

Βασικά Μαθηματικά

Συναρτήσεις, παράγωγοι και ολοκληρώματα

Χρήστος Θωμαδάκης

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
cthomadak@aueb.gr

Δ.Π.Μ.Σ. «Βιοστατιστική και Επιστήμη Δεδομένων Υγείας»

- Μάθημα: **Βασικά Μαθηματικά**.
- Ακροατήριο: φοιτητές και φοιτήτριες του ΠΜΣ Βιοστατιστικής, κυρίως από ιατρική ή βιοϊατρική κατεύθυνση.
- Στόχος: να θυμηθούμε βασικές μαθηματικές έννοιες που εμφανίζονται συχνά στη Στατιστική και τη Βιοστατιστική.
- Κεντρική ιδέα: **οι μαθηματικές συναρτήσεις είναι εργαλεία περιγραφής σχέσεων, μεταβολών και πιθανοτήτων.**

- Συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις.
- Γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις.
- Ρυθμός μεταβολής και παράγωγος.
- Μονοτονία, μέγιστα και ελάχιστα.
- Βελτιστοποίηση σε απλά στατιστικά παραδείγματα.
- Βασικά ολοκληρώματα και σύνδεση με πιθανότητες.

Γιατί χρειαζόμαστε συναρτήσεις στη Βιοστατιστική

- Στη Βιοστατιστική συχνά θέλουμε να περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων ποσοτήτων.
- Παραδείγματα:
 - χρόνος από την έναρξη θεραπείας και επίπεδο ενός βιοδείκτη,
 - δόση φαρμάκου και αναμενόμενη απόκριση,
 - ηλικία και κίνδυνος εμφάνισης ενός συμβάντος.
- Μια μαθηματική συνάρτηση μάς δίνει έναν σύντομο τρόπο να γράψουμε μια τέτοια σχέση.

Τι είναι συνάρτηση

- Μια συνάρτηση αντιστοιχίζει σε κάθε τιμή του x μία και μόνο μία τιμή του y .
- Γράφουμε:

$$y = f(x).$$

- Το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**.
- Το $y = f(x)$ λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή** ή τιμή της συνάρτησης στο x .
- Παράδειγμα: αν x είναι ο χρόνος από την έναρξη θεραπείας, το $f(x)$ μπορεί να είναι η αναμενόμενη τιμή των CD4 στο χρόνο x .

- Το **πεδίο ορισμού** είναι οι τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η συνάρτηση.
- Το **σύνολο τιμών** είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει το $f(x)$.
- Παράδειγμα:

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

- Εδώ πρέπει να έχουμε $x \geq 0$, επειδή η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν είναι πραγματικός αριθμός.
- Άρα το πεδίο ορισμού είναι $[0, \infty)$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

- Η γραφική παράσταση δείχνει όλα τα σημεία:

$$(x, f(x)).$$

- Μας βοηθά να δούμε αν η συνάρτηση αυξάνεται, μειώνεται ή έχει καμπυλότητα.
- Στο παράδειγμα φαίνεται η συνάρτηση:

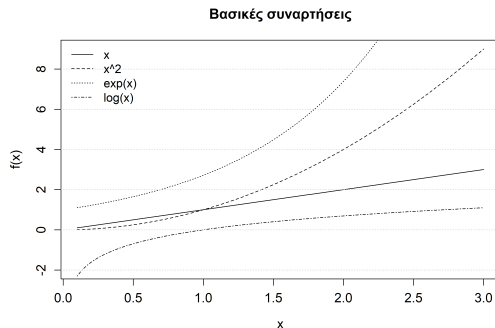
$$f(x) = x^2.$$



- Μερικές συναρτήσεις που εμφανίζονται συχνά:

$$x, \quad x^2, \quad e^x, \quad \log(x).$$

- Η γραμμική συνάρτηση περιγράφει σταθερή μεταβολή.
- Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση εμφανίζονται συχνά σε στατιστικά μοντέλα.



