

Κεφ. 2, σελ. 29, άσκηση 13

(1) xSy ανν (xRy και yRx)

R : ανακλαστική και ~~συμμετρική~~ μεταβατική

I Από η R είναι ανακλαστική έπεται ότι για κάθε ζεύγος $x \in A$ και $y \in A$ τέτοιο ώστε $x=y$, ισχύει ότι xRy και yRx . Άρα από το (1) [συνεπώς από ~~αριστερά~~^{δεξιά} προς ~~δεξιά~~^{αριστερά}] συμπεραίνουμε ότι xSy . Επομένως η S είναι ανακλαστική.

II Έστω xSy . Άρα από το (1) συμπεραίνουμε ότι yRx και xRy . ~~Από το (1) (αριστερά προς δεξιά)~~ Επομένως, κάνοντας ζευγάρι χρήση του (1) (δεξιά προς αριστερά), συμπεραίνουμε ότι yRx . Άρα η S είναι συμμετρική.

III Έστω ότι xSy και ySz . Από το (1) (αριστερά προς δεξιά) συμπεραίνουμε ότι (α) (xRy και yRx) και (β) (yRz και zRy). Από όμως xRy και yRz και καθώς η R είναι μεταβατική, ισχύει ότι xRz . Από επίσης zRy και yRx και η R είναι μεταβατική, ισχύει ότι zRx . Επομένως δείχνει ότι xRz και zRx . Άρα από το (1) (δεξιά προς αριστερά) συμπεραίνουμε ότι xSz . Άρα εάν ισχύει η υπόθεση ότι xSy και ySz , ισχύει επίσης ότι xSz . Η S είναι λοιπόν μεταβατική.

Από τα συμπεράσματα I, II και III (ανακλαστικότητα, συμμετρικότητα, μεταβατικότητα) έπεται εξ ορισμού ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας.