# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 2.
24/3/2015.

<u>Σημείωση.</u> Οι λύσεις πρέπει να παραδοθούν στο διδάσκοντα <u>πριν από το μάθημα της Δευτέρας, 30/3/2015.</u> Η παράδοση μπορεί να γίνει στο γραφείο του διδάσκοντα ή στην αίθουσα διδασκαλίας (πριν από την έναρξη του μαθήματος).

<u>Άσκηση 1.</u> Έστω $R$ η σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών που ορίζεται ως
$$R=\{\langle x,y\rangle \mid 2x+4y=16\}.$$
Βρείτε τα στοιχεία της $R$. Ποιό είναι το πεδίο ορισμού και ποιό το πεδίο τιμών; Βρείτε την αντίστροφη της $R$.

(1 μον.)

<u>Άσκηση 2.</u> Έστω $A=\{1,2\}$ και $B=\{a,b,c\}$. Πόσες σχέσεις υπάρχουν από το $A$ στο $B$; Πόσες από αυτές είναι συναρτήσεις από το $A$ στο $B$; Για ποιές από τις συναρτήσεις οι αντίστροφες σχέσεις είναι και αυτές συναρτήσεις από το $B$ στο $A$;

(1,5 μον.)

<u>Άσκηση 3.</u> Είναι αληθές και γιατί ότι για κάθε σύνολο $A$ ισχύει
$$(A\times A)\cap(A'\times A')=\emptyset;$$
(1,5 μον.)

<u>Άσκηση 4.</u> Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα $A, B, C$ ισχύει:
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$
(1,5 μον.)

<u>Άσκηση 5.</u> Δώστε παράδειγμα σχέσης στο σύνολο $A=\{1,2,3,4\}$ που είναι ανακλαστική και ολική, αλλά όχι συμμετρική.

(1,5 μον.)

**Άσκηση 6.** Έστω A το σύνολο $\{1,2,3,4\}$.

α) Βρείτε μια σχέση ισοδυναμίας στο A, που να περιέχει ακριβώς δέκα (10) διατεταγμένα ζεύγη.

β) Βρείτε τη διαμέριση που επάγει στο A η ~~διαμέριση~~ σχέση αυτή.

(1,5 μον.)

**Άσκηση 7.** Θεωρούμε τη σχέση R στο σύνολο $\{1,2,3,4,\dots\}$ που ορίζεται ως εξής:

$xRy$ ανν ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $y$.

Είναι η R ανακλαστική; Συμμετρική; Μεταβατική; Ολική;
Είναι η R σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο αυτό;

(1,5 μον.)

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

<u>Άσκηση 1.</u> Για να βρούμε τα στοιχεία της R, βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης $2x+4y=16$, εξετάζοντας τιμές του x και του y μόνο στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Οι μόνες λύσεις της εξίσωσης είναι $\langle 0,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 6,1\rangle$, άρα

$$R=\{\langle 0,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,1\rangle\}.$$

Το πεδίο ορισμού της R είναι το σύνολο που περιέχει τους αριθμούς που εμφανίζονται ως πρώτες συντεταγμένες, ενώ το πεδίο τιμών της R είναι το σύνολο που περιέχει τις δεύτερες συντεταγμένες. Έτσι έχουμε

$$\text{π.ο.}R=\{0,2,4,6\} \quad \text{και} \quad \text{π.τ.}R=\{4,3,2,1\}.$$

Η αντίστροφη σχέση περιέχει τα στοιχεία της R με τις συντεταγμένες αντεστραμμένες. Έτσι έχουμε

$$R^{-1}=\{\langle 4,0\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,6\rangle\}.$$

<u>Άσκηση 2.</u> Το πλήθος των σχέσεων από το A στο B είναι το ίδιο με το πλήθος των υποσυνόλων του καρτεσιανού γινομένου $A\times B$. Επειδή το A έχει 2 στοιχεία και το B έχει 3 στοιχεία, το σύνολο $A\times B$ έχει $2.3=6$ στοιχεία και άρα το πλήθος των υποσυνόλων του $A\times B$, δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{P}(A\times B)$ είναι $2^6=2.2.2.2.2.2=64$. Υπάρχουν λοιπόν 64 σχέσεις από το A στο B.

