω το χαρτζηλίκι μου. Αν δεν πάω στη Μύκονο για διακοπές, θα διαβάσω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου. Άρα θα διαβάσω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου ή δεν θα αγοράσω το νέο iPhone.

Λύση: Ας συμβολίσουμε με p τη δήλωση "αγοράσω το νέο iPhone", με q την "ξοδέψω το χαρτζηλίκι μου", με r την "πάω στη Μύκονο για διακοπές" και με s την "διαβάσω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου". Τότε οι υποθέσεις του επιχειρήματος έχουν τη μορφή $p \rightarrow q$, $r \leftrightarrow \sim q$, $\sim r \rightarrow s$ και το συμπέρασμα έχει τη μορφή $s \vee \sim p$.

(α) με υποδεικτική απόδειξη

(3)

παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα είναι λογικά ισοδύναμο με τον τύπο $\neg r \vee s$ ή, ισοδύναμα, με τον τύπο $p \rightarrow s$.

- | | |
|---|--------------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | υπόθεση |
| 2. $r \leftrightarrow \neg q$ | " |
| 3. $\neg r \rightarrow s$ | " |
| 4. p | βοηθ. υπόθεση |
| 5. q | 1, 4, Modus Ponens |
| 6. $(r \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow r)$ | 2, ν. διπλής συνεπαγωγής |
| 7. $r \rightarrow \neg q$ | 6, απλοποίηση |
| 8. $\neg \neg q$ | 5, ν. συμπληρώματος |
| 9. $\neg r$ | 7, 8, Modus Tollens |
| 10. s | 9, 3, Modus Ponens |
| 11. $p \rightarrow s$ | 4-10, μέθ. υποδ. απόδ. |

(β) με έμμεση απόδειξη (απαγωγή σε άτοπο)

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | υπόθεση |
| 2. $r \leftrightarrow \neg q$ | " |
| 3. $\neg r \rightarrow s$ | " |
| 4. $\neg (s \vee \neg p)$ | βοηθητική υπόθεση |
| 5. $\neg s \wedge \neg \neg p$ | 4, ν. De Morgan |
| 6. $\neg s$ | 5, απλοποίηση |
| 7. $\neg \neg r$ | 3, 6, Modus Tollens |
| 8. r | 7, ν. συνεπαγωγής
(Syllogismus) |

$$9. (r \rightarrow \neg q) \& (\neg q \rightarrow r)$$

2, v. διηλθής συνεπαγ. (4)

$$10. r \rightarrow \neg q$$

9, αηχοποίηση

$$11. \neg q$$

8, 10, Modus Ponens

$$12. \neg p$$

1, 11, Modus Tollens

$$13. \neg p \& \neg s$$

5, v. αντεμεταθ.

$$14. p \& \neg s$$

13, v. συμπληρ.

$$15. p$$

14, αηχοποίηση

$$16. p \& \neg p$$

15, 12, σύμφωνο

$$17. s \vee \neg p$$

4-16, μέθ. έμμεσης απόδειξης

(8) με άμεση απόδειξη

$$1. p \rightarrow q$$

υπόθεση

$$2. r \leftrightarrow \neg q$$

"

$$3. \neg r \rightarrow s$$

"

$$4. (r \rightarrow \neg q) \& (\neg q \rightarrow r)$$

2, v. διηλθής συνεπαγωγής

$$5. r \rightarrow \neg q$$

4, αηχοποίηση

$$6. \neg \neg q \rightarrow \neg r$$

5, v. συνεπαγωγής

$$7. q \rightarrow \neg r$$

6, v. συμπληρ.

$$8. p \rightarrow \neg r$$

1, 7, υποθέτ. συλλογ.

$$9. p \rightarrow s$$

3, 8, υποθ. συλλογ.

$$10. \neg p \vee s$$

9, v. (αντικατ.) συνεπαγωγής

$$11. s \vee \neg p$$

10, v. αντεμεταθ.