- Η γραμμική συνάρτηση έχει μορφή:

$$y = a + bx.$$

- Το a είναι η τιμή του y όταν $x = 0$. Λέγεται intercept ή σταθερός όρος.
- Το b είναι η **κλίση** της ευθείας.
- Η κλίση δείχνει πόσο αλλάζει το y όταν το x αυξάνεται κατά μία μονάδα.
- Αν $b > 0$, η ευθεία είναι αύξουσα. Αν $b < 0$, η ευθεία είναι φθίνουσα.

Τι σημαίνει η κλίση

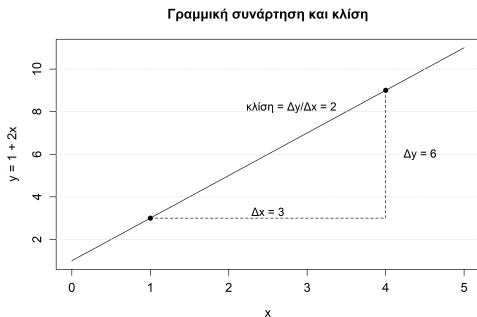
- Για δύο σημεία της ευθείας:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2),$$

η κλίση είναι:

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

- Ερμηνεία: μεταβολή του y ανά μία μονάδα μεταβολής του x .

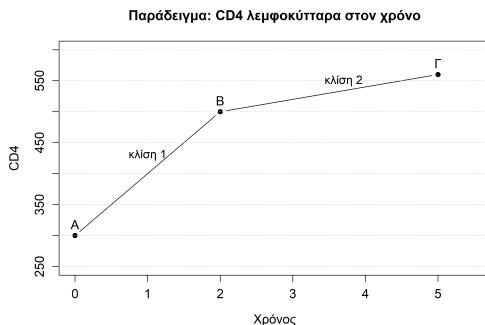


Παράδειγμα με CD4 λεμφοκύτταρα

- Έστω ότι έχουμε τρεις τιμές CD4 στον χρόνο:

$$A = (0, 300), \quad B = (2, 500),$$

- Η μεταβολή από το A στο B δεν είναι ίδια με τη μεταβολή από το B στο Γ .
- Άρα η έννοια της κλίσης εξαρτάται από το χρονικό διάστημα που εξετάζουμε.



Άσκηση στην κλίση

- Με βάση τα σημεία:

$$A = (0, 300), \quad B = (2, 500), \quad \Gamma = (5, 560),$$

υπολογίστε:

κλίση από A σε B ,

και

κλίση από B σε Γ .

- Τι εκφράζει κάθε κλίση στο συγκεκριμένο παράδειγμα;
- Είναι λογικό να μιλήσουμε για μία μοναδική κλίση σε όλη την περίοδο;

- Αν γνωρίζουμε ένα σημείο (x_0, y_0) και την κλίση b , τότε η ευθεία γράφεται:

$$y - y_0 = b(x - x_0).$$

- Παράδειγμα: αν η ευθεία περνά από το σημείο $(2, 8)$ και έχει κλίση -2 , τότε:

$$y - 8 = -2(x - 2).$$

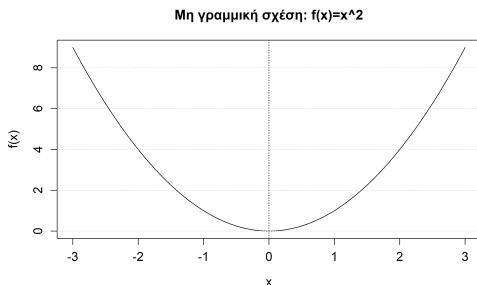
- Άρα:

$$y = 12 - 2x.$$

- Δεν είναι όλες οι σχέσεις γραμμικές.
- Για παράδειγμα:

$$f(x) = x^2.$$

- Η κλίση δεν είναι σταθερή σε όλα τα σημεία.
- Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την τιμή του x .

