ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 3.

12/4/2016.

Άσκηση 1. Αποδείξτε αναλυτικά ότι $Y \sim \mathbb{N}$, όπου Y είναι το σύνολο $\left\{ \frac{1}{2n-3} : n \text{ είναι αρνητικός ακέραιος} \right\}$.

(2 μον.)

Άσκηση 2. Αποδείξτε αναλυτικά ότι $A \times B \sim B \times A$, όπου A, B είναι οποιαδήποτε σύνολα.

(2 μον.)

Άσκηση 3. Αποδείξτε αναλυτικά ότι το σύνολο $\mathbb{N}_\pi \times \mathbb{Z}_-$ είναι απαριθμήσιμο, όπου $\mathbb{N}_\pi$ είναι το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών και $\mathbb{Z}_-$ είναι το σύνολο των αρνητικών ακεραίων αριθμών.

(3 μον.)

Άσκηση 4. Αποδείξτε αναλυτικά ότι $[-1,1] \sim (-3,2)$. (3 μον.)

(Υπενθύμιση: $[-1,1] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$

$(-3,2) = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 2\}$.)

Παράδοση λύσεων. Οι λύσεις των ασκήσεων (χειρόγραφες ή γραμμένες σε υπολογιστή) πρέπει να παραδοθούν μέχρι τις 7 μ.μ. την Δευτέρα, 18/4/2016. Η παράδοση γίνεται α) ηλεκτρονικά (cdimitr@phs.uoa.gr) ή β) στο γραφείο του διδάσκοντα (αν λείπει, ρίξτε τις κάτω από την πόρτα) ή γ) στη γραμματοθυρίδα του διδάσκοντα (βρίσκεται στο χώρο απέναντι από την είσοδο της Γραμματείας του Τμήματος ΜΙΘΕ).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
ΛΥΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1. Επειδή η ισοπληθικότητα είναι συμμετρική σχέση, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{N} \sim Y$, δηλαδή να βρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to Y$ που να είναι 1-1 και επί.
Παίρνοντας υπόψη τον ορισμό του συνόλου Y ορίζουμε $f: \mathbb{N} \to Y$ με τον τύπο $f(n) = \frac{1}{2(-n-1)-3} = \frac{1}{-2n-2-3} = -\frac{1}{2n+5}$.

Στη συνέχεια, ελέγχουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.
(1-1) Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, αν $n \neq m$, τότε $f(n) \neq f(m)$. Αλλιώς, με βάση τη μέθοδο αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, αν $f(n) = f(m)$, τότε $n = m$.
Έστω λοιπόν ότι $f(n) = f(m)$, για τυχόντα $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει $-\frac{1}{2n+5} = -\frac{1}{2m+5}$, άρα $2n+5 = 2m+5$, οπότε $n = m$.

(επί) Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $y \in Y$ υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος που $f(m) = y$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν στοιχείο y του Y. Από τον ορισμό του Y, υπάρχει αρνητικός ακέραιος n τέτοιος που $y = \frac{1}{2n-3}$. Όμως κάθε αρνητικός ακέραιος γράφεται με τη μορφή $-m-1$, όπου το m διατρέχει το σύνολο $\mathbb{N}$. Άρα υπάρχει φυσικός m τέτ. που $f(m) = -\frac{1}{2m+5} = \frac{1}{2(-m-1)-3} = \frac{1}{2n-3} = y$.

Άσκηση 2. Αρκεί να βρούμε συνάρτηση από το $A \times B$ στο $B \times A$, που να είναι 1-1 και επί. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$f: A \times B \to B \times A \text{ με } f(\langle a, b \rangle) = \langle b, a \rangle.$$

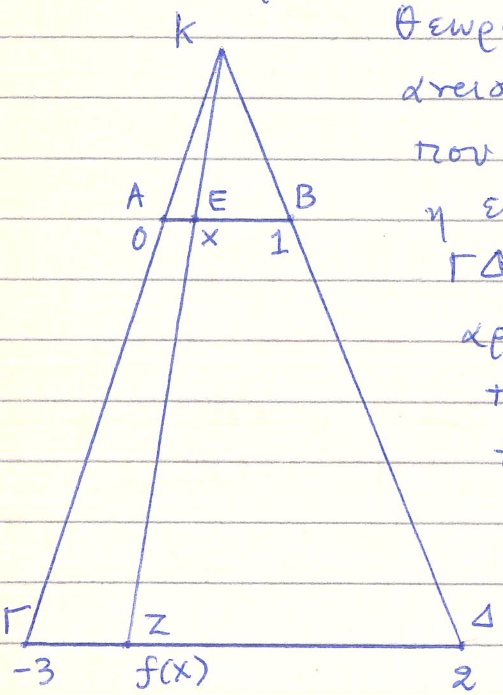
Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί.
(1-1) Αρκεί να δείξουμε ότι, για τυχόντα στοιχεία $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$ του $A \times B$, αν $f(\langle a, b \rangle) = f(\langle c, d \rangle)$, τότε $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$.
Έστω λοιπόν ότι $f(\langle a, b \rangle) = f(\langle c, d \rangle)$. Τότε, με βάση τον τύπο

