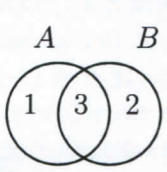
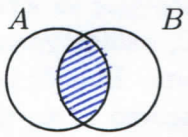
(1-18) $A \cap B = \emptyset$
$B \cap C = \{d\}$
$A \cap A = \{a, b\} = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \emptyset.$

Πριν προχωρήσουμε, θα αναφερθούμε στη *μέθοδο διαγραμμάτων Venn*, την οποία χρησιμοποιούμε για οπτική αναπαράσταση συνόλων και πράξεων με σύνολα. Κάθε σύνολο αντιπροσωπεύεται από μια περιοχή του επιπέδου που περικλείεται από ένα κύκλο ή μια έλλειψη ή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τα δε στοιχεία του από σημεία της περιοχής αυτής. Η πιο γενική περίπτωση για δυο σύνολα είναι να τα παραστήσουμε ως αλληλοτεμνόμενες περιοχές, όπως φαίνεται στο σχήμα 1-1. Η περιοχή με όνομα "1" περιέχει στοιχεία που είναι στοιχεία του A αλλά όχι του B. Η περιοχή 2, εκείνα τα πράγματα στο B που δεν ανήκουν στο A. Τέλος, η περιοχή 3 περιέχει στοιχεία και του A και του B. Σημεία στην περιοχή 4 έξω από το διάγραμμα παριστάνουν στοιχεία που δεν ανήκουν σε κανένα από τα δυο σύνολα. Φυσικά σε συγκεκριμένα παραδείγματα μια ή περισσότερες από αυτές τις περιοχές μπορεί να είναι κενές.



Σχήμα 1-1: Διάγραμμα Venn δυο τυχόντων συνόλων A και B.

Η τομή δυο τυχόντων συνόλων A και B παριστάνεται με το διάγραμμα Venn του Σχήματος 1-2, όπου η περιοχή που μας ενδιαφέρει είναι διαγραμμισμένη.



Σχήμα 1-2: Συνολοθεωρητική τομή $A \cap B$.

Συνεχίζουμε με την πράξη της ένωσης. Δοθέντων δυο συνόλων A και B, καλούμε *ένωση των* A, B, και συμβολίζουμε $A \cup B$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα αντικείμενα που είναι στοιχεία του A ή του B. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε

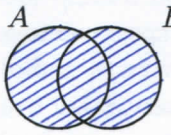
(1-19) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ή } x \in B\}$.

Η διάζευξη "ή" ανωτέρω είναι "εγκλειστική", δηλαδή επιτρέπει να θεωρούμε αντικείμενα που ανήκουν και στο A και στο B.

Παράδειγμα: Για τα σύνολα A, B, C όπως προηγουμένως, έχουμε

(1-20) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$
$A \cup C = \{a, b, d\}$
$B \cup C = \{b, c, d\}$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\}$
$A \cup \emptyset = \{a, b\} = A$.

Το διάγραμμα Venn για την ένωση δυο τυχόντων συνόλων παριστάνεται στο Σχήμα 1-3.



Σχήμα 1-3: Συνολοθεωρητική ένωση $A \cup B$.

Ερχόμαστε τώρα στην πράξη της διαφοράς. Δοθέντων δυο συνόλων A και B, καλούμε *διαφορά των* A, B, και συμβολίζουμε με $A - B$, το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα αντικείμενα που ανήκουν στο A αλλά δεν ανήκουν στο B. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε

(1-21) $A - B = \{x | x \in A \text{ και } x \notin B\}$.

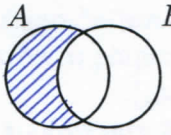
Μερικές φορές λέμε *σχετικό συμπλήρωμα του* B *ως προς το* A αντί για *διαφορά των* A, B.

Παράδειγμα: Για τα σύνολα A, B, C όπως προηγουμένως, έχουμε

(1-22) $A - B = \{a, b\} = A$
$B - C = \{c\}$
$A - \emptyset = A$
$\emptyset - A = \emptyset$
$A - A = \emptyset$
$B - A = \{c, d\} = B$
$(A - B) - C = \{a\}$
$A - (B - C) = \{a, b\} = A$.

Για τα συγκεκριμένα σύνολα A, B που έχουμε ορίσει, βλέπουμε ότι ισχύειἤ $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$, αλλά $A - B \neq B - A$ (δηλαδή δεν ισχύει $A - B = B - A$).

Το διάγραμμα Venn για τη συνολοθεωρητική διαφορά $A - B$ φαίνεται στο Σχήμα 1-5.



Σχήμα 1-5: Συνολοθεωρητική διαφορά $A - B$.

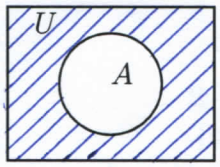
Η προηγούμενη πράξη πρέπει να διακρίνεται από την πράξη του συμπληρώματος. Δοθέντος ενός συνόλου A, καλούμε *συμπλήρωμα του* A, και συμβολίζουμε A' ή A^c, το σύνολο με στοιχεία τα αντικείμενα που δεν ανήκουν στο A. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού, έχουμε

(1-23) $A' = \{x | x \notin A\}$.

Προσοχή όμως: Όταν ορίσαμε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ ήταν σαφές ότι η αναζήτηση των στοιχείων τους γίνεται στα ήδη γνωστά σύνολα A, B. Στην προκείμενη περίπτωση, που θα αναζητήσουμε τα στοιχεία του A'; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, πρέπει να αναφερθούμε σαφώς σε κάτι που συνήθως μένει στο περιθώριο: το *σύμπαν* (ή *πεδίο*) *αναφοράς*. Σε όλες τις αναζητήσεις μας υπάρχει ένα σύνολο αντικειμένων στα πλαίσια του οποίου κινούμαστε, παραδείγματος χάρη το σύνολο των φυσικών αριθμών, αν ασχολούμαστε με τη θεωρία αριθμών. Αυτό το γεγονός δεν πρέπει να μας προβληματίζει καθόλου, ας μη ξεχνάμε ότι όταν χρησιμοποιούμε λέξεις όπως "όλα", "μερικά" έχουμε κατά νου κάποιο πεδίο αναφοράς. Θα ήταν βέβαια πολύ βολικό να έχουμε ένα καθολικό πεδίο αναφοράς που θα περιείχε "ο,τιδήποτε" από το οποίο θα μπορούσαν να κατασκευαστούν ενδιαφέροντα σύνολα, αυτό όμως δεν είναι δυνατό, διότι θα διατρέχαμε τον κίνδυνο δημιουργίας παραδόξων αφού θα είχαμε τη δυνατότητα θεώρησης αντικειμένων όπως "το σύνολο όλων των συνόλων" που είναι προβληματικά. Συνήθως συμβολίζουμε με U (από τη λέξη universe) το σύμπαν αναφοράς, το οποίο όμως συνήθως δεν ορίζουμε επακριβώς. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου ορίζεται με βάση το U, συγκεκριμένα ως

(1-24) $A' = U - A$.

Το διάγραμμα Venn για το συμπλήρωμα του A φαίνεται στο Σχήμα 1-6.



Σχήμα 1-6: Το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμα A'.

Ερχόμαστε, τέλος, στην πράξη του δυναμοσυνόλου. Δοθέντος ενός συνόλου A, καλούμε *δυναμοσύνολο του* A, και συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$, το σύνολο με στοιχεία ακριβώς τα σύνολα που είναι υποσύνολα του A. Με χρήση κατηγορηματικού συμβολισμού έχουμε

(1-25) $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$.