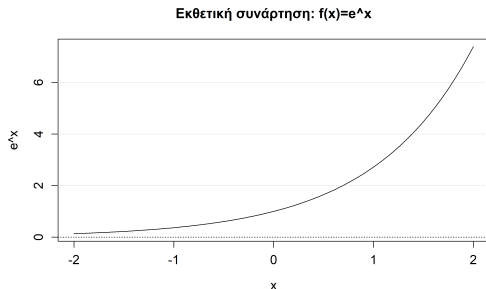


Η εκθετική συνάρτηση

- Η εκθετική συνάρτηση έχει μορφή:

$$f(x) = e^x.$$

- Είναι πάντα θετική.
- Αυξάνεται γρήγορα όσο μεγαλώνει το x .
- Εμφανίζεται συχνά σε μοντέλα ανάπτυξης, κινδύνου και πιθανοφάνειας.

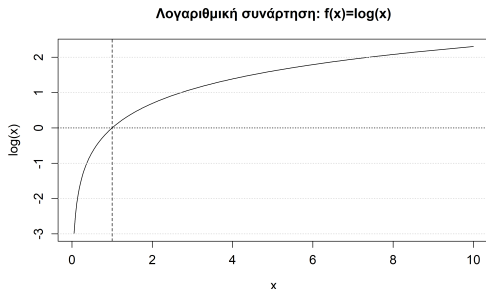


Η λογαριθμική συνάρτηση

- Η λογαριθμική συνάρτηση έχει μορφή:

$$f(x) = \log(x).$$

- Ορίζεται μόνο για $x > 0$.
- Είναι η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης.
- Χρησιμοποιείται συχνά για θετικές και έντονα ασύμμετρες μεταβλητές.



- Για θετικούς αριθμούς a, b :

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

- Για $a > 0$:

$$\log(a^b) = b \log(a).$$

- Η εκθετική και ο λογάριθμος αναιρούν η μία την άλλη:

$$\log(e^x) = x, \quad e^{\log(x)} = x.$$

- Αυτές οι ιδιότητες εμφανίζονται συχνά σε πιθανοφάνειες και στατιστικά μοντέλα.

Γιατί χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς

- Σε δεδομένα υγείας πολλές μεταβλητές είναι θετικές και ασύμμετρες.
- Παραδείγματα: χρόνοι, συγκεντρώσεις, βιοδείκτες, επίπεδα ιικού φορτίου.
- Συχνά χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς όπως:

$$\log(Y), \quad \sqrt{Y}.$$

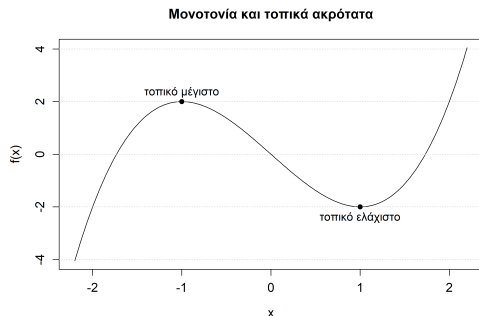
- Ο μετασχηματισμός μπορεί να κάνει τη σχέση πιο απλή ή πιο κοντά σε γραμμική.
- Δεν είναι απλώς τεχνικό βήμα: αλλάζει και την ερμηνεία του μοντέλου.

Αύξουσα και φθίνουσα συνάρτηση

- Μια συνάρτηση είναι **αύξουσα** όταν, όσο μεγαλώνει το x , μεγαλώνει και το $f(x)$.
- Μια συνάρτηση είναι **φθίνουσα** όταν, όσο μεγαλώνει το x , μικραίνει το $f(x)$.
- Στην πράξη, μας ενδιαφέρει να περιγράψουμε την κατεύθυνση της σχέσης.
- Παράδειγμα: μεγαλύτερη δόση μπορεί να συνδέεται με μεγαλύτερη ή μικρότερη αναμενόμενη απόκριση, ανάλογα με το φαινόμενο.

