Κεφάλαιο 1

Θεωρία-Ασκήσεις στα Γραμμικά συστήματα

1. Αν $A \in F^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και άνω τριγωνικός, τότε και ο $B = A^{-1}$ είναι άνω τριγωνικός. Το ίδιο ισχύει και για τους αντιστρέψιμους κάτω τριγωνικούς πίνακες.

Απόδειξη: Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = A^{-1} = (b_{ij})$.

Υπενθυμίζουμε ότι A άνω τριγωνικός $\Leftrightarrow a_{ij} = 0$, για κάθε i, j με $j < i$.

Έστω $AB = I_n = (\delta_{ij})$. Τότε

$$1 = \delta_{nn} = \sum_{s=1}^{n} a_{ns}b_{sn} = \sum_{s=1}^{n-1} \underbrace{a_{ns}}_{s<n}^{=0} b_{sn} + a_{nn}b_{nn} = a_{nn}b_{nn} \Rightarrow b_{nn} = a_{nn}^{-1}.$$

Έστω $j < n$. Τότε $0 = \delta_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{ns}b_{sj} = \sum_{s=1}^{n-1} \underbrace{a_{ns}}_{s<n}^{=0} b_{sj} + a_{nn}b_{nj} = a_{nn}b_{nj}$. Επειδή δείξαμε ότι $a_{nn} = b_{nn}^{-1} \neq 0$, έπεται ότι $b_{nj} = 0$.

Η τελευταία γραμμή του B είναι λοιπόν $(0\ 0\ \cdots\ 0\ a_{nn}^{-1})$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $i < n$ και για κάθε s με $i < s \leq n$ η s-στή γραμμή του B είναι της μορφής $(0\ 0\ \cdots\ a_{ss}^{-1}\ b_{s,\,s+1}\ \cdots\ b_{sn})$, δηλαδή $b_{sj} = 0$, για κάθε $\boxed{j < s}$.

Ειδικότερα αν $\boxed{j = i}$. Υπολογίζουμε το b_{ii}.

Έχουμε: $1 = \delta_{ii} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{si} = \sum_{s<i} \underset{\|}{\underset{0}{a_{is}b_{si}}} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{\boxed{s>i}} a_{is}\boxed{\underset{\|}{\underset{0}{b_{si}}}} = a_{ii}b_{ii} \Rightarrow$

$b_{ii} = a_{ii}^{-1}$.

Έστω τώρα $j < i$. $0 = \delta_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = \sum_{s<i} \underset{\|}{\underset{0}{a_{is}b_{sj}}} + a_{ii}b_{ij} + \sum_{\boxed{s>i>j}} a_{is}\boxed{\underset{\|}{\underset{0}{b_{sj}}}} =$

$= a_{ii}b_{ij}$. Επειδή $a_{ii} = b_{ii}^{-1} \neq 0$, έπεται ότι $b_{ij} = 0$. ■

2. Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A αντιμετατίθεται με κάθε $n \times n$ πίνακα B αν και μόνον αν $A = \mu I_n, \quad \mu \in F$.

Απόδειξη: Ο μI_n προφανώς αντιμετατίθεται με κάθε τετραγωνικό $n \times n$.

Το αντίστροφο: Έστω $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ με $AB = BA$, για κάθε $B = (b_{ij}) \in F^{n\times n}$. Για κάθε $\kappa, \lambda \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ορίζουμε τον πίνακα $E_{\kappa\lambda}$ με γενικό στοιχείο $c_{ij} = \delta_{i\kappa}\delta_{j\lambda}$. Προφανώς $c_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = \kappa$ και $j = \lambda$, δηλαδή ο $E_{\kappa\lambda}$ έχει όλα τα

στοιχεία του ίσα με 0, εκτός από το $(\kappa,\ \lambda)$-στοιχείο, το οποίο ισούται με μονάδα.
Το $(i,\ j)$-στοιχείο του $E_{\kappa\lambda}A$ ισούται με $\sum_{s=1}^{n}\delta_{i\kappa}\delta_{s\lambda}a_{sj}=\delta_{i\kappa}a_{\lambda j}=\begin{cases}0, & i\neq\kappa\\ a_{\lambda j}, & i=\kappa\end{cases}$
Το $(i,\ j)$-στοιχείο του $AE_{\kappa\lambda}$ ισούται με $\sum_{s=1}^{n}a_{is}\delta_{s\kappa}\delta_{j\lambda}=a_{i\kappa}\delta_{j\lambda}=\begin{cases}0, & j\neq\lambda\\ a_{i\kappa} & j=\lambda\end{cases}$
Το $(\kappa,\ \lambda)$-στοιχείο του γινομένου είναι $a_{\lambda\lambda}$ από την πρώτη περίπτωση και $a_{\kappa\kappa}$ από τη δεύτερη περίπτωση. Επομένως $a_{\lambda\lambda}=a_{\kappa\kappa}=\mu$, άρα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι ίσα με μ. Αν $\kappa\neq\lambda$, και $j\neq\lambda$, τότε το $(\kappa,\ j)$-στοιχείο είναι 0 από τη δεύτερη εξίσωση. Από την πρώτη είναι ίσο με $a_{\lambda j}$. Επομένως $a_{\lambda j}=0$ και επειδή το λ επελέγη αυθαίρετα, τα μη διαγώνια στοιχεία του A είναι 0.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i\neq\kappa$. Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ότι το $(i,\ \lambda)$-στοιχείο του γινομένου ισούται με 0. Από τη δεύτερη ισούται με $a_{i\kappa}$. Επομένως $a_{i\kappa}=0$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1. Το γινόμενο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας.
Απόδειξη: Έστω $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ άνω τριγωνικοί πίνακες και $C=AB$. Θα δείξουμε ότι $c_{ij}=0$ όταν $i>j$.
Έχουμε

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

Για κάθε s, αν $s<i$, τότε $a_{is}=0$, αφού ο A είναι άνω τριγωνικός. Αν $s\geq i$, τότε $s>j$, οπότε $b_{sj}=0$, αφού ο B είναι άνω τριγωνικός.
Άρα κάθε όρος του αθροίσματος είναι μηδέν, συνεπώς $c_{ij}=0$. Επομένως ο AB είναι άνω τριγωνικός. ■
Σχόλιο: Το πρωί πρέπει να πίνω δύο καφέδες!