Η επιλογή του συνθετικού "δυναμο" οφείλεται στο γεγονός ότι αν ο πληθάριθμος του A είναι ο φυσικός αριθμός n, τότε ο πληθάριθμος του $\mathcal{P}(A)$ είναι $\aleph 2^n$, δηλαδή $2 \times 2 \times ... \times 2$ (n φορές).

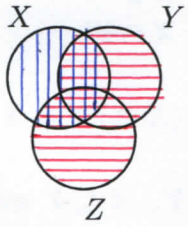
Παράδειγμα: Για το σύνολο A που έχουμε θεωρήσει,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

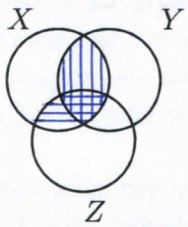
Όμοια, ο,τιδήποτε είναι στο X ή στο Y (ή και στα δυο) είναι το ίδιο με ο,τιδήποτε είναι στο Y ή στο X (ή και στα δυο), έτσιἤ $X \cup Y = Y \cup X$. Το επιχείρημα για την τομή είναι όμοιο.

Οι νόμοι προσεταιριστικότητας δηλώνουν ότι η σειρά με την οποία συνδυάζουμε τρία σύνολα με την πράξη της ένωσης δεν έχει σημασία και το ίδιο ισχύει αν η πράξη είναι τομή. Για να δούμε ότι αυτοί οι νόμοι ισχύουν, ας φανταστούμε την κατασκευή των κατάλληλων διαγραμμάτων Venn. Όταν βέβαια έχουμε να κάνουμε με περισσότερα από δυο σύνολα, τα διαγράμματα αυτά γίνονται πολύπλοκα, αλλά για απλές περιπτώσεις όπως εδώ αποτελούν ακόμη ένα πολύτιμο βοήθημα για την κατανόηση συνολοθεωρητικών σχέσεων. Έχουμε τρεις αλληλοτεμνόμενους κύκλους με ονόματα X, Y και Z. Πρώτα σκιαγραφούμε το $X \cup Y$ και μετά το Z. Το αποτέλεσμα είναι η διαγράμμιση της πλήρους περιοχής εντός των τριών κύκλων και αυτό αντιστοιχεί στο σύνολο $(X \cup Y) \cup Z$. Τώρα ξαναρχίζουμε και διαγραμμίζουμε πρώτα το $Y \cup Z$ και μετά το X. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Η κατασκευή των διαγραμμάτων Venn για την επεξήγηση των νόμων επιμεριστικότητας είναι κάπως δυσκολότερη. Στο Σχήμα 1-8 δείχνουμε ένα διάγραμμα Venn για το $X \cap (Y \cup Z)$. Για να το κάνουμε πιο σαφές, το X έχει διαγραμμιστεί με κατακόρυφες γραμμές και το $Y \cup Z$ με οριζόντιες. Η τομή αυτών των δυο συνόλων αναπαρίσταται κατόπιν με την περιοχή με διασταυρώσεις γραμμών. Το Σχήμα 1-9 δείχνει το αντίστοιχο διάγραμμα για το $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Το $X \cap Y$ είναι διαγραμμισμένο κατακόρυφα και το $X \cap Z$ οριζόντια. Έτσι, η ένωση αναπαρίσταται με την επιφάνεια που είναι διαγραμμισμένη σε μια (ή και στις δυο) κατευθύνσεις. Όμοια κατασκευάζεται το διάγραμμα Venn για τον πρώτο νόμο επιμεριστικότητας.

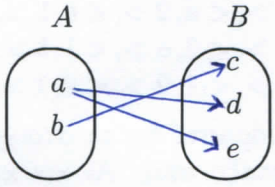


Σχήμα 1-8: Διάγραμμα Venn για το $X \cap (Y \cup Z)$.