Για να δούμε πόσες από τις 64 σχέσεις αυτές είναι συναρτήσεις, σκεφτόμαστε ως εξής: για κάθε στοιχείο του A υπάρχουν 3 υποψήφιες τιμές, δηλ. οι a, b, c. Άρα υπάρχουν $3.3=9$ συναρτήσεις από το A στο B, αφού το πλήθος των συνδυασμών τιμών της συνάρτησης που αντιστοιχούν στο 1 και τιμών που αντιστοιχούν στο 2 είναι 3.3. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις από το A στο B είναι οι ακόλουθες:

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$, $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$, $f_3=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle\}$

$f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$, $f_5=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$, $f_6=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$

$f_7=\{<1,c>,<2,a>\}$, $f_8=\{<1,c>,<2,b>\}$, $f_9=\{<1,c>,<2,c>\}$.

Οι αντίστροφες σχέσεις των συναρτήσεων αυτών είναι οι

$f_1^{-1}=\{<a,1>,<a,2>\}$, $f_2^{-1}=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_3^{-1}=\{<a,1>,<c,2>\}$

$f_4^{-1}=\{<b,1>,<a,2>\}$, $f_5^{-1}=\{<b,1>,<b,2>\}$, $f_6^{-1}=\{<b,1>,<c,2>\}$

$f_7^{-1}=\{<c,1>,<a,2>\}$, $f_8^{-1}=\{<c,1>,<b,2>\}$, $f_7^{-1}=\{<c,1>,<c,2>\}$.

Από αυτές, <u>καμία δεν είναι συνάρτηση από το B στο A</u>. Πράγματι, παρατηρούμε ότι σε όλες τις παραπάνω σχέσεις υπάρχει στοιχείο του $B=\{a,b,c\}$ που <u>δεν αντιστοιχίζεται</u> σε καμία τιμή στο $A=\{1,2\}$.

<u>Άσκηση 3.</u> Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής. Άρα υπάρχει κάποιο σύνολο A για το οποίο ισχύει

$$(A\times A)\cap(A'\times A')\neq\emptyset.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα διατεταγμένο ζεύγος που είναι κοινό στα δύο σύνολα, δηλαδή υπάρχει ζεύγος $<a,b>$ τέτοιο που $<a,b>\in A\times A$ και $<a,b>\in A'\times A'$. Από τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου, αυτό σημαίνει ότι $a\in A$ και $b\in A$ και ταυτόχρονα $a\in A'$ και $b\in A'$. Συνεπώς $a\in A\cap A'$ και $b\in A\cap A'$. Όμως γνωρίζουμε ότι $A\cap A'=\emptyset$, για κάθε σύνολο A. Έτσι έχουμε καταλήξει σε άτοπο, οπότε, με βάση τη μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο, συμπεραίνουμε ότι η αρχική υπόθεση δεν ισχύει. Συνεπώς είναι αληθές ότι για κάθε σύνολο A

$$(A\times A)\cap(A'\times A')=\emptyset.$$

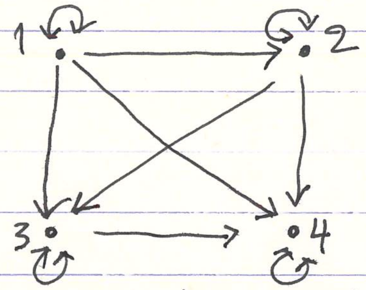
<u>Άσκηση 4.</u> Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί, με βάση την Αρχή της Έκτασης, να δείξουμε ότι

$$A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C) \text{ και}$$
$$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C).$$

Θα δείξουμε το πρώτο (το δεύτερο αποδεικνύεται όμοια).
Έστω λοιπόν $\langle a,b\rangle$ στοιχείο του Καρτεσιανού γινομένου $A\times(B\cap C)$. Τότε $a\in A$ και $b\in B\cap C$, άρα $a\in A$ και ($b\in B$ και $b\in C$). Έπεται ότι ($a\in A$ και $b\in B$) και ($a\in A$ και $b\in C$), άρα $\langle a,b\rangle\in A\times B$ και $\langle a,b\rangle\in A\times C$, οπότε

$$\langle a,b\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C),$$ δηλ. το ζητούμενο.