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2. Έστω $A\in F^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Τότε ισχύει

$$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k.
Απόδειξη: Για $k=0$, και τα δύο μέλη ισούνται με I_n. Αν η ισότητα ισχύει για κάποιο $k\geq 0$, τότε

$$(A^{-1})^{k+1}=(A^{-1})^kA^{-1}=(A^k)^{-1}A^{-1}=(A\cdot A^k)^{-1}=(A^{k+1})^{-1}.$$

Άρα η ισότητα ισχύει για κάθε $k\geq 0$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. Αν $A\in F^{n\times n}$ και k μη αρνητικός ακέραιος, τότε θέτουμε

$$A^{-k}=(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. Έστω $A,\, B \in F^{n\times n}$ με $AB = BA$. Τότε $AB^k = B^kA$, για κάθε ακέραιο k.(Αν $k < 0$ υποθέτουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος).
Απόδειξη: Για $k = 0$, $B^0 = I_n$ και φυσικά $AI_n = A = I_nA$.
Έστω $AB^k = B^kA$, για κάποιο $k \geq 0$.
Τότε $AB^{k+1} = AB^kB = B^kAB = B^kBA = B^{k+1}A$.
Έστω $k = -\rho < 0 \Leftrightarrow \rho > 0$.
Για $k = -1$, $AB = BA \Leftrightarrow B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}AI_n = I_nAB^{-1} \Leftrightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$. Από το προηγούμενο $(B^{-1})^\rho A = A(B^{-1})^\rho \Leftrightarrow B^{-\rho}A = AB^{-\rho} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B^kA = AB^k$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5. Έστω $A \in F^{m\times n}$ και $B \in F^{n\times m}$. Προφανώς $AB \in F^{m\times m}$ και $BA \in F^{n\times n}$. Υποθέτουμε ότι ο $I_m - AB$ αντιστρέφεται. Τότε και ο $I_n - BA$ αντιστρέφεται και

$$(I_n - BA)^{-1} = \big[I_n + B(I_m - AB)^{-1}A\big].$$

Απόδειξη: Με την επιμεριστική ιδιότητα και εξαγωγή κοινών παραγόντων, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\big[I_n + B(I_m - AB)^{-1}A\big](I_n - BA)\\
&\quad = I_n - BA + B(I_m - AB)^{-1}A - B(I_m - AB)^{-1}ABA\\
&\quad = I_n - BA + B(I_m - AB)^{-1}(A - ABA)\\
&\quad = I_n - BA + B(I_m - AB)^{-1}(I_m - AB)A\\
&\quad = I_n - BA + BI_mA = I_n - BA + BA\\
&\quad = I_n.
\end{aligned}$$

Επειδή οι δύο παράγοντες είναι τετραγωνικοί πίνακες ίδιας τάξης, η παραπάνω σχέση αρκεί για να συμπεράνουμε ότι

$$\boxed{(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A}.$$ ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. Ένας άνω τριγωνικός πίνακας λέγεται **αυστηρά άνω τριγωνικός** αν η διαγώνιός του είναι μηδενική, δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
 & & \ddots & \ddots & \vdots\\
 & O & & 0 & a_{n-1,n}\\
 & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Το O δηλώνει ότι όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Δηλαδή,

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{για } i \geq j.$$

Δείξτε ότι $A^n = O$.
Απόδειξη: Επειδή ο $A = (a_{ij})$ είναι αυστηρά άνω τριγωνικός, έχουμε

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{για } i \geq j.$$

Θα δείξουμε ότι, με κάθε διαδοχικό πολλαπλασιασμό με τον A, μηδενίζεται μία ακόμη διαγώνιος πάνω από την κύρια. Για παράδειγμα, στην περίπτωση 4×4, η εικόνα είναι η εξής:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow O.$$

Οι διαδοχικοί πίνακες παριστάνουν τους A, A^2, A^3, A^4, ενώ το $*$ δηλώνει στοιχείο που ενδέχεται να είναι μη μηδενικό.
Αν $n = 1$, τότε $A^1 = A = (0) \in F^{1\times 1}$.

Έστω $A^2 = (b_{ij})$. Τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι τα $b_{ii} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{si} =$

$= \sum_{s=1}^{i} \overset{0}{\overset{\|}{a_{is}}} a_{si} + \sum_{s=i+1}^{n} a_{is} \overset{0}{\overset{\|}{a_{si}}} = 0$. Επίσης, τα στοιχεία της δεύτερης άνω διαγωνίου είναι της μορφής $b_{i,i+1} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{s,i+1} = \sum_{s=1}^{i} \overset{0}{\overset{\|}{a_{is}}} a_{si} + \sum_{s=i+1}^{n} a_{is} \overset{0}{\overset{\|}{a_{s,i+1}}} = 0.$

Έστω ότι $A^k = (c_{ij})$ με $c_{ij} = 0$ όταν $j \leq i + k$, με $k < n$. Δηλαδή, στον A^k είναι μηδενικά όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο, πάνω στην κύρια διαγώνιο και στις πρώτες $k - 1$ διαγωνίους πάνω από αυτήν.
Τότε ο πίνακας $A^k = (c_{ij})$ έχει σχηματικά τη μορφή

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,k+1} & c_{1,k+2} & \cdots & c_{1n} \\ & & & 0 & c_{2,k+2} & \cdots & c_{2n} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & c_{n-k,n} \\ & & & & & & 0 \\ & O & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Το O δηλώνει ότι ολόκληρη η περιοχή κάτω και αριστερά από την εμφανιζόμενη μηδενική διαγώνιο αποτελείται από μηδενικά. Η αμέσως επόμενη διαγώνιος έχει στοιχεία

$$c_{1,k+1},\ c_{2,k+2},\ \ldots,\ c_{n-k,n}.$$

Θα δείξουμε ότι στον $A^{k+1} = A^k A$ μηδενίζεται και αυτή η διαγώνιος, ενώ η περιοχή κάτω από αυτήν παραμένει μηδενική.

Θέτουμε $A^{k+1} = (d_{ij})$. Για $j \leq i + k$, έχουμε $d_{ij} = \sum_{s=1}^{n} c_{is}a_{sj}$.

Σε κάθε όρο αυτού του αθροίσματος:

- Αν $s \leq i+k-1$, τότε $c_{is}=0$, από την επαγωγική υπόθεση.

- Αν $s \geq i+k$, τότε $s \geq j$, οπότε $a_{sj}=0$, επειδή ο A είναι αυστηρά άνω τριγωνικός.

Επομένως $d_{ij}=0$ όταν $j \leq i+k$. Έτσι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα.
Για $k=n$, ο ισχυρισμός δίνει ότι είναι μηδενικές η κύρια διαγώνιος και όλες οι $n-1$ διαγώνιοι πάνω από αυτήν, καθώς και όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια. Συνεπώς $\boxed{A^n=O}$. ■

1.1 Ένα χρήσιμο εργαλείο-οι πίνακες $E_{\mu\nu}$

Θέτουμε

$$E_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \mu \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \nu \\ & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in F^{n\times n}.$$

για τον $n\times n$ πίνακα, ο οποίος έχει 1 στη θέση $(\mu,\,\nu)$ και μηδέν παντού αλλού.
Το γενικό στοιχείο $(i,\,j)$ είναι το $\delta_{i\mu}\delta_{\nu j}$.
Τώρα $E_{\mu\nu}E_{\rho\kappa}=$; Η i-γραμμή του $E_{\mu\nu}E_{\rho\kappa}$ αποτελείται από τα στοιχεία

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_{i\mu}\delta_{\nu s}\delta_{s\rho}\delta_{\kappa j} \underset{s=\rho}{=} \delta_{i\mu}\delta_{\nu\rho}\delta_{\kappa j} = \begin{cases} \delta_{i\mu}\delta_{\kappa j}, & \text{αν } \nu=\rho \\ 0, & \text{αν } \nu\neq\rho \end{cases}$$

Το $\delta_{i\mu}\delta_{\kappa j}$ είναι το $(i,\,j)$-στοιχείο του πίνακα $E_{\mu\kappa}$. Επομένως

$$E_{\mu\nu}E_{\rho\kappa} = \begin{cases} E_{\mu\kappa}, & \text{αν } \nu=\rho \\ O_{n\times n}, & \text{αν } \nu\neq\rho \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως $E_{\mu\mu}^2=E_{\mu\mu}$. Έστω τώρα $E_{\mu\nu}\in F^{n\times n}$ και $A=(a_{ij})\in F^{n\times m}$.
Η i-γραμμή του $E_{\mu\nu}A$ αποτελείται από τα στοιχεία

$$\sum_{s=1}^{n}\delta_{i\mu}\delta_{\nu s}a_{sj} \underset{s=\nu}{=} \delta_{i\mu}a_{\nu j} = \begin{cases} a_{\nu j}, & \text{αν } i=\mu \\ 0, & \text{αν } i\neq\mu. \end{cases}$$

Επομένως όλες οι γραμμές του A μηδενίζονται εκτός της μ-στής. Εκεί όμως τοποθετείται η ν-στή γραμμή. Αν συμβολίσουμε με $A = \begin{matrix}\mu\to\\ \\ \nu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}$, όπου Γ_i η i-στή γραμμή του A, τότε $E_{\mu\nu}A = \begin{matrix}\mu\to\\ \\ \nu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Προφανώς $E_{\mu\mu}A = \begin{matrix}\mu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τον πίνακα $T_{\mu\nu}(\lambda) = I_n + \lambda E_{\mu\nu}$.

Τότε έχουμε: $(I_n + \lambda E_{\mu\nu})A = A + \lambda E_{\mu\nu}A = \begin{matrix}\mu\to\\ \\ \nu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} + \begin{matrix}\mu\to\\ \\ \nu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda\Gamma_\nu \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{matrix}\mu\to\\ \\ \nu\to\end{matrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu + \lambda\Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}$, που αντιστοιχεί στη γραμμοπράξη $\Gamma_\mu \to \Gamma_\mu + \lambda\Gamma_\nu$.

Παρατηρούμε ότι αν $\mu \neq \nu$, τότε $T_{\mu\nu}(\lambda)T_{\mu\nu}(-\lambda) = (I_n + \lambda E_{\mu\nu})(I_n - \lambda E_{\mu\nu}) =$

$= I_n^2 - \lambda I_n E_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu} I_n - \lambda^2 \underbrace{E_{\mu\nu}E_{\mu\nu}}_{\substack{\mu\neq\nu \\ \| \\ 0}} = I_n - \lambda E_{\mu\nu} + \lambda E_{\mu\nu} = I_n$. Επομένως $T_{\mu\nu}^{-1}(\lambda) = (I_n + \lambda E_{\mu\nu})^{-1} = I_n - \lambda E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(-\lambda)$, όπως αναμενόταν.

Παράδειγμα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον $T_{31}(-2)$ ισοδυναμεί με τη γραμμοπράξη

$$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1.$$

Έστω τώρα ένας διαγώνιος πίνακας $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Προφανώς $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$. Έστω $A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} E_{jj}A$, τότε $TA = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i E_{ii}E_{jj}A \underset{\text{για } i=j}{=}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}^2 A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii} A = \begin{pmatrix} \lambda_1\Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2\Gamma_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3\Gamma_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n\Gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\Gamma_1 \\ \lambda_2\Gamma_2 \\ \lambda_3\Gamma_3 \\ \vdots \\ \lambda_n\Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Στην ειδική περίπτωση που $\lambda_i = 1$, για κάθε $i \neq \mu$ και $\lambda_\mu = \lambda \neq 0$ παίρνουμε τον διαγώνιο πίνακα

$$T_\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \mu & & \\ & \ddots & & \downarrow & & O \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \leftarrow \mu \\ & & & & 1 & \\ & O & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{n} E_{ii} + \lambda E_{\mu\mu} \text{ Τότε } T_\mu(\lambda)A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \lambda\Gamma_\mu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Επειδή $E_{ii}E_{jj} = O$, για $i \neq j$ και $E_{ii}^2 = E_{ii}$, έχουμε

$$T_\mu(\lambda)T_\mu(\lambda^{-1}) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{n} E_{ii} + \lambda E_{\mu\mu}\right)\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{n} E_{ii} + \lambda^{-1}E_{\mu\mu}\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{n} E_{ii}^2 + \lambda\lambda^{-1}E_{\mu\mu}^2 =$$

$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu}}^{n} E_{ii} + E_{\mu\mu} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I_n$. Άρα $T_\mu^{-1}(\lambda) = T_\mu(\lambda^{-1})$.

Παραδείγματα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_2(-3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -9 & -12 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι εκτελείται η γραμμοπράξη $\Gamma_2 \to -3\Gamma_2$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_3(4)=\mathrm{diag}(1,1,4,1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι εκτελείται η γραμμοπράξη $\Gamma_3 \to 4\Gamma_3$.

Έστω τώρα $1 \leq \mu,\, \nu \leq n$ με $\mu \neq \nu$. Θεωρούμε τον πίνακα

$$M_{\mu\nu} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu,\,\nu}}^{n} E_{ii} + E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu} = \begin{array}{c} \\ \nu \longrightarrow \\ \\ \mu \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \nu & & \mu & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} = M_{\nu\mu}.$$

Επειδή $E_{ii}^2 = E_{ii}$, $E_{ii}E_{jj} = O$, για $i \neq j$, $E_{ii}E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}E_{ii} = O$, $E_{ii}E_{\nu\mu} = E_{\nu\mu}E_{ii} = O$, για κάθε $i \neq \mu, \nu$ και $E_{\mu\nu}^2 = E_{\mu\nu}E_{\mu\nu} = O$ και ομοίως $E_{\nu\mu}^2 = O$, παίρνουμε $M_{\mu\nu}^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu,\nu}}^{n} E_{ii} + E_{\mu\nu}E_{\nu\mu} + E_{\nu\mu}E_{\mu\nu} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu,\nu}}^{n} E_{ii} + E_{\mu\mu} + E_{\nu\nu} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I_n$. Συνεπώς $M_{\mu\nu}^{-1} = M_{\mu\nu}$.

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}$, όπου Γ_i η i-στή γραμμή. Τότε

$$M_{\mu\nu}A = M_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\mu,\nu}}^{n} E_{ii} + E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu} \right) \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ \mu \to \\ \\ \\ \nu \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{\mu-1} \\ 0 \\ \Gamma_{\mu+1} \\ \vdots \\ \Gamma_{\nu-1} \\ 0 \\ \Gamma_{\nu+1} \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} + \begin{matrix} \\ \\ \mu \to \\ \\ \\ \nu \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{matrix} \\ \\ \mu \to \\ \\ \\ \nu \to \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \mu \to \\ \\ \\ \\ \nu \to \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_\nu \\ \vdots \\ \Gamma_\mu \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}$$, που αντιστοιχεί στην αντιμετάθεση των γραμμών $\Gamma_\mu \leftrightarrow \Gamma_\nu$.

Παραδείγματα:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{24}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον M_{24} εκτελεί τη γραμμοπράξη

$$\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_4.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{13}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον M_{13} εκτελεί τη γραμμοπράξη

$$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{34}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον M_{34} εκτελεί τη γραμμοπράξη

$$\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4.$$

Ακολουθώντας αυτές τις πράξεις ένας πίνακας $A \in F^{m\times n}$ οδηγείται στη μορφή

$$R = \begin{bmatrix} 0\cdots0 & \textcircled{1} & *\cdots* & 0 & *\cdots* & \cdots & 0 & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \textcircled{1} & *\cdots* & \cdots & 0 & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \cdots & \textcircled{1} & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 \end{bmatrix}.$$

Ορολογία-Παρατηρήσεις:

1. Υπάρχουν r μη μηδενικές γραμμές και $m-r$ μηδενικές γραμμές.
2. Σε κάθε μη μηδενική γραμμή ο πρώτος άσσος λέγεται **οδηγός** ή **ηγετικό στοιχείο**.
3. Κάθε οδηγός μονάδα είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης της.
4. Τα τμήματα ανάμεσα στις στήλες των οδηγών μονάδων, καθώς και πριν από την πρώτη ή μετά την τελευταία, μπορεί να απουσιάζουν.
5. Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ο πρώτος άσσος εμφανίζεται στην πρώτη γραμμή. Ο δεύτερος στη δεύτερη γραμμή κ.ο.κ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών σε μια κλιμακωτή (ανηγμένη) μορφή ενός πίνακα A ονομάζεται **βαθμός (rank)** του A. Στο επόμενο παράδειγμα έχουμε $\text{rank}(A) = 3$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \Leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & 5 \\ 5 & 10 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1&5\\5&7&-1&8\\2&3&1&4\\-2&-1&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\begin{pmatrix}3&4&-1&5\\2&3&0&3\\2&3&1&4\\-2&-1&3&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&3&0&3\\2&3&1&4\\-2&-1&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\2&3&1&4\\-2&-1&3&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&1&3&0\\-2&-1&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&1&3&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4.$$

Παράδειγμα 4:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&2&0&3\\4&3&0&3&1&6\\-2&1&5&-4&4&-4\\4&1&-4&6&-2&8\\-4&-1&4&-3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\frac{1}{2}\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\4&3&0&3&1&6\\-2&1&5&-4&4&-4\\4&1&-4&6&-2&8\\-4&-1&4&-3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-4\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\-2&1&5&-4&4&-4\\4&1&-4&6&-2&8\\-4&-1&4&-3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&2&4&-2&4&-1\\4&1&-4&6&-2&8\\-4&-1&4&-3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-4\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&2&4&-2&4&-1\\0&-1&-2&2&-2&2\\-4&-1&4&-3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_5\to\Gamma_5+4\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&2&4&-2&4&-1\\0&-1&-2&2&-2&2\\0&1&2&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&0&2&-1\\0&-1&-2&2&-2&2\\0&1&2&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&0&2&-1\\0&0&0&1&-1&2\\0&1&2&1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&0&2&-1\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&2&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&2&-1\\0&0&0&2&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_5\to\Gamma_5-2\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\frac{1}{2}\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&-1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\frac{3}{2}\\0&1&2&0&0&2\\0&0&0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&2&0&0&2\\0&0&0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\frac{1}{2}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&0&0&-1\\0&1&2&0&0&2\\0&0&0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

1.2 Εύρεση αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα με γραμμοπράξεις.

Θα βρούμε με γραμμοπράξεις τον αντίστροφο του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&5&2\\2&4&3\end{pmatrix}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_3)$ και παίρνουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\3&5&2&0&1&0\\2&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

Κάθε φορά που κάνουμε κάποια γραμμοπράξη στον πίνακα A πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Το ίδιο παθαίνει και ο ταυτοτικός στον επαυξημένο πίνακα. Έστω E το γινόμενο όλων αυτών των πινάκων. Ο E ως γινόμενο αντιστρεψίμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος. Αν λοιπόν $EA = I_3$, τότε $(EA \mid EI_3) = (I_3 \mid E)$. Με άλλα λόγια $E = A^{-1}$.

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \Leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Επομένως, ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. Θα βρούμε με γραμμοπράξεις τον αντίστροφο του πίνακα

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $(B \mid I_4)$ και έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-2\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Μηδενίζουμε τώρα τα στοιχεία πάνω από τους οδηγούς άσσους:

$$\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_4]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -6 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Επομένως, ο B είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Να εξετάσετε με γραμμοπράξεις αν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος.

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_4)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \Leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 4\Gamma_1 \end{array} \xrightarrow{\qquad} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2 \end{array} \xrightarrow{\qquad} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -9 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Το αριστερό τμήμα βρίσκεται πλέον σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και δεν είναι ο I_4. Επομένως, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Το αριστερό τμήμα βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή και έχει μία μηδενική γραμμή. Συνεπώς, έχει μόνο τρεις οδηγούς και δεν μπορεί να μετατραπεί με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις στον I_4. Επομένως, ο πίνακας A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι, $\begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_4.$

1.3 Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Γενικότερα, ένα γραμμικό σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας του συστήματος (1).
Ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

λέγεται επαυξημένος πίνακας του συστήματος (1).
Αν $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, σηλαδή το σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

τότε αυτό λέγεται **ομογενές**, αλλιώς **μη ομογενές**.
Ας ξαναγυρίσουμε στο αρχικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συτήματος αυτού είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Αν Για να λύσουμε το σύστημα μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα:

1. Να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε από μια γραμμή ένα πολλαπλάσιο μιας άλλης.

2. Να πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή με έναν μη μηδενικό αριθμό.

3. Να εναλλάξουμε δύο γραμμές.

Επειδή τα ονόματα των αγνώστων δεν παίζουν ρόλο, αλλά μόνον οι συντελεστές του επαυξημένου πίνακα, αυτό μπορούμε να το κάνουμε μόνον με τον επαυξημένο πίνακα. Κάνουμε δηλαδή γραμμοπράξεις.
Έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&-1&2&1\\0&-1&-2&3&-5&-1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_2\to-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&-1&2&1\\0&1&2&-3&5&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Εδώ τα ηγετικά στοιχεία είναι όλα ίσα με το 1. Με γραμμοπράξεις μπορούμε να μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία που είναι πάνω από τα ηγετικά.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&-1&2&1\\0&1&2&-3&5&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&-1&2&1\\0&1&0&-5&3&-1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-2&1&0\\0&1&0&-5&3&-1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&3&-2&1\\0&1&0&-5&3&-1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ο τελευταίος πίνακας βρίσκεται προφανώς σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αυτός αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{cases}x_1+0x_2+0x_3+3x_4-2x_5=1,\\0x_1+x_2+0x_3-5x_4+3x_5=-1,\\0x_1+0x_2+x_3+x_4+x_5=1,\\0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5=0.\end{cases}$$

Η τελευταία γραμμή δεν χρειάζεται. Αν όμως ο σταθερός συντελεστής δεν ήταν μηδέν, τότε το σύστημα θα ήταν **αδύνατο**. Το σύστημα είναι ισοδύναμο μετο ακόλουθο

$$\begin{cases}x_1+3x_4-2x_5=1,\\x_2-5x_4+3x_5=-1,\\x_3+x_4+x_5=1.\end{cases}$$

Λύνουμε τώρα ως προς x_1, x_2, x_3 και παίρνουμε

$$\begin{cases}x_1=1-3x_4+2x_5,\\x_2=-1+5x_4-3x_5,\\x_3=1-x_4-x_5,\end{cases}\qquad x_4,x_5\in\mathbb{R}.$$

Προφανώς το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Θεωρούμε τώρα το σύστημα

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1,\\3x_1+2x_2+x_3=2,\\5x_1+3x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον επαυξημένο πίνακα, έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1. \end{cases}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη. Επομένως το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

1.4 Διάφορες ασκήσεις

Σε όλες τις ασκήσεις εργαζόμαστε στο $\mathbb{R}$, με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και χωρίς χρήση οριζουσών. Στα συστήματα ζητείται να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα και να περιγραφούν όλες οι λύσεις. Στις ασκήσεις με παραμέτρους πρέπει να εξετάζονται χωριστά οι τιμές για τις οποίες κάποια από τις χρησιμοποιούμενες γραμμοπράξεις δεν επιτρέπεται, όπως η διαίρεση με παράσταση που μηδενίζεται.

1. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε τις στήλες που περιέχουν ηγετικά στοιχεία.

3. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Επιλέξτε κατάλληλες ανταλλαγές γραμμών ώστε να περιορίσετε την εμφάνιση κλασμάτων.

5. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Μπορείτε να προβλέψετε το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών της πριν κάνετε τις γραμμοπράξεις·

6. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Εξηγήστε γιατί μια μη μηδενική στήλη της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής δεν περιέχει αναγκαστικά ηγετικό στοιχείο.

8. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

10. Λύστε το σύστημα και προσδιορίστε τις ελεύθερες μεταβλητές:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

11. Εξετάστε αν το σύστημα είναι συμβιβαστό:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Αν είναι αδύνατο, εντοπίστε τη γραμμή της κλιμακωτής μορφής που εκφράζει την αντίφαση.

12. Βρείτε όλες τις λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Πόσες μεταβλητές μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα·

13. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Ποιες εξισώσεις μπορούν να αφαιρεθούν χωρίς να αλλάξει το σύνολο των λύσεων·

14. Λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -1. \end{cases}$$

Γράψτε τις βασικές μεταβλητές ως συναρτήσεις των ελεύθερων, διατηρώντας τα ονόματα x_i.