Σχήμα 1-9: Διάγραμμα Venn για το $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

και η προβολή πάνω στη δεύτερη συντεταγμένη καλείται *πεδίο τιμών* της R. Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού καλούνται *πρότυπα ή ορίσματα* και τα στοιχεία του πεδίου τιμών καλούνται *εικόνες*. Παραδείγματος χάρη, η σχέση "μητέρα του" ορίζεται πάνω στο σύνολο A όλων των ανθρώπων και είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών στο $A \times A$ τέτοιο που σε κάθε ζεύγος το πρώτο μέλος είναι μητέρα του δεύτερου μέλους. Την ίδια σχέση μπορούμε να θεωρήσουμε ως σχέση από το σύνολο των γυναικών C στο σύνολο των ανθρώπων A. Μπορούμε οπτικά να αναπαραστήσουμε μια σχέση R μεταξύ των συνόλων A και B με ένα διάγραμμα (παρόμοιο με διάγραμμα Venn) ως εξής:



Σχέση 2-1: Σχέση $R : A \to B$.

Στο Σχήμα 2-1, $A = \{a, b\}$ και $B = \{c, d, e\}$ και τα βέλη αντιπροσωπεύουν τα στοιχεία της σχέσης $R = \{< a, d >, < a, e >, < b, c >\}$. Σημειώνουμε ότι μια σχέση μπορεί να συσχετίζει ένα αντικείμενο στο πεδίο ορισμού της με περισσότερα από ένα αντικείμενα στο πεδίο τιμών της.

Το *συμπλήρωμα* μιας σχέσης $R \subseteq A \times B$, συμβολικά R', ορίζεται ως το συμπλήρωμα του συνόλου R ως προς το σύνολο $A \times B$, δηλαδή

(2-5) $R' = (A \times B) - R$.

Παρατηρούμε ότι $(R')' = R$.

Η *αντίστροφη* μιας σχέσης $R \subseteq A \times B$, συμβολικά R^{-1}, έχιε ως στοιχεία της όλα τα στοιχεία της R, με αντεστραμμένες τις πρώτες και δεύτερες συντεταγμένες τους.

Παραδείγματος χάρη, έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $R \subseteq A \times A$ η σχέση $\{< 3, 2 >, < 3, 1 >, < 2, 1 >\}$, που είναι η σχέση "μεγαλύτερος από" στο A. Η συμπληρωματική σχέση R' είναι η $\{< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 1, 3 >, < 2, 2 >< 2, 3 >, < 3, 3 >\}$, η σχέση "μικρότερος από ή ίσος με" σχέση στο A. Η αντίστροφη της R, R^{-1}, είναι η $\{< 2, 3 >, < 1, 3 >, < 1, 2 >\}$, η "μικρότερος από" σχέση στο A. Σημειώστε ότι $(R^{-1})^{-1} = R$ και ότι αν $R \subseteq A \times B$, τότε $R^{-1} \subseteq B \times A$, αλλά $R' \subseteq A \times B$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να δοθούν για τριμελείς, τετραμελείς κτλ. σχέσεις.

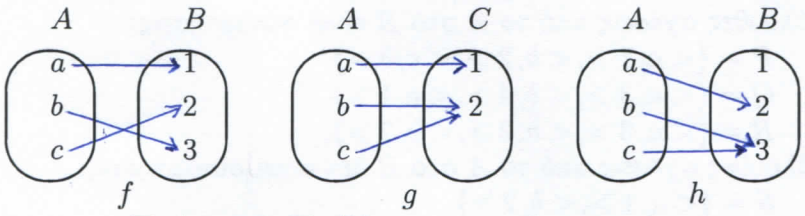
2.3 Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση είναι από συνολοθεωρητική σκοπιά μια ειδική σχέση. Μια σχέση R από το A στο B είναι *συνάρτηση* αν και μόνον αν ικανοποιεί τις επόμενες

(2) ως το σύνολο

(2-8) $\{< x, y > | y = 2x + 1\}$ (όπου τα x και y είναι ακέραιοι)

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να δηλώσουμε συγκεκριμένα αν το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης από το A στο B ισούται με B. Αν το πεδίο τιμών της συνάρτησης ισούται με B, τότε η συνάρτηση είναι *επί του* B. Στο Σχήμα 2-2 φαίνονται τα διαγράμματα τριών συναρτήσεων f, g, h, από τις οποίες μόνο οι δυο είναι επί.



