

Σημειώσεις για μάθημα 16-6-2025

Αξιώματα και κανόνες της SDL

$$(KD) \quad O(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$$

$$(PD) \quad Op \rightarrow \neg O \neg p$$

$$(RND) \text{ αν } p \text{ θεωρημα, τότε } Op \text{ θεωρημα}$$

Στο SDL αποδεικνύονται/παράγονται τα ακόλουθα

$$(OD) \quad \neg O \perp, \quad (ON) \quad OT$$

$$(RMD) \text{ αν } p \rightarrow q \text{ θεωρημα, τότε } Op \rightarrow Oq \text{ θεωρημα}$$

$$(RED) \text{ αν } p \leftrightarrow q \text{ θεωρημα, τότε } Op \leftrightarrow Oq \text{ θεωρημα.}$$

Αξιώματα και κανόνες της LKA

$$(K) \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

$$(T) \quad \Box p \rightarrow p$$

$$(M.g) \quad \Diamond p$$

$$(RN) \text{ αν } p \text{ θεωρημα, τότε } \Box p \text{ θεωρημα.}$$

Στο LKA αποδεικνύεται ο τύπος

$$O(Op \rightarrow p),$$

ο οποίος δεν αποδεικνύεται στο SDL.

Αξιώματα και κανόνες της VW

$$(KD) \quad 0(p \rightarrow q) \rightarrow (Op \rightarrow Oq)$$

$$(OD) \quad \neg 0 \perp$$

(RMD) αν $p \rightarrow q$ θεωρημα, τότε $Op \rightarrow Oq$ θεωρημα.

Στο VW αποδεικνύεται ο τύπος

$$(PD) \quad Op \rightarrow \neg \neg Op,$$

αλλά δεν αποδεικνύεται ο τύπος (ON) OT.

Από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι το VW είναι το αδυνάτεστο σύστημα από τα τρία, το LKA είναι το ισχυρότερο (και το SDL μεταξύ των άλλων σε ισχύ).

Σημείωση. Και στα τρία συστήματα που ορίσαμε παραπάνω, περιλαμβάνεται η κλασική προτασιακή λογική, δηλαδή

- όλες οι ταυτολογίες
- ο κανόνας Modus Ponens.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο τύπος

$$(Op \& O\neg p) \leftrightarrow 0 \perp \quad (10.35, \text{κατάρρευση})$$

είναι θεωρημα σε κάθε σύστημα που περιέχει το αξίωμα (KD) και τον κανόνα (RMD) (και επομένως τον κανόνα (RED)).

1^ο μέρος: $\vdash (Op \& O\neg p) \rightarrow O\perp$.

1. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow \perp)$ Δεώρημα προτασ. λογικής
2. $Op \rightarrow O(\neg p \rightarrow \perp)$ 1, κανόνας RMD.
3. $O(\neg p \rightarrow \perp) \rightarrow (O\neg p \rightarrow O\perp)$ αξίωμα KD
4. $Op \rightarrow (O\neg p \rightarrow O\perp)$ 2, 3, υποδεικνός συλλογ.
5. $[Op \rightarrow (O\neg p \rightarrow O\perp)] \rightarrow [(Op \& O\neg p) \rightarrow O\perp]$ Δεώρημα προτ. λογικής
(επεξήγηση: ο προτασιακός τύπος $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \& Q) \rightarrow R)$ είναι ταυτολογία και άρα τυπικό Δεώρημα σην προτασ. λογική)
6. $(Op \& O\neg p) \rightarrow O\perp$ 4, 5, Modus Ponens.

2^ο μέρος: $\vdash O\perp \rightarrow (Op \& O\neg p)$

1. $\perp \rightarrow p$ προτ. λογική (ο τύπος $\perp \rightarrow P$ είναι ταυτολογία, για κάθε τύπο P , άρα είναι τυπικό Δεώρημα)
2. $\perp \rightarrow \neg p$
3. $O\perp \rightarrow Op$ 1, κανόνας RMD
4. $O\perp \rightarrow O\neg p$ 2, " "
5. $O\perp \rightarrow (Op \& O\neg p)$ 3, 4, προτασιακή λογική