15. Για τις διάφορες τιμές του a, λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + ax_2 = 1. \end{cases}$$

Προσδιορίστε πότε έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή καμία λύση.

16. Διερευνήστε και λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 3. \end{cases}$$

17. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα και λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$$

Εξετάστε ιδιαίτερα τις τιμές $a = 1$ και $a = -2$.

18. Διερευνήστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ ax_2 + x_3 = 2, \\ (a-1)x_3 = a. \end{cases}$$

Εξηγήστε γιατί δεν επιτρέπεται να διαιρέσουμε εξαρχής με a ή με $a - 1$.

19. Για τις διάφορες τιμές του a, λύστε το κυκλικό σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 = 1, \\ x_2 + ax_3 = 1, \\ x_3 + ax_4 = 1, \\ x_4 + ax_1 = 1. \end{cases}$$

Προσδιορίστε όλες τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.

20. Για τις διάφορες τιμές των a, b, διερευνήστε και λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = b. \end{cases}$$

21. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a+2 & a+1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε τις τιμές για τις οποίες ο βαθμός του είναι μικρότερος από 3.

22. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a+1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Προσέξτε ότι, όταν μηδενίζεται ένα στοιχείο που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ηγετικό, το ηγετικό στοιχείο της γραμμής ενδέχεται να μετακινηθεί σε επόμενη στήλη.

23. Για τις διάφορες τιμές των a, b, βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 1 & a+b & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε όλα τα ζεύγη (a, b) για τα οποία ο βαθμός του είναι 2.

24. Προσδιορίστε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα a, b, c, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = b, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = c \end{cases}$$

να είναι συμβιβαστό. Στη συνέχεια, βρείτε όλες τις λύσεις του στις συμβιβαστές περιπτώσεις.

25. Πίνακας Vandermonde. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Οι a, b, c είναι ανά δύο διαφορετικοί.
- Ακριβώς δύο από τους a, b, c είναι ίσοι.
- $a = b = c$.

Στη δεύτερη περίπτωση, εξετάστε αν έχει σημασία ποιοι δύο αριθμοί είναι ίσοι.

26. Πίνακας Hilbert. Θεωρήστε τον πίνακα

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Χρησιμοποιήστε ακριβή κλάσματα και όχι δεκαδικές προσεγγίσεις.

27. Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, να απαντήσετε στα ακόλουθα:

(α′) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον αντίστροφό του, ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_3)$. Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με πολλαπλασιασμό.

(β′) Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, να απαντήσετε στα ακόλουθα:

i . Να αποδείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον αντίστροφό του, ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_3)$. Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με πολλαπλασιασμό.

ii . Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές της παραμέτρου t για τις οποίες ο πίνακας

$$B(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & t & 1 \\ 5 & t+1 & t \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος. Να εξετάσετε χωριστά τις διάφορες τιμές που εμφανίζονται κατά την εκτέλεση των γραμμοπράξεων.

28. Τριδιαγώνιο σύστημα. Για $n \geq 2$, θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 1, \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

Λύστε πρώτα την περίπτωση $n = 4$ με αναγωγή σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε n και βρείτε έναν γενικό τύπο για το x_i.

29. Κυκλικό σύστημα. Για $n \geq 3$, θεωρήστε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1, \\ x_2 + x_3 = b_2, \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1}, \\ x_n + x_1 = b_n. \end{cases}$$

Διερευνήστε το σύστημα χωριστά όταν ο n είναι περιττός και όταν είναι άρτιος. Βρείτε τη συνθήκη συμβιβαστότητας όπου χρειάζεται και περιγράψτε τις λύσεις.

30. Παρεμβολή πολυωνύμου με παράμετρο. Αναζητούμε πολυώνυμο

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

που να ικανοποιεί

$$p(0) = 1, \qquad p(1) = 2, \qquad p(t) = b.$$

Γράψτε το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα ως προς c_0, c_1, c_2 και βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα για όλες τις τιμές των t, b.

Πότε υπάρχει μοναδικό τέτοιο πολυώνυμο, πότε άπειρα και πότε κανένα·

31. Μια γενική οικογένεια συμμετρικών συστημάτων. Για $n \geq 2$, θεωρήστε το σύστημα

$$ax_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ο πίνακας των συντελεστών έχει a σε κάθε θέση της κύριας διαγωνίου και 1 σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις.

Χρησιμοποιώντας γραμμοπράξεις:

- Προσδιορίστε τις τιμές του a για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε επιλογή των $b_1, \ldots, b_n$.
- Για τις τιμές της παραμέτρου για τις οποίες ο πίνακας των συντελεστών δεν είναι αντιστρέψιμος, βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε το σύστημα να έχει λύση.
- Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών σε όλες τις περιπτώσεις.
- Στην περίπτωση μοναδικής λύσης, εκφράστε το x_i με τη βοήθεια των a, b_i και του αθροίσματος $b_1 + \cdots + b_n$.

Λύσεις των ασκήσεων

Στα βέλη αναγράφονται οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Όταν πάνω από το ίδιο βέλος εμφανίζονται περισσότερες γραμμοπράξεις, αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και εφαρμόζονται στον αμέσως προηγούμενο πίνακα.

1. Ανταλλάσσουμε την πρώτη με την τρίτη γραμμή, ώστε το πρώτο ηγετικό στοιχείο να είναι

1. Στη συνέχεια μηδενίζουμε τα στοιχεία κάτω από αυτό:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_3. Ειδικότερα, $\operatorname{rank}(A) = 3$.

2. Μηδενίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από το 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to -\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{3}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας βρίσκεται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Τα ηγετικά στοιχεία βρίσκονται στην πρώτη και στην τρίτη στήλη, και $\operatorname{rank}(A) = 2$.

3. Η πρώτη στήλη είναι μηδενική, οπότε αρχίζουμε την απαλοιφή από τη δεύτερη στήλη:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1}]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αυτή είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A. Τα ηγετικά στοιχεία βρίσκονται στις στήλες $2, 3, 4$, και $\operatorname{rank}(A) = 3$.