<u>Άσκηση 5.</u> Έστω $R$ η σχέση στο $A$ που αναζητούμε.
Για να είναι η $R$ ανακλαστική, πρέπει να περιλαμβάνει όλα τα ζεύγη της μορφής $\langle x,x\rangle$, όπου $x\in A$. Συνεπώς πρέπει να περιλαμβάνει τα ζεύγη $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle$ και $\langle 4,4\rangle$.
Για να είναι η $R$ ολική, πρέπει όλα τα ζεύγη (διαφορετικών) στοιχείων του $A$ να σχετίζονται με κάποιο τρόπο, δηλαδή
α) το 1 να σχετίζεται με το 2, το 3 και το 4
β) το 2 να σχετίζεται με το 1, το 3 και το 4
γ) το 3 να σχετίζεται με το 1, το 2 και το 4
δ) το 4 να σχετίζεται με το 1, το 2 και το 3.
Για να μην είναι η $R$ συμμετρική, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος στοιχείων που σχετίζονται με τον ένα τρόπο, αλλά όχι με τον άλλο.
Παράδειγμα σχέσης $R$ όπως ζητείται είναι η σχέση

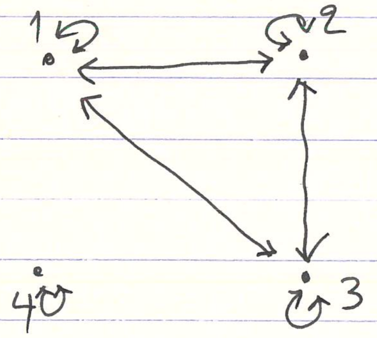



ή, με συνολοθεωρητικό συμβολισμό, η σχέση

$$\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}.$$

<u>Σημείωση.</u> Δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με τη μεταβατική ιδιότητα, αφού δεν αναφέρεται καθόλου στην εκφώνηση.

Άσκηση 6. α) Υπενθυμίζουμε καταρχάς ότι μια σχέση $R$ στο σύνολο $A$ είναι σχέση ισοδυναμίας, αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Έστω $R$ η ζητούμενη σχέση.
Για να είναι η $R$ ανακλαστική στο $A$, πρέπει να περιέχει τα ζεύγη $\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle$ και $\langle 4,4\rangle$ (δες λύση Άσκησης 5).
Για να είναι η $R$ συμμετρική στο $A$, πρέπει, για κάθε ζεύγος που ανήκει στην $R$ να ανήκει και το αντίστροφό του.
Για να είναι η $R$ μεταβατική στο $A$, πρέπει, για οποιαδήποτε στοιχεία $x,y,z\in A$, αν $\langle x,y\rangle\in R$ και $\langle y,z\rangle\in R$, τότε $\langle x,z\rangle\in R$.
Παίρνοντας υπόψη τα παραπάνω, καθώς και την απαίτηση η $R$ να περιέχει ακριβώς 10 διατεταγμένα ζεύγη, βλέπουμε ότι η ακόλουθη σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$ που περιέχει ακριβώς 10 στοιχεία:




ή, με συνολοθεωρητικό συμβολισμό, η σχέση

$$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}.$$

β) Για να βρούμε τη διαμέριση που η $R$ παραπάνω επάγει στο σύνολο $A$, θα βρούμε τις "κλάσεις ισοδυναμίας" των στοιχείων του $A$, δηλαδή για κάθε στοιχείο $x\in A$ θα βρούμε το σύνολο των $R$-συγγενών του:

