ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 28/6/2023.

Θέμα 1ο.

$$[(\sim p \vee q) \& (\sim q \vee \sim p)] \vee p \Leftrightarrow \text{(ν. αντιμετάθ.)}$$
$$[(\sim p \vee q) \& (\sim p \vee \sim q)] \vee p \Leftrightarrow \text{(ν. επιμεριστικ.)}$$
$$[\sim p \vee (q \& \sim q)] \vee p \Leftrightarrow \text{(ν. συμπληρώματος)}$$
$$[\sim p \vee F] \vee p \Leftrightarrow \text{(ν. ταυτότητας)}$$
$$\sim p \vee p \Leftrightarrow \text{(ν. αντιμεταθ.)}$$
$$p \vee \sim p \Leftrightarrow \text{(ν. συμπληρώματος)}$$
$$T$$

Σημείωση. Όπως έχουμε αναφέρει και στο μάθημα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν νόμοι με άλλη σειρά (ή διαφορετικοί νόμοι.

Θέμα 2ο. (α) Γνωρίζουμε (από τη θεωρία) ότι το $\{\sim, \vee\}$ είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων. Για να δείξουμε λοιπόν ότι το $\{\sim, \rightarrow\}$ είναι επαρκές, αρκεί να δείξουμε ότι οι σύνδεσμοι $\sim, \vee$ εκφράζονται μέσω των $\sim, \rightarrow$ (Προσοχή, όχι να δείξουμε ότι οι $\sim, \rightarrow$ εκφράζονται μέσω των $\sim, \vee$, γιατί αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το $\{\sim, \vee\}$ είναι επαρκές!)

Προφανώς ο $\sim$ εκφράζεται μέσω των $\sim, \rightarrow$.

Ο σύνδεσμος $\vee$ εκφράζεται μέσω των $\sim, \rightarrow$, διότι για οποιουσδήποτε τύπους P, Q ισχύει

$P \vee Q \Leftrightarrow$ (ν. διπλής άρνησης)

$\sim\sim P \vee Q \Leftrightarrow$ (ν. αντικατ. συνεπαγωγής)

$\sim P \rightarrow \sim Q$.

Επομένως το $\{\sim, \rightarrow\}$ είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων.

(β) (Υπόδειξη)

Κάθε προτ. τύπος στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\wedge, \vee$ έχει την ιδιότητα να παίρνει τιμή 1, όταν όλες οι προτασ. μεταβλητές του παίρνουν τιμή 1. Όμως ο προτασ. τύπος $\sim p$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα, οπότε ο σύνδεσμος $\sim$ δεν εκφράζεται μέσω των $\wedge, \vee$. Συνεπώς το σύνολο $\{\wedge, \vee\}$ δεν είναι επαρκές σύνολο συνδέσμων.

Θέμα 3ο.

Με τη μέθοδο υποθετικής απόδειξης

Αρκεί να δείξουμε ότι από τις υποθέσεις

$(q \& p) \vee (p \& r)$

$r \rightarrow \sim(p \vee q)$

$\sim q$

έπεται ως συμπέρασμα ο προτασ. τύπος $\sim p$.

Αυτό όμως φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη εγκυρότητας.

1. $(q \& p) \vee (p \& r)$ υπόθεση
2. $r \rightarrow \sim(p \vee q)$ "
3. $\sim q$ βοηθητική υπόθεση
4. $(p \& q) \vee (p \& r)$ 1, ν. αντιμεταθετ.
5. $p \& (q \vee r)$ 4, ν. επιμεριστικ.

6. (q v r) & p — 5, ν. αντιμεταθ.
7. q v r — 6, απλοποίηση
8. r — 3, 7, διαζευκτ. συλλογ.
9. ~(p v q) — 2, 8, Modus Ponens
10. ~p & ~q — 9, ν. De Morgan
11. ~q & ~p — 10, ν. αντιμεταθ.
12. ~q — 11, απλοποίηση.

<u>Με τη μέθοδο έμμεσης απόδειξης (reductio ad absurdum)</u>
Θα πάρουμε ως βοηθητική υπόθεση την άρνηση του συμπεράσματος και θα δείξουμε ότι από τις τρείς υποθέσεις (δύο αρχικές και μία βοηθητική) έπεται μια (οποιαδήποτε) αντίφαση.

1. (q & p) v (p & r) — υπόθεση
2. r → ~(p v q) — "
3. ~(~q → ~p) — βοηθητική υπόθεση
4. ~q & ~~p — 3, ν. συνεπαγωγής
5. ~q & p — 4, ν. διπλής άρνησης
6. (p & q) v (p & r) — 1, ν. αντιμεταθετ.
7. p & (q v r) — 6, ν. επιμεριστικ.
8. (q v r) & p — 7, ν. αντιμεταθετ.
9. q v r — 8, απλοποίηση

10.	$\sim q$	4, απλοποίηση
11.	r	9, 10, διαζευκτ. συλλογ.
12.	p	7, απλοποίηση
13.	$p \vee q$	12, πρόσθεση
14.	$\sim\sim(p \vee q)$	13, ν. διπλής άρνησης
15.	$\sim r$	2, 14, Modus Tollens
16.	$r \,\&\, \sim r$	11, 15, σύζευξη

Παρατηρούμε τώρα ότι ο τύπος $r \,\&\, \sim r$ (στο βήμα 16) αποτελεί αντίφαση.

<u>Σημείωση.</u> Όπως είχαμε πει και στο μάθημα, οι κανόνες (και οι νόμοι) μπορούν να εφαρμοστούν με διαφορετική σειρά.