4. Με την ανταλλαγή της πρώτης και της τρίτης γραμμής μεταφέρουμε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{\substack{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας βρίσκεται σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και $\mathrm{rank}(A) = 3$.

5. Παρατηρούμε ότι η δεύτερη γραμμή είναι -2 φορές η πρώτη και η τρίτη είναι 3 φορές η πρώτη. Επομένως:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχει μία μόνο μη μηδενική γραμμή, και $\mathrm{rank}(A) = 1$.

6. Εφαρμόζουμε τις ακόλουθες γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1}]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας βρίσκεται ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή: τα ηγετικά στοιχεία είναι 1 και είναι τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία των στηλών τους. Οι στήλες αυτές είναι η πρώτη και η τέταρτη. Επομένως $\mathrm{rank}(A) = 2$.

7. Αρχίζουμε από τη δεύτερη στήλη, αφού η πρώτη είναι μηδενική:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_1]{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to-\frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3\\ \Gamma_4\to\Gamma_4+3\Gamma_3}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τα ηγετικά στοιχεία βρίσκονται στις στήλες $2, 4, 5$, και $\operatorname{rank}(A) = 3$.

Η τρίτη στήλη είναι μη μηδενική, αλλά δεν περιέχει ηγετικό στοιχείο. Πράγματι, το στοιχείο 2 της πρώτης γραμμής δεν είναι το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής. Παρατηρούμε επίσης ότι η τρίτη στήλη είναι διπλάσια της δεύτερης.

8. Χρησιμοποιούμε διαδοχικά τα ηγετικά στοιχεία της πρώτης, της δεύτερης και της τρίτης στήλης:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2\\ \Gamma_5\to\Gamma_5+\Gamma_2}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3\\ \Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3\\ \Gamma_5\to\Gamma_5-\Gamma_3}]{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2+\Gamma_4\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_4\\ \Gamma_5\to-\frac{1}{2}\Gamma_5}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2+2\Gamma_5\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_5}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_5, και $\operatorname{rank}(A) = 5$.

9. Το σύστημα είναι

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Εργαζόμαστε στον επαυξημένο πίνακα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{3}{5}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = \frac{4}{5}, \qquad x_2 = \frac{3}{5}, \qquad x_3 = 2.}$$

10. Το σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

Ανάγουμε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4 = \frac{4}{5}, \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_1, x_2, ενώ οι x_3, x_4 είναι ελεύθερες. Επομένως όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{4 - x_3 - 7x_4}{5}, \\ x_2 = \dfrac{3 + 3x_3 + x_4}{5}, \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.}$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

11. Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2\to\frac{1}{3}\Gamma_2]{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-\frac{1}{3}\Gamma_3]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Η τρίτη γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1,$$

η οποία είναι αδύνατη. Επομένως, το σύστημα είναι αδύνατο. Επίσης,

$$\operatorname{rank}(A) = 2, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

12. Για τον επαυξημένο πίνακα του ομογενούς συστήματος έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\to\frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το τελικό ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dfrac{1}{3}x_4 = 0, \\ x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 - x_5 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0. \end{cases}$$

Τα ηγετικά στοιχεία βρίσκονται στην πρώτη και την τρίτη στήλη. Επομένως, οι x_2, x_4, x_5 είναι ελεύθεροι άγνωστοι και οι λύσεις δίνονται από

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 &= -\frac{1}{3}x_4 + x_5, \end{aligned} \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.}$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και $\operatorname{rank}(A) = 2$.

13. Με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις παίρνουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1\\ \Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_1\\ \Gamma_5\to\Gamma_5-3\Gamma_1}]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3+3\Gamma_2\\ \Gamma_4\to\Gamma_4+3\Gamma_2\\ \Gamma_5\to\Gamma_5+2\Gamma_2}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to-\frac{1}{7}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2+2\Gamma_3\\ \Gamma_4\to\Gamma_4+7\Gamma_3\\ \Gamma_5\to\Gamma_5+7\Gamma_3}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-3\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το τελικό ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)}$$

και

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

14. Ο επαυξημένος πίνακας ανάγεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2\\ \Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_2}]{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -1, \\ x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 0. \end{cases}$$

Οι άγνωστοι x_3, x_4, x_5, x_6 είναι ελεύθεροι. Επομένως, όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -1 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6, \\ x_2 &= 2 - x_3 - x_5 + x_6, \end{aligned} \qquad x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}.}$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 2.$$

15. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + ax_2 = 1. \end{cases}$$

Αρχικά εκτελούμε γραμμοπράξεις που επιτρέπονται για κάθε $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - a\Gamma_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Επειδή $1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση $a \neq 1, -1$.

Το στοιχείο $1 - a^2$ είναι μη μηδενικό, οπότε

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{1-a^2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - a\Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right).$$

Συνεπώς, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{1}{1+a}}.$$

Στην περίπτωση αυτή,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 2.$$

Περίπτωση $a = 1$.

Ο πίνακας που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις γίνεται

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ο οποίος είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 = 0. \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$\boxed{x_1 = 1 - x_2, \qquad x_2 \in \mathbb{R}}.$$

Εδώ

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 1.$$

Περίπτωση $a = -1$**.**

Από τον πίνακα που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η δεύτερη γραμμή αντιστοιχεί στην αδύνατη εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 = 1.$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο και

$$\operatorname{rank}(A) = 1, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 2.$$

16. Με γραμμοπράξεις που επιτρέπονται για κάθε $a \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right).$$

Περίπτωση $a \neq 1$**.**

Διαιρούμε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή με $a - 1$ και στη συνέχεια μηδενίζουμε τα στοιχεία πάνω από τα ηγετικά:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{array}\right).$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = \frac{a-4}{a-1}, \qquad x_2 = \frac{1}{a-1}, \qquad x_3 = \frac{2}{a-1}.}$$

Επίσης,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

Περίπτωση $a = 1$**.**

Από τον πίνακα που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Η δεύτερη γραμμή αντιστοιχεί στην αδύνατη εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1.$$

Συνεπώς, το σύστημα είναι αδύνατο. Εδώ

$$\operatorname{rank}(A) = 1, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 2.$$

17. Αρχικά έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right).$$

Περίπτωση $a = 1$**.**

Ο τελευταίος πίνακας γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ο οποίος είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Το σύστημα ισοδυναμεί με

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Επομένως, έχει άπειρες λύσεις:

$$\boxed{x_1 = 1 - x_2 - x_3, \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.}$$

Στην περίπτωση αυτή,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 1.$$

Για $a \neq 1$, μπορούμε να διαιρέσουμε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή με $a - 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση $a \neq 1, -2$**.**

Έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{a+2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right).$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{a+2}},$$

και οι δύο πίνακες A και $[A \mid b]$ έχουν βαθμό 3.