Σχήμα 2-2: Επεξήγηση των επί συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ καλείται *ένα-προς-ένα* συνάρτηση μόνο στην περίπτωση που διαφορετικά στοιχεία του A αντιστοιχίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B. Η συνάρτηση f στο Σχήμα 2-2 είναι ένα-προς-ένα, αλλά η g δεν είναι (αφού και το b και το c αντιστοιχίζονται στο 2) ούτε η h είναι (αφού $h(b) = h(c) = 3$). Η συνάρτηση f που ορίζεται στο (2-8) είναι ένα-προς-ένα, αφού για κάθε περιττό ακέραιο y υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος x τέτοιος που $y = 2x + 1$. Σημειώστε ότι η f δεν είναι επί του συνόλου των ακεραίων, αφού κανένας άρτιος ακέραιος δεν είναι τιμή της f για κάποιο όρισμα x.

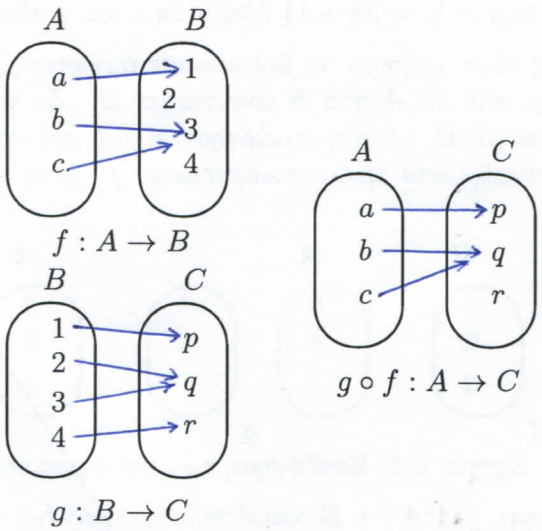
Μια συνάρτηση που είναι ένα-προς-ένα και επί (π.χ., η f στο Σχήμα 2-2) καλείται *ένα-προς-ένα αντιστοιχία*. Τέτοιες συναρτήσεις έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι οι αντίστροφές τους είναι επίσης συναρτήσεις. Για κάθε συνάρτηση f, αφού η f είναι σχέση, πάντα ορίζεται η αντίστροφη σχέση f^{-1}, η οποία όμως μπορεί να μην είναι συνάρτηση, διότι δεν ικανοποιείται είτε το πρώτο είτε το δεύτερο μέρος του ορισμού συνάρτησης. Έτσι, η αντίστροφη σχέση της g στο Σχήμα 2-2 δεν είναι συνάρτηση, αφού δεν ισχύει γι' αυτήν το πρώτο μέρος (το 2 απεικονίζεται στο b και στο c), ενώ η h^{-1} στο ίδιο σχήμα δεν είναι συνάρτηση, διότι δεν ισχύει γι' αυτήν το δεύτερο μέρος (το 2 δεν έχει αντίστοιχο).

2.4 Σύνθεση

Αν έχουμε δυο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση από το A στο C, που καλείται *σύνθεση* των f και g και συμβολίζεται με $g \circ f$. Σε κατηγορηματικό συμβολισμό η σύνθεση συναρτήσεων ορίζεται ως εξής

(2-9) $g \circ f = \{< x, z > |$ για κάποιο $y, < x, y > \in f$ και $< y, z > \in g\}$.