Μέγιστα και ελάχιστα δισαιθητικά

- Σε ορισμένες συναρτήσεις υπάρχουν σημεία όπου η τιμή είναι τοπικά μεγαλύτερη ή μικρότερη από τις γειτονικές τιμές.
- Αυτά τα σημεία λέγονται **τοπικά μέγιστα** και **τοπικά ελάχιστα**.
- Αργότερα θα δούμε ότι οι παράγωγοι μάς βοηθούν να τα εντοπίζουμε.



- Σε μια ντετερμινιστική σχέση, η τιμή του Y καθορίζεται πλήρως από την τιμή του X .
- Παράδειγμα:

$$Y = a + bX.$$

- Αν ξέρουμε το X , τότε ξέρουμε ακριβώς το Y .
- Τέτοιες σχέσεις είναι χρήσιμες για να καταλάβουμε τη μαθηματική δομή ενός μοντέλου.
- Όμως τα πραγματικά δεδομένα σπάνια ακολουθούν τέλεια μια τέτοια σχέση.

- Στα πραγματικά δεδομένα υπάρχει τυχαιότητα, μεταβλητότητα και σφάλμα μέτρησης.
- Έτσι, αντί για:

$$Y = a + bX,$$

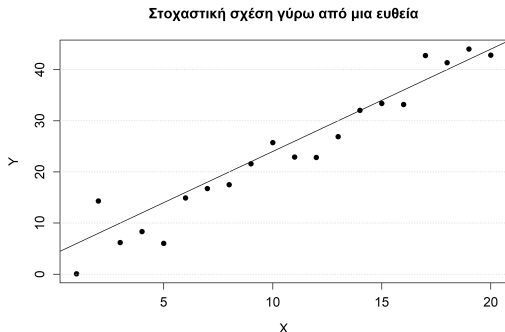
γράφουμε συχνά:

$$Y = a + bX + \varepsilon.$$

- Ο όρος ε εκφράζει την τυχαία απόκλιση από τη μέση σχέση.
- Αυτή είναι η μετάβαση από μια μαθηματική σχέση σε ένα στατιστικό μοντέλο.

Δεδομένα γύρω από μια ευθεία

- Η ευθεία περιγράφει τη μέση τάση.
- Τα σημεία δεν βρίσκονται όλα ακριβώς πάνω στην ευθεία.
- Αυτό είναι φυσιολογικό στα πραγματικά δεδομένα.
- Η Στατιστική προσπαθεί να περιγράψει τόσο τη μέση σχέση όσο και τη μεταβλητότητα γύρω από αυτή.



Η μέση σχέση σε γραμμικό μοντέλο

- Σε ένα απλό γραμμικό μοντέλο γράφουμε:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon.$$

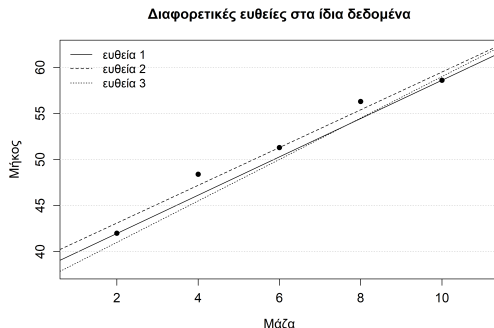
- Η μέση τιμή του Y για δεδομένο X είναι:

$$E(Y | X) = \beta_0 + \beta_1 X.$$

- Το β_0 είναι ο σταθερός όρος.
- Το β_1 είναι η μέση μεταβολή του Y όταν το X αυξάνεται κατά μία μονάδα.

Ποια ευθεία είναι η καλύτερη

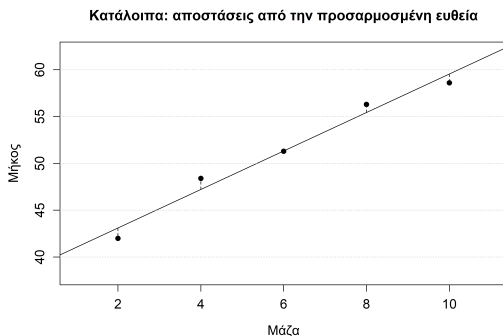
- Σε ένα διάγραμμα διασποράς μπορούμε να σχεδιάσουμε πολλές διαφορετικές ευθείες.
- Με το μάτι δεν υπάρχει μοναδική αντικειμενική επιλογή.
- Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο για το τι σημαίνει «καλύτερη» ευθεία.



- Για κάθε παρατήρηση έχουμε:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

- Το e_i λέγεται **κατάλοιπο**.
- Είναι η κατακόρυφη απόσταση του σημείου από την προσαρμοσμένη ευθεία.
- Μικρά κατάλοιπα σημαίνουν ότι η ευθεία περιγράφει καλά τα δεδομένα.



Η ιδέα των ελαχίστων τετραγώνων

- Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων επιλέγει την ευθεία που κάνει μικρό το άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

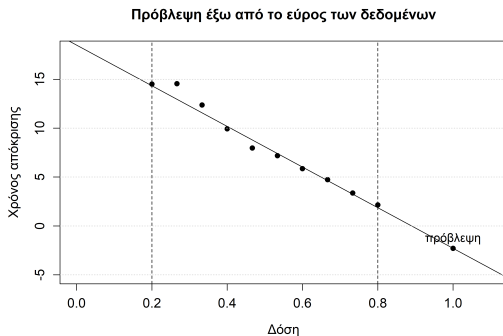
- Αν $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$, τότε θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

- Αυτή είναι μια απλή αλλά πολύ σημαντική ιδέα βελτιστοποίησης.

Προβλέψεις έξω από τα δεδομένα

- Μια ευθεία μπορεί να περιγράφει καλά τα δεδομένα στο εύρος που παρατηρήσαμε.
- Αυτό δεν σημαίνει ότι ισχύει και πολύ έξω από αυτό το εύρος.
- Η πρόβλεψη εκτός του παρατηρημένου εύρους λέγεται *extrapolation*.
- Μπορεί να οδηγήσει σε μη ρεαλιστικές προβλέψεις.



Γιατί χρειαζόμαστε παραγώγους

- Οι παράγωγοι μάς βοηθούν να περιγράψουμε ρυθμούς μεταβολής.
- Μας επιτρέπουν να εντοπίζουμε μέγιστα και ελάχιστα.
- Είναι βασικό εργαλείο για τη βελτιστοποίηση.
- Στη Στατιστική, εμφανίζονται όταν θέλουμε να:
 - ελαχιστοποιήσουμε ένα άθροισμα τετραγώνων,
 - μεγιστοποιήσουμε μια πιθανοφάνεια,
 - μελετήσουμε την ευαισθησία μιας ποσότητας σε μια παράμετρο.

- Η μέση μεταβολή μιας συνάρτησης από το x στο $x + h$ είναι:

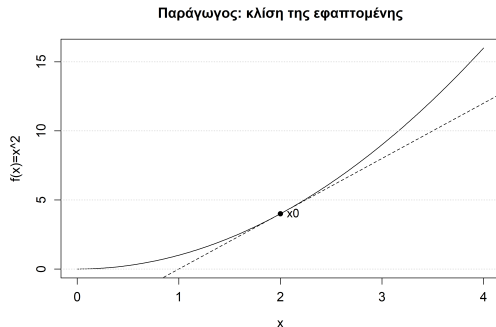
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

- Αν το h είναι μεγάλο, παίρνουμε μια μέση κλίση σε ένα διάστημα.
- Αν το h γίνει πολύ μικρό, προσεγγίζουμε τη στιγμιαία μεταβολή.
- Η στιγμιαία μεταβολή είναι η ιδέα πίσω από την παράγωγο.