της f, πρέπει να ισχύει $\langle b,a\rangle=\langle d,c\rangle$. Με βάση τώρα τον ορισμό των διατεταγμένων ζευγών, πρέπει $b=d$ και $a=c$. Συνεπώς $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
(επί) Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $B\times A$ αποτελεί τιμή (μέσω της f) κάποιου στοιχείου του $A\times B$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν στοιχείο του $B\times A$, το οποίο θα είναι της μορφής $\langle b,a\rangle$, όπου $b\in B$ και $a\in A$. Τότε το ζεύγος $\langle a,b\rangle$ ανήκει στο σύνολο $A\times B$ και προφανώς $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

<u>Άσκηση 3.</u> Αποδεικνύουμε κατ' αρχάς ότι $\mathbb{N}_\pi\sim\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}_-\sim\mathbb{N}$. Για να το δείξουμε, θεωρούμε τις συναρτήσεις
$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\pi$ με $f(n)=2n+1$ και
$g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_-$ με $g(n)=-n-1$.
Εύκολα δείχνουμε ότι οι f,g είναι 1-1 και επί. Έτσι προκύπτει ότι $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_\pi$ και $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}_-$. Συνεπώς (με βάση άσκηση που κάναμε στην τάξη) ισχύει $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_\pi\times\mathbb{Z}_-$. Όμως αποδείξαμε στο μάθημα ότι $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$. Συνεπώς ισχύει $\mathbb{N}_\pi\times\mathbb{Z}_-\sim\mathbb{N}$, οπότε το σύνολο $\mathbb{N}_\pi\times\mathbb{Z}_-$ είναι απαριθμήσιμο.

<u>Άσκηση 4.</u> Αρκεί, με βάση το θεώρημα Schröder-Bernstein, να δείξουμε ότι $[-1,1]\lesssim(-3,2)$ και $(-3,2)\lesssim[-1,1]$, δηλαδή ότι υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το $[-1,1]$ στο $(-3,2)$ και υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το $(-3,2)$ στο $[-1,1]$.
α) Παρατηρούμε ότι $[-1,1]\subseteq(-3,2)$. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $f:[-1,1]\to(-3,2)$ με $f(x)=x$ είναι 1-1, οπότε προκύπτει το ένα ζητούμενο, δηλαδή ότι $[-1,1]\lesssim(-3,2)$.
β) Θα δείξουμε πρώτα ότι το σύνολο $(-3,2)$ είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του $[-1,1]$. Επιλέγουμε υποσύνολο του $[-1,1]$ που να είναι ανοικτό αριστερά και δεξιά (όπως είναι και το διάστημα $(-3,2)$). Ας πάρουμε, π.χ., το σύνολο $(0,1)$. Για να δείξουμε ότι $(-3,2)\sim(0,1)$, ακολουθούμε τη μέθοδο που

περιγράψαμε στο μάθημα· για ευκολία, θα δείξουμε ότι $(0,1) \sim (-3,2)$,
δηλαδή θα ορίσουμε συνάρτηση $f:(0,1) \longrightarrow (-3,2)$ που είναι
1-1 και επί. Θα χρησιμοποιήσουμε σχήμα, που προκύπτει
αν πάρουμε σε παράλληλες ευθείες τα ευθύγραμμα τμήματα
$(0,1)$ και $(-3,2)$, ενώσουμε τα άκρα τους με ευθείες και
προεκτείνουμε τις ευθείες μέχρι να βρούμε την τομή τους.



Θεωρούμε τυχόντα αριθμό $x \in (0,1)$, που αντιστοιχεί στο σημείο Ε. Φέρουμε την ευθεία που περνάει από τα σημεία Κ και Ε. Αυτή η ευθεία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ, που αντιστοιχεί στον αριθμό $f(x)$. Χρησιμοποιώντας τώρα ομοιότητες τριγώνων, θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης f.

1) Το τρίγωνο ΚΑΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΚΓΖ (έχουν τις αντίστοιχες γωνίες ίσες), οπότε ισχύει
$$\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{KE}{KZ}.$$

2) Το τρίγωνο ΚΕΒ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΚΖΔ, οπότε ισχύει $\frac{KE}{KZ} = \frac{EB}{Z\Delta}$.

Επειδή η σχέση ισότητας είναι μεταβατική, από τα 1), 2) προκύπτει ότι $\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{EB}{Z\Delta}$, δηλαδή ότι $\frac{x-0}{f(x)-(-3)} = \frac{1-x}{2-f(x)}$.

Από την τελευταία εξίσωση, θα βρούμε τύπο για την $f(x)$. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x-0}{f(x)-(-3)} = \frac{1-x}{2-f(x)} \Leftrightarrow x\,(2-f(x)) = (1-x)(f(x)+3) \Leftrightarrow$$

$$2x - xf(x) = f(x) + 3 - xf(x) - 3x \Leftrightarrow 2x = f(x) + 3 - 3x \Leftrightarrow$$
$$f(x) = 2x + 3x - 3 \Leftrightarrow f(x) = 5x - 3$$

Έχοντας βρει τον τύπο της συνάρτησης f, όπως σε άλλες

λογισμούς, δείχνουμε ότι η f είναι 1-1 και επί.
Έτσι, δείξαμε ότι $(0,1) \sim (-3,2)$. Όμως $(0,1) \subseteq [-1,1]$, οπότε $(0,1) \lesssim [-1,1]$. Έπεται λοιπόν ότι $(-3,2) \lesssim [-1,1]$.
Από τα α), β) συμπεραίνουμε ότι $[-1,1] \sim (-3,2)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.