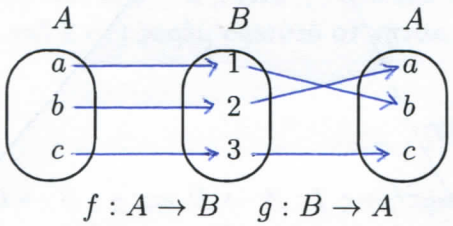
Το Σχήμα 2-3 δείχνει δυο συναρτήσεις f και g και τη σύνθεσή τους.



Σχήμα 2-3: Σύνθεση δυο συναρτήσεων f και g.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η f είναι στο B και η g επί του C, ενώ καμιά τους δεν είναι ένα-προς-ένα. Αυτό δείχνει ότι μπορούμε να σχηματίσουμε συνθέσεις από συναρτήσεις που δεν έχουν αυτές τις ειδικές ιδιότητες. Για να ορίζεται καλά η σύνθεση δυο συναρτήσεων f και g, αρκεί το πεδίο τιμών της f να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g – αν αυτό δεν ισχύει, δηλαδή αν υπάρχει y στο πεδίο τιμών της f που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της g, τότε δεν ορίζεται $g \circ f$. Σημειώνουμε ότι στο συμβολισμό $g \circ f$ εμφανίζεται πρώτη η συνάρτηση που εφαρμόζεται δεύτερη – η τιμή της f στο όρισμα a είναι $f(a)$ και η τιμή της g στο όρισμα $f(a)$ είναι $g(f(a))$ και με βάση τον ορισμό της σύνθεσης πρέπει το $g(f(a))$ και το $(g \circ f)(a)$ να είναι το ίδιο αντικείμενο. Προσοχή λοιπόν στη σειρά, αφού δεν ισχύει γενικά ότι $f \circ g = g \circ f$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο

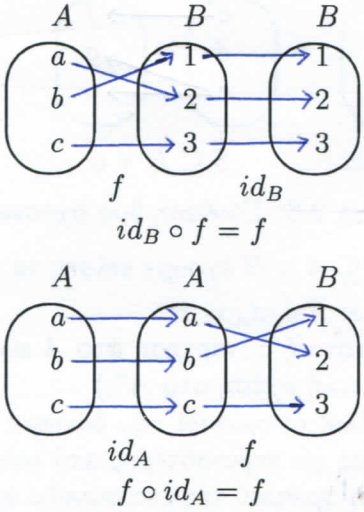
Παράδειγμα:



$$g \circ f = \{< a, b >, < b, a >, < c, c >\} \neq \{< 1, 2 >, < 2, 1 >, < 3, 3 >\} = f \circ g.$$

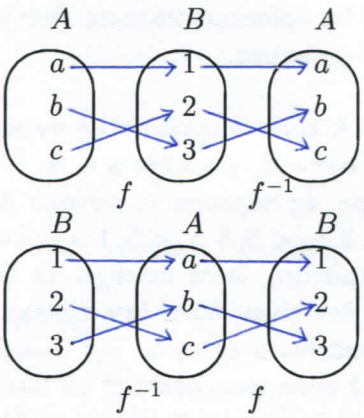
Μια συνάρτηση $f : A \to A$ τέτοια που $f = \{< x, x > | x \in A\}$ καλείται *ταυτοτική συνάρτηση* και συμβολίζεται με id_A. Αυτή η συνάρτηση απεικονίζει κάθε στοιχείο του A τον εαυτό του. Αν συνθέσουμε μια συνάρτηση $f : A \to B$

με την id_B ή την id_A με την f, θα πάρουμε ως αποτέλεσμα την ίδια την f, όπως φαίνεται κατωτέρω.



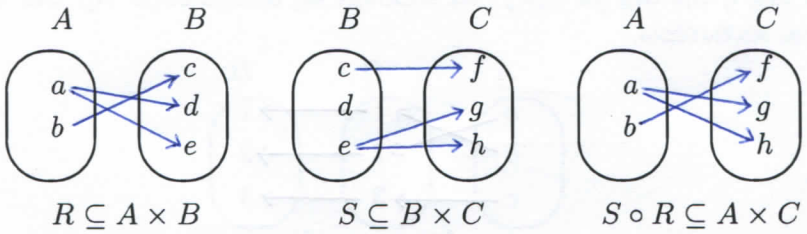
Σχήμα 2-4: Σύνθεση με μια ταυτοτική συνάρτηση.

Για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι ένα-προς-ένα αντιστοιχία (οπότε η αντίστροφη είναι επίσης συνάρτηση), ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:
(2-10) $f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B.$
Αυτές φαίνονται στο Σχήμα 2-5.



Σχήμα 2-5: Σύνθεση ένα-προς-ένα αντιστοιχίας με την αντίστροφή της.

Ο ορισμός της σύνθεσης δε χρειάζεταινα περιοριστεί σε συναρτήσεις, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί γενικά για σχέσεις. Αν έχουμε δυο σχέσεις $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times C$, η σύνθεση των R και S, συμβολικά $S \circ R$, είναι η σχέση $\{< x, z > \mid$ για κάποιο $y, < x, y > \in R$ και $< y, z > \in S\}$. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 2-6.



Σχήμα 2-6: Σύνθεση δυο σχέσεων R και S.

Για κάθε σχέση $R \subseteq A \times B$ έχουμε επίσης τα εξής:

(2-11) $id_B \circ R = R$ και $R \circ id_A = R$.

(Σημειώστε ότι η ταυτοτική συνάρτηση στο A είναι φυσικά μια σχέση που θα αποκαλούσαμε "ταυτοτική σχέση στο A".)

Σημειώνουμε ότι όλοι οι ορισμοί που δώσαμε για συναρτήσεις μπορούν να δοθούν για συνσρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητή - μια συνάρτηση μπορεί να έχει ως πεδίο ορισμού της ένα σύνολο από διατεταγμένες n-άδες, για κάθε $n \geq 2$, αλλά κάθε τέτοια n-άδα θα απεικονίζεται σε μια μοναδική τιμή στο πεδίο τιμών. Παραδείγματος χάρη, υπάρχει μια συνάρτηση που απεικονίζει κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών στο άθροισμά τους.

2.5 Ιδιότητες σχέσεων

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε κάποιες ιδιότητες διμελών σχέσεων σε ένα σύνολο που είναι πολύ χρήσιμες.

Ανακλαστικότητα

Μια σχέση R στο A είναι *ανακλαστική* αν και μόνον αν τα ζευγάρια της μορφής $< x, x >$ είναι στην R, για κάθε $x \in A$.

Παραδείγματος χάρη, ας πάρουμε το σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ και τις σχέσεις

(2-12) $\{< 1,1 >, < 2,2 >, < 3,3 >, < 3,1 >\}$, $\{< 1,1 >, < 2,2 >\}$.

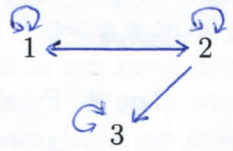
Η πρώτη είναι ανακλαστική, διότι περιέχει τα ζεύγη $< 1,1 >$, $< 2,2 >$, $< 3,3 >$, ενώ η δεύτερη δεν είναι, διότι δεν περιέχει το ζεύγος $< 3,3 >$. Ένας άλλος τρόπος να διατυπωθεί ο ορισμός της ανακλαστικότητας είναι να πούμε ότι μια σχέση R στο A είναι ανακλαστική αν και μόνον αν η id_A, η ταυτοτική σχέση στο A, είναι υποσύνολο της R. Η σχέση "έχει τα ίδια γενέθλια με" είναι ανακλαστική στο σύνολο των ανθρώπων.