- Η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης.
- Στο παράδειγμα:

$$f(x) = x^2.$$

- Στο σημείο $x_0 = 2$, η εφαπτομένη έχει κλίση $f'(2) = 4$.



- Η παράγωγος της f στο σημείο x ορίζεται ως :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Η ποσότητα αυτή εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο x .
- Στην πράξη, τη χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε πώς αλλάζει μια συνάρτηση όταν αλλάζει λίγο το x .

- Μερικοί βασικοί κανόνες:

$$(c)' = 0, \quad (x)' = 1,$$

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

- Για άθροισμα συναρτήσεων:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

- Για σταθερά c :

$$(cf)' = cf'.$$

- Αν

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4,$$

τότε

$$f'(x) = 6x + 2.$$

- Αν

$$f(x) = e^x + 2x,$$

τότε

$$f'(x) = e^x + 2.$$

- Αν

$$f(x) = \log x + x^2,$$

τότε

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x.$$

- Αν έχουμε γινόμενο δύο συναρτήσεων, τότε:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- Παράδειγμα:

$$h(x) = x^2 e^x.$$

- Τότε:

$$h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x.$$

- Δηλαδή παραγωγίζουμε τον πρώτο παράγοντα και μετά τον δεύτερο, κρατώντας κάθε φορά τον άλλο σταθερό.

- Αν έχουμε σύνθεση συναρτήσεων:

$$f(g(x)),$$

τότε:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

- Παράδειγμα:

$$h(x) = e^{2x}.$$

- Εδώ η εξωτερική συνάρτηση είναι e^u και η εσωτερική είναι $u = 2x$.
- Άρα:

$$h'(x) = 2e^{2x}.$$

- Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$f_1(x) = 4x^3 - 2x + 1,$$

$$f_2(x) = \log x + 3x^2,$$

$$f_3(x) = e^{-x}.$$

- Σκεφτείτε ποιον κανόνα χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση.
- Για την τρίτη συνάρτηση χρειάζεται ο κανόνας αλυσίδας.

- Η παράγωγος μάς λέει αν μια συνάρτηση αυξάνεται ή μειώνεται.
- Αν σε ένα διάστημα ισχύει:

$$f'(x) > 0,$$

τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό.

- Αν σε ένα διάστημα ισχύει:

$$f'(x) < 0,$$

τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

- Αν $f'(x) = 0$, τότε η συνάρτηση έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

- Για να βρούμε υποψήφια σημεία για μέγιστα ή ελάχιστα, λύνουμε:

$$f'(x) = 0.$$

- Η δεύτερη παράγωγος βοηθά να διακρίνουμε το είδος του ακροτάτου.
- Αν:

$$f''(x_0) > 0,$$

τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο.

- Αν:

$$f''(x_0) < 0,$$

τότε έχουμε τοπικό μέγιστο.

Παράδειγμα βελτιστοποίησης

- Έστω:

$$f(x) = x - 1 - \log x, \quad x > 0.$$

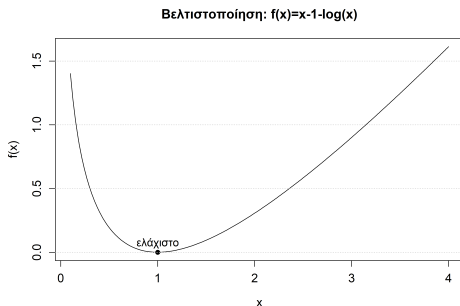
- Η παράγωγος είναι:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

- Λύνουμε:

$$1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

- Το σημείο $x = 1$ είναι σημείο ελαχίστου.



- Πολλές φορές μια συνάρτηση εξαρτάται από περισσότερες από μία μεταβλητές.
- Παράδειγμα:

$$f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

- Η μερική παράγωγος ως προς β_0 συμβολίζεται:

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_0}.$$

- Η ιδέα είναι ότι παραγωγίζουμε ως προς μία μεταβλητή, κρατώντας τις άλλες σταθερές.

Ελάχιστα τετράγωνα και παράγωγοι

- Στα ελάχιστα τετράγωνα θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

- Αυτό γίνεται λύνοντας τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0.$$

- Δεν χρειάζεται εδώ να κάνουμε όλη την άλγεβρα.
- Το σημαντικό είναι να δούμε τη σύνδεση:

παράγωγοι $\Rightarrow$ βελτιστοποίηση $\Rightarrow$ εκτίμηση παραμέτρων.

- Στη Στατιστική συχνά επιλέγουμε την τιμή μιας παραμέτρου που κάνει τα παρατηρημένα δεδομένα πιο πιθανά.
- Η συνάρτηση αυτή λέγεται **πιθανοφάνεια** και συμβολίζεται με :

$$L(\theta).$$

- Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η τιμή που μεγιστοποιεί την $L(\theta)$.
- Και εδώ η βασική μαθηματική ιδέα είναι η βελτιστοποίηση.

Παράδειγμα πιθανοφάνειας

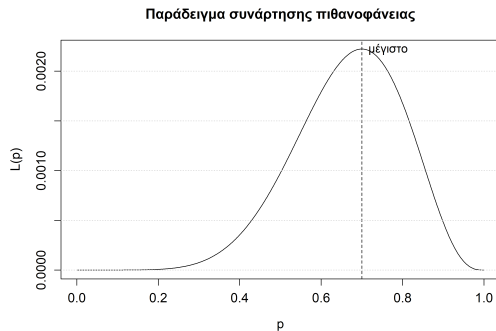
- Έστω ότι έχουμε 7 επιτυχίες σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές.
- Η πιθανοφάνεια, αγνοώντας σταθερούς όρους, είναι:

$$L(p) = p^7(1 - p)^3.$$

- Η τιμή που μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια είναι:

$$\hat{p} = 0.7.$$

- Η παράγωγος μάς βοηθά να βρούμε το μέγιστο.



Γιατί χρειαζόμαστε ολοκληρώματα

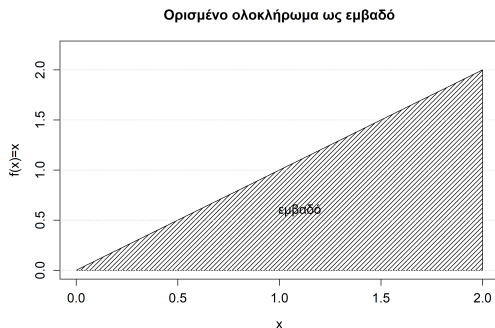
- Οι παράγωγοι περιγράφουν ρυθμούς μεταβολής.
- Τα ολοκληρώματα περιγράφουν συσσωρευμένες ποσότητες.
- Γεωμετρικά, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να ερμηνευθεί ως εμβαδό κάτω από καμπύλη.
- Στις πιθανότητες, το εμβαδό κάτω από μια πυκνότητα αντιστοιχεί σε πιθανότητα.
- Γι' αυτό τα ολοκληρώματα είναι απαραίτητα για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμένο ολοκλήρωμα ως εμβαδό

- Το ορισμένο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- Μπορούμε να το σκεφτούμε ως το εμβαδό κάτω από τη συνάρτηση από το a έως το b .
- Στο σχήμα φαίνεται:



$$\int_0^2 x dx.$$

- Αν $F'(x) = f(x)$, τότε λέμε ότι το F είναι μια αρχική συνάρτηση της f .
- Γράφουμε:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

- Η σταθερά C εμφανίζεται επειδή πολλές συναρτήσεις έχουν την ίδια παράγωγο.
- Παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x, \quad \frac{d}{dx}(x^2 - 3) = 2x.$$

- Για $a \neq -1$:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.$$

- Για την εκθετική συνάρτηση:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

- Για τη συνάρτηση $1/x$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C.$$

- Για άθροισμα συναρτήσεων, ολοκληρώνουμε κάθε όρο ξεχωριστά.

