

ΔΠΜΣ ΙΦΕΤ

ΛΟΓΙΚΗ

3/7/2020.

Θέμα 1^ο: Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, να απλοποιήσετε τον προτασιακό τύπο

$$\neg \vee [(p \vee q) \wedge (\neg q \wedge p)] \quad (1,5 \text{ μον.})$$

Θέμα 2^ο: Είναι το σύνολο $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ επαρκές και γιατί; (1,5 μον.)

Θέμα 3^ο: Εκφράστε σε συμβολική μορφή το ακόλουθο επιχείρημα και, χρησιμοποιώντας κανόνες φυσικής παραγωγής, ελέγξτε ότι η αντίστοιχη επιχειρηματική μορφή είναι έγκυρη:

Αν αγοράσω το νέο iPhone Apple, θα ξεδύσω το χαρτζητάκι μου.

Θα πάω διακοπές στη Μύκονο αν και μόνον αν έχω χαρτζητάκι.

Αν δεν πάω στη Μύκονο, θα διαβάσω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου.

Άρα θα διαβάσω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου ή δεν θα αγοράσω το νέο iPhone Apple. (2 μον.)

Θέμα 4^ο: Θεωρούμε το μοντέλο που ορίζεται ως εξής:

$D = \{\text{Χαράλαμπος, Νίκη, Δημήτρα, Βασίλης, Στάθης, Κώστας, Γιάννης, Θανάσης}\}$

$[K] = \{\text{Στάθης, Κώστας, Γιάννης, Θανάσης}\}$

$[Φ] = \{\text{Χαράλαμπος, Νίκη, Δημήτρα, Βασίλης}\}$

$[Π] = \{\text{Χαράλαμπος, Νίκη, Γιάννης, Κώστας}\}$

$[E] = \{\langle \text{Στάθης, Νίκη} \rangle, \langle \text{Κώστας, Χαράλαμπος} \rangle, \langle \text{Θανάσης, Δημήτρα} \rangle\}$.

(α) Είναι αληθής ή ψευδής στο μοντέλο αυτό η πρόταση (και γιατί);

$$(\forall x) [K(x) \rightarrow (\exists y) (\Phi(y) \wedge E(x, y))]; \quad (1,5 \text{ μον.})$$

(β) Υπάρχει αποτίμηση στο μοντέλο αυτό (και γιατί) που ικανοποιεί τον τύπο

$$(\forall y) [(K(y) \wedge E(y, x)) \rightarrow \Pi(y)]; \quad (1,5 \text{ μον.})$$

Θέμα 5ε. Χρησιμοποιώντας κανόνες φυσικής παραγωγής, ελέγξτε ότι η ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται τυπικά:

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \longrightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x)),$$

όπου P, Q μονομερή κατηγορηματικά σύμβολα. (2 μον.)

(1)

Λύση θέματος 1.

$$\neg p \vee [(p \vee q) \wedge (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. επιμεριστικότητα})$$

$$[\neg p \vee (p \vee q)] \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. προσεταιριστικότητα})$$

$$[\neg p \vee p] \vee q \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. αντιμεταθετικότητα})$$

$$[(p \vee \neg p) \vee q] \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. συμπληρώματος})$$

$$[T \vee q] \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. αντιμετ.})$$

$$[q \vee T] \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. ταυτότητας})$$

$$T \wedge [\neg p \vee (\neg q \wedge p)] \Leftrightarrow (\text{v. επιμεριστικότητα})$$

$$T \wedge [(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p)] \Leftrightarrow (\text{όπως πριν, το κομμάτι } (\neg p \vee p) \text{ ισοδυναμεί με } T)$$

$$T \wedge [(\neg p \vee \neg q) \wedge T] \Leftrightarrow (\text{v. ταυτότητας})$$

$$T \wedge (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (\text{v. αντιμεταθετικότητα \& v. ταυτότητας})$$

$$(\neg p \vee \neg q)$$

Λύση θέματος 2 (υπόδειξη) Παρατηρούμε ότι κάθε προτασιακός τύπος στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι συνδέσμοι $\rightarrow, \leftrightarrow$ έχει την ιδιότητα: όταν όλες οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν πάρουν τιμή 1, τότε και ο τύπος ολόκληρος παίρνει τιμή 1. Όμως ο προτασιακός τύπος $\neg p$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα, άρα δεν μπορεί να είναι ισοδύναμος λογικά με κάποιον προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\rightarrow, \leftrightarrow$. Έπεται ότι το σύνολο $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.