$[1]_R=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $[3]_R=\{1,2,3\}$

$[2]_R=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $[4]_R=\{4\}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο (2) κλάσεις ισοδυναμίας, δηλαδή τα σύνολα $\{1,2,3\}$ και $\{4\}$. Άρα η διαμέριση που επάγει η $R$ στο $A$ είναι η ακόλουθη

$$\Delta_R = \{\{1,2,3\},\{4\}\}.$$

<u>Άσκηση 7.</u> Η $R$ θα είναι ανακλαστική ανν (δηλ. αν και μόνον αν) ισχύει $\langle x,x\rangle \in R$, για κάθε $x \in \{1,2,3,\ldots\}$, δηλαδή ανν

ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $x$, για κάθε $x\in\{\ldots\}$.

Προφανώς κάθε στοιχείο του συνόλου $A=\{1,2,3,4,\ldots\}$ είναι πολλαπλάσιο του εαυτού του, άρα η $R$ είναι ανακλαστική.

Η $R$ θα είναι συμμετρική ανν, για κάθε $x,y\in A$, αν $\langle x,y\rangle\in R$ τότε $\langle y,x\rangle\in R$, δηλαδή ανν, για κάθε $x,y\in A$,

αν ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $y$,

τότε ο $y$ είναι πολλαπλάσιο του $x$.

Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό δεν ισχύει· πράγματι, θέτοντας (π.χ.) $x=6$ και $y=3$, βλέπουμε ότι

ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $y$,

αλλά ο $y$ δεν είναι πολλαπλάσιο του $x$

(προσοχή: ο 6 είναι πολλαπλάσιο του 3, αλλά ο 3 είναι διαιρέτης και όχι πολλαπλάσιο του 6)

Συνεπώς η $R$ δεν είναι συμμετρική.

Η $R$ θα είναι μεταβατική ανν, για κάθε $x,y,z\in A$, αν $\langle x,y\rangle\in R$ και $\langle y,z\rangle\in R$, τότε $\langle x,z\rangle\in R$, δηλαδή ανν, για κάθε $x,y,z\in A$

αν ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $y$

και ο $y$ είναι πολλαπλάσιο του $z$,

τότε ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $z$.

Βλέπουμε ότι αυτό ισχύει· πράγματι, αν ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $y$ και ο $y$ είναι πολλαπλάσιο του $z$, τότε υπάρχουν $k,l\in A$ τέτοια που $x=k\cdot y$ και $y=l\cdot z$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$x=k\cdot(l\cdot z)=(k\cdot l)\cdot z,$$

δηλαδή ο $x$ προκύπτει από τον $z$ όταν πολλαπλασιάσουμε τον $z$ με τον αριθμό $k\cdot l$· άρα ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του $z$.

Συνεπώς η σχέση $R$ είναι μεταβατική.

Με δεδομένα ότι η R δεν είναι συμμετρική στο A, προκύπτει ότι η R δεν είναι σχέση ισοδυναμίας στο A.
Εξετάζουμε, τέλος, αν η R είναι ολική. Η R θα είναι ολική στο σύνολο A αν για κάθε x, y ∈ A (διαφορετικά) ισχύει <x, y> ∈ R ή <y, x> ∈ R. Με άλλα λόγια, η R θα είναι ολική στο A αν, για οποιαδήποτε στοιχεία x, y του A (διαφορετικά), ο x είναι πολλαπλάσιο του y ή ο y είναι πολλαπλάσιο του x. Βλέπουμε όμως ότι αυτό δεν ισχύει· παίρνοντας, π.χ. ως x το 3 και ως y το 5, διαπιστώνουμε ότι ούτε το 3 είναι πολλαπλάσιο του 5 ούτε το 5 πολλαπλάσιο του 3 (εννοούμε βέβαια "ακέραιο πολλαπλάσιο"). Συνεπώς η R δεν είναι ολική.