- Παράδειγμα 1:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

- Παράδειγμα 2:

$$\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C.$$

- Παράδειγμα 3:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

- Παράδειγμα 4:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C.$$

Παράδειγμα ορισμένου ολοκληρώματος

- Θέλουμε να υπολογίσουμε:

$$\int_0^2 x \, dx.$$

- Αρχική συνάρτηση του x είναι:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

- Άρα:

$$\int_0^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2.$$

- Αν X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x)$, τότε:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Η συνολική πιθανότητα πρέπει να είναι ίση με 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

- Άρα οι πιθανότητες σε συνεχείς μεταβλητές υπολογίζονται ως εμβαδά.

Παράδειγμα πυκνότητας

- Έστω πυκνότητα:

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

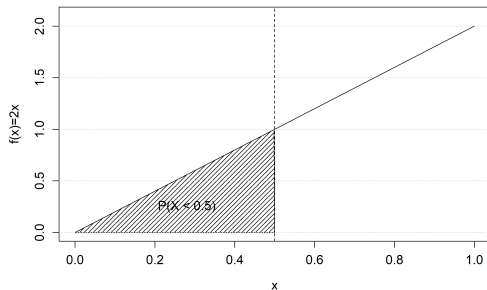
- Τότε:

$$\int_0^1 2x \, dx = 1.$$

- Η πιθανότητα $P(X < 0.5)$ είναι:

$$\int_0^{0.5} 2x \, dx = 0.25.$$

Πιθανότητα ως εμβαδό κάτω από πυκνότητα

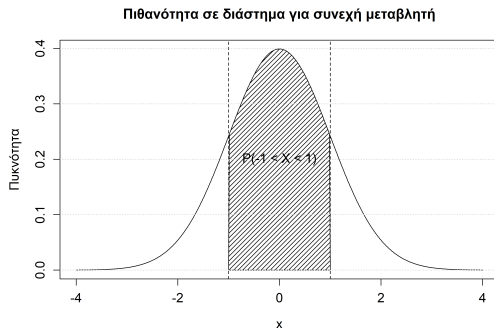


Πιθανότητα σε διάστημα

- Για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, η πιθανότητα ενός διαστήματος είναι εμβαδό.
- Στο σχήμα φαίνεται μια τυπική πυκνότητα και το εμβαδό:

$$P(-1 < X < 1).$$

- Η ιδέα αυτή είναι κεντρική στις συνεχείς κατανομές.



Τι πρέπει να κρατήσουμε

- Μια συνάρτηση περιγράφει πώς μια ποσότητα εξαρτάται από μια άλλη.
- Η κλίση μιας ευθείας είναι μεταβολή του Y ανά μονάδα μεταβολής του X .
- Στα πραγματικά δεδομένα χρειάζεται συνήθως στοχαστικός όρος:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon.$$

- Η παράγωγος είναι στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής και εργαλείο βελτιστοποίησης.
- Το ολοκλήρωμα είναι συσσωρευμένη ποσότητα και, στις συνεχείς κατανομές, πιθανότητα.

- Οι συναρτήσεις θα εμφανιστούν σε μοντέλα παλινδρόμησης και πιθανοτήτων.
- Οι παράγωγοι θα εμφανιστούν σε εκτίμηση παραμέτρων και μέγιστη πιθανοφάνεια.
- Τα ολοκληρώματα θα εμφανιστούν σε συνεχείς κατανομές και υπολογισμό πιθανοτήτων.
- Στο επόμενο μέρος θα χρειαστούμε διαφορετικά εργαλεία: διανύσματα, πίνακες και βασικές ιδέες γραμμικής άλγεβρας.