Συμμετρικότητα

Μια σχέση R στο σύνολο A είναι *συμμετρική* αν και μόνον αν για κάθε ζευγάρι $< x, y >$ στην R το ζευγάρι $< y, x >$ είναι επίσης στην R. Είναι σπουδαίο ότι ο ορισμός αυτός δεν απαιτεί κάθε διατεταγμένο ζευγάρι του $A \times A$ να είναι στην R. Για να είναι μια σχέση R συμμετρική πρέπει πάντα να αληθεύει

εξετάζοντας ποιές από τις ιδιότητες που ορίσαμε έχει η καθεμιά.
(2-21) Παράδειγμα: R_π είναι η σχέση "είναι πατέρας του" στο σύνολο όλων των ανθρώπων, Η R_π δεν είναι ανακλαστική (κανένας δεν είναι πατέρας του εαυτού του), δεν είναι συμμετρική (αν ο x είναι πατέρας του y, τότε ποτέ δεν είναι αλήθεια ότι ο y είναι πατέρας του x), δεν είναι μεταβατική (αν ο x είναι πατέρας του y και ο y πατέρας του z, τότε ο x είναι παππούς αλλά όχι πατέρας του z) και δεν είναι ολική (υπάρχουν διαφορετικά άτομα x και y στο A τέτοια που ούτε ο x είναι πατέρας του y ούτε ο y είναι πατέρας του x).
(2-22) Παράδειγμα: R είναι η σχέση "μεγαλύτερος από" ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ των θετικών ακεραίων. Το $\mathbb{Z}$ περιέχει άπειρο αριθμό στοιχείων και το ίδιο κάνει και η R, αλλά είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις σχετικές ιδιότητες της R από τη γνώση μας των γενικών ιδιοτήτων των ακεραίων. Η R δεν είναι ανακλαστική (κανείς αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος από τον εαυτό του), δεν είναι συμμετρική (από την $x > y$ δεν έπεται η $y > x$), είναι όμως μεταβατική (αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$) και ολική (για κάθε ζεύγος διαφορετικών ακεραίων x και y, είτε $x > y$ είτε $y > x$).
(2-23) Παράδειγμα: R_α είναι η σχέση "έχει την ίδια ηλικία με", στο σύνολο των ανθρώπων. Η R_α είναι ανακλαστική (καθένας έχει την ίδια ηλικία με τον εαυτό του), συμμετρική (αν ο x έχει την ίδια ηλικία με τον y, τότε και ο y έχει την ίδια ηλικία με τον x), μεταβατική (αν οι x, y έχουν την ίδια ηλικία και το ίδιο οι y, z, τότε ο x έχει την ίδια ηλικά με τον z), αλλά όχι ολική (υπάρχουν διαφορετικά άτομα στο A που δεν έχουν την ίδια ηλικία).

Για την καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων μιας σχέσης, χρησιμοποιούμε διαγράμματα στα οποία τα στοιχεία του συνόλου παριστάνονται από σημεία με ονόματα και το γεγονός ότι ένα ζεύγος $< a, b >$ ανήκει στη σχέση παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινά από το a και τελειώνει στο b. Παραδείγματος χάρη, η σχέση $R = \{< 1,2 >, < 2,1 >, < 2,2 >, < 1,1 >, < 2,3 >, < 3,3 >\}$ αναπαρίσταται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Διάγραμμα 2-7: Διάγραμμα σχέσης.

Είναι προφανές από το διάγραμμα ότι η σχέση είναι ανακλαστική, αφού κάθε σημείο φέρει ένα βρόχο. Η σχέση είναι μη συμμετρική, διότι το 3 δε σχετίζεται με το 2 ενώ το 2 σχετίζεται με το 3. Είναι μη μεταβατική, αφού το 1 σχετίζεται με το 2 και το 2 με το 3, αλλά δεν υπάρχει κατ' ευθείαν βέλος από το 1 στο 3.

Αν μια σχέση είναι ολική, κάθε ζευγάρι διαφορετικών σημείων στο διάγραμμά της θα είναι απ' ευθείας ενωμένο με ένα βέλος. Βλέπουμε ότι η R δεν είναι