Λύση θέματος 3 - Εισάγουμε κάποιες προτασιακές μεταβλητές, για να συμβολίσουμε ατομικές δηλώσεις που εμφανίζονται στο επιχείρημα:

p = αγοράζω το νέο iPhone Apple

q = έχω χαρτζιλίκι

r = πάω διακοπές στη Μύκονο

s = διαβάω για την εξεταστική Σεπτεμβρίου

Το επιχείρημα λοιπόν παίρνει τη μορφή:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ r \leftrightarrow q \\ \hline \neg r \rightarrow s \\ s \vee \neg p \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαγωγής σε άτοπο, χρειάζεται να δείξουμε ότι από τις υποθέσεις

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ r \leftrightarrow q \\ \neg r \rightarrow s \\ \neg(s \vee \neg p) \end{array}$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε αντίφαση. Έχουμε λοιπόν:

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. $p \rightarrow \neg q$ | υπόθεση |
| 2. $r \leftrightarrow q$ | " |
| 3. $\neg r \rightarrow s$ | " |
| 4. $\neg(s \vee \neg p)$ | βοηθητική υπόθεση |
| 5. $\neg s \wedge \neg \neg p$ | 4, νόμος De Morgan |
| 6. $\neg s \wedge p$ | 5, νόμος διπλής άρνησης |
| 7. $p \wedge \neg s$ | 6, νόμος αντιμετάθ. |
| 8. p | 7, απλοποίηση |
| 9. $\neg q$ | 1, 8, modus ponens |
| 10. $(r \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ | 2, νόμος διπλής συνεπαγωγής |
| 11. $r \rightarrow q$ | 10, απλοποίηση |
| 12. $\neg r$ | 9, 11, modus tollens |
| 13. s | 3, 12, modus ponens |
| 14. $\neg s$ | 6, απλοποίηση |

Τώρα όπως έχουμε καταλήξει σε αντίφαση (βήματα 13, 14),

Λύση θέματος 4(α). Αρχίζουμε "διαγράφοντας" τον προσοδείκτη ($\forall x$) που υπάρχει στην αρχή της πρότασης και εξετάζοντας αν η υπολοίπη έκφραση αληθεύει όταν το x παίρνει ως τιμή το τυχόν στοιχείο του πεδίου D .

$x = \text{Χαράλαμπος}$. Εξετάζουμε αν αληθεύει η έκφραση

$$(x) \quad K(x) \rightarrow (\exists y)(\Phi(y) \& E(x, y)),$$

εξετάζοντας αν η ητοιμμένη είναι αληθής, δηλ. αν $K(x)$ αληθής. Αυτό ισοδυναμεί με $\text{Χαράλαμπος} \in [K]$, πράγμα που δεν ισχύει, λόγω του ορισμού του συνόλου $[K]$. Με βάση λοιπόν τον πίνακα αλήθειας της $\rightarrow$, η έκφραση (x) είναι αληθής.

$x = \text{Νίκη}$. Όμοια ελέγχουμε ότι αληθεύει η έκφραση

$$K(x) \rightarrow (\exists y)(\Phi(y) \& E(x, y)).$$

$x = \text{Δήμητρα}$. όπως παραπάνω.

$x = \text{Βασίλης}$. όπως παραπάνω.

$x = \text{Στάθης}$. εξετάζουμε αν αληθεύει η έκφραση

$$K(x) \rightarrow (\exists y)(\Phi(y) \& E(x, y)),$$

εξετάζοντας πρώτα αν η $K(x)$ αληθεύει ή όχι και μετά αν η $(\exists y)(\Phi(y) \& E(x, y))$ αληθεύει ή όχι. Σχετικά με την $K(x)$, πο αν αληθεύει ή όχι εξαρτάται από το αν $\text{Στάθης} \in [K]$, πράγμα που είναι αληθές με βάση τον ορισμό του $[K]$. Θα εξετάσουμε τώρα αν η έκφραση $(\exists y)(\Phi(y) \& E(x, y))$ είναι αληθής, όπου βέβαια η x παίρνει τη τιμή "Στάθης". Για να το κάνουμε αυτό, "διαγράφουμε" τον προσοδείκτη $(\exists y)$ και εξετάζουμε αν η υπολοίπη έκφραση, δηλ. $\Phi(y) \& E(x, y)$, αληθεύει για κάποια τιμή της y μέσα στο πεδίο D του μοντέλου (όπου βέβαια η τιμή της x είναι "φίξαρτισμένη" σε "Στάθης"). Ψάχνοντας για ένα "μάρτυρα" στη σχέση της y , βλέπουμε ότι, όταν η y πάρει τη τιμή "Νίκη", η έκφραση $\Phi(y) \& E(x, y)$ αληθεύει (προσοχή, να x να είναι "Στάθης").

Πράγματι, όταν η τιμή της y είναι Νίκη και η τιμή της x είναι Στάθης, αληθεύει και η $\Phi(y)$ και η $E(x,y)$, διότι η τιμή της y ανήκει στο σύνολο $[F]$ και το ζεύγος $\langle \text{Στάθης}, \text{Νίκη} \rangle$ ανήκει στο σύνολο $[E]$.

Συμπεραίνουμε ότι η έκφραση $(\exists y)(\Phi(y) \& E(x,y))$ αληθεύει για $x = \text{Στάθης}$.

$x = \text{Κώστας}$. Όπως για $x = \text{Στάθης}$, η έκφραση $(*)$ αληθεύει (διότι η τιμή του $y = \text{Χαράλαμπος}$ είναι τέτοια που αληθεύει η έκφραση $\Phi(y) \& E(x,y)$).

$x = \text{Γιάννης}$. Πάχι αληθεύει η έκφραση $K(x)$, οπότε εξετάζουμε αν αληθεύει η $(\exists y)(\Phi(y) \& E(x,y))$. Αν εξετάσουμε όλες τις υποψήφίες τιμές της μεταβλητής y , δεν θα βρούμε καμιά τέτοια που, μαζί με $x = \text{Γιάννης}$ να δίνει ζεύγος που ανήκει στο σύνολο $[E]$. Αυτό σημαίνει ότι η έκφραση $(\exists y)(\Phi(y) \& E(x,y))$ είναι ψευδής για $x = \text{Γιάννης}$.

Χωρίς λοιπόν να εξετάσουμε τι γίνεται όταν $x = \text{Θανάσης}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πρόταση που μας δόθηκε είναι ψευδής στο συγκεκριμένο μοντέλο.

Σημείωση. Η παράπάνω διαδικασία σ τηρείται στον λεγόμενο "αριθμό αλήθειας του Tarski", ο οποίος μας επιτρέπει να κρίνουμε αν μια συγκεκριμένη πρόταση αληθεύει ή όχι σε κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο. Θα μπορούσαμε διαισθητικά να έχουμε δουλέψει χειροκρότερα, αν σκεφτόμασσε ότι η πρόταση που μας δίνεται αντιστοιχεί στην πρόταση της ελληνικής γλώσσας "για κάθε x (στο πεδίο) που έχει την ιδιότητα K υπάρχει y (στο πεδίο) τέτοιο που (i) το y να έχει την ιδιότητα Φ και (ii) το ζεύγος (των τιμών) $\langle x,y \rangle$ να έχει την ιδιότητα E ".

Πράγματι, αν σκεφτόμασε ότι το x διατρέχει το πεδίο D , θα δούμε ότι ~~δεν~~ υπάρχει τιμή του x που κάνει την έκφραση $K(x)$ αληθή, αλλά για την τιμή αυτή δεν μπορούμε να βρούμε τιμή της y στο πεδίο τέτοια που και $\Phi(y)$ να ισχύει και το $E(x,y)$ να ισχύει (η τιμή αυτή είναι "Γιάννης").

Λύση θέματος 5. Επειδή η πρόταση έχει μορφή συνεπαγωγής, αρκεί με υπόθεση την ηγουμένη $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ να αποδείξουμε την επόμενη $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$.

Όμως ο τύπος $P(c) \vee Q(c)$, όπου c τυχόνια ατομική σταθερά, συνεπάγεται τον $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$, με βάση τον κανόνα της υπαρξιακής γενίκευσης, αρκεί με υπόθεση $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ να αποδείξουμε την $P(c) \vee Q(c)$.

Με βάση τη μέθοδο απαγωγής στο άτοπο, αρκεί με υπόθεση $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ και βοηθητική υπόθεση $\neg(P(c) \vee Q(c))$ να καταλήξουμε σε αντίφαση. Κατασκευάζουμε λοιπόν την ακόλουθη απόδειξη:

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ | υπόθεση |
| 2. $\neg(P(c) \vee Q(c))$ | βοηθ. υπόθεση |
| 3. $\neg P(c) \& \neg Q(c)$ | 2, νόμος De Morgan |
| 4. $\neg P(c)$ | 3, απλοποίηση |
| 5. $(\forall x)\neg P(x)$ | 4, καθολική γενίκευση |
| 6. $\neg(\exists x)P(x)$ | 5, νόμος άρνησης ποσοδείκτη |
| 7. $(\exists x)Q(x)$ | 1, 6, διαφενκτικός σιλλογισμός |
| 8. $\neg Q(c) \& \neg P(c)$ | 3, νόμος αντιμεταθετικότητας |
| 9. $\neg Q(c)$ | 8, απλοποίηση |
| 10. $(\forall x)\neg Q(x)$ | 9, καθολική γενίκευση |
| 11. $\neg(\exists x)Q(x)$ | 10, νόμος άρνησης ποσοδείκτη |

τώρα όμως βλέπουμε ότι οι τύποι 7 και 11 αποτελούν αντίφαση.

Έπεται λοιπόν, με βάση τα σχόλια στην αρχή της λύσης, ότι με υπόθεση την $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$ αποδεικνύεται $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$ και άρα ότι αποδεικνύεται η πρόταση

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x)).$$