Περίπτωση $a = -2$.

Συνεχίζουμε από τον πίνακα που προέκυψε για $a \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to -\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή δίνει την αδύνατη εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Συνεπώς, το σύστημα είναι αδύνατο και

$$\operatorname{rank}(A) = 2, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

18. Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right).$$

Εξετάζουμε χωριστά τις τιμές $a = 0$ και $a = 1$, πριν διαιρέσουμε με a ή με $a - 1$.

Περίπτωση $a \neq 0, 1$.

Έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & a & 0 & \frac{a-2}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{a}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right).$$

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = -\frac{2}{a}, \qquad x_2 = \frac{a-2}{a(a-1)}, \qquad x_3 = \frac{a}{a-1}.}$$

Εδώ

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

Περίπτωση $a = 0$.

Τότε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή δείχνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Περίπτωση $a = 1$**.**

Έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Και στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι αδύνατο.

Για καθεμία από τις τιμές $a = 0$ και $a = 1$ ισχύει

$$\operatorname{rank}(A) = 2, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

19. Ξεκινάμε με γραμμοπράξεις που ισχύουν για κάθε $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - a\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + a^2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & 1-a+a^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - a^3\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & 1-a+a^2-a^3 \end{array}\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$1 - a^4 = (1-a)(1+a)(1+a^2), \qquad 1 - a + a^2 - a^3 = (1-a)(1+a^2).$$

Επειδή $a \in \mathbb{R}$, έχουμε $1 + a^2 > 0$. Άρα $1 - a^4 = 0$ ακριβώς όταν $a = 1$ ή $a = -1$.

Περίπτωση $a \neq 1, -1$**.**

Διαιρούμε την τελευταία γραμμή με $1-a^4$ και παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & 1-a+a^2-a^3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 \to \frac{1}{1-a^4}\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - a\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - a\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - a\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \end{array}\right).$$

Συνεπώς, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{1+a}},$$

και

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 4.$$

Περίπτωση $a = 1$.

Από τον πίνακα που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το τελικό σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0. \end{cases}$$

Ο άγνωστος x_4 είναι ελεύθερος και όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\boxed{x_1 = 1 - x_4, \qquad x_2 = x_4, \qquad x_3 = 1 - x_4, \qquad x_4 \in \mathbb{R}.}$$

Εδώ

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

Περίπτωση $a = -1$**.**

Από τον ίδιο πίνακα παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \frac{1}{4}\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_4]{\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_4 \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην αδύνατη εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1.$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο και

$$\operatorname{rank}(A) = 3, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 4.$$

20. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b-1 \end{array}\right).$$

Περίπτωση $a \neq 0$**.**

Διαιρούμε τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή με a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{a}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{a}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a} \end{array}\right).$$

Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_1 = \frac{a-b+1}{a}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{b-1}{a}.}$$

Επίσης,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3.$$

Περίπτωση $a = 0$**.**

Ο πίνακας που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

Άρα η αναγκαία και ικανή συνθήκη συμβιβαστότητας είναι $b = 1$.

Αν $a = 0$ **και** $b = 1$, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$\boxed{x_1 = 1 - x_2 - x_3, \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.}$$

Στην περίπτωση αυτή,

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b]) = 1.$$

Αν $a = 0$ **και** $b \neq 1$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{b-1}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Η δεύτερη γραμμή δίνει την αδύνατη εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Συνεπώς, το σύστημα είναι αδύνατο και

$$\operatorname{rank}(A) = 1, \qquad \operatorname{rank}([A \mid b]) = 2.$$

21. Αρχικά εκτελούμε γραμμοπράξεις που επιτρέπονται για κάθε $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a+2 & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}.$$

Περίπτωση $a = 0$**.**

Ο τελευταίος πίνακας γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αυτή είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη και η δεύτερη, και ο βαθμός είναι 2.

Για $a \neq 0$, συνεχίζουμε ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{a}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Περίπτωση $a = 1$**.**

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη και η τρίτη, και ο βαθμός είναι 2.

Περίπτωση $a \neq 0, 1$**.**

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - a\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι οι τρεις πρώτες και ο βαθμός είναι 3.

Συνεπώς,

$$\boxed{\operatorname{rank}(A) = \begin{cases} 2, & a = 0 \text{ ή } a = 1, \\ 3, & a \neq 0, 1. \end{cases}}$$

22. Ο πίνακας είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a+1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάζουμε χωριστά τις τιμές $a = -1, 0, 1$.

Περίπτωση $a \neq -1, 0, 1$**.**

Για συντομία θέτουμε

$$q = \frac{a+1}{a(a-1)}.$$

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \frac{1}{a(a-1)}\Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_4]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & a-q \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{a+1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-q}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{q}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - a\Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a^4+2a^3-a^2+3a-1}{a(a-1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a^3-a^2-a-1}{a(a-1)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{a(a-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a+1}{a(a-1)} \end{pmatrix}.$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις ισότητες

$$\frac{a-q}{a-1} = \frac{a^3-a^2-a-1}{a(a-1)^2}, \qquad -\frac{q}{a+1} = -\frac{1}{a(a-1)}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι οι τέσσερις πρώτες, οπότε $\operatorname{rank}(A) = 4$.

Περίπτωση $a = -1$**.**

Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη, η δεύτερη και η τέταρτη. Άρα $\operatorname{rank}(A) = 3$.

Περίπτωση $a = 0$**.**

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη, η δεύτερη, η τρίτη και η πέμπτη. Άρα $\operatorname{rank}(A) = 4$.

Περίπτωση $a = 1$.

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \frac{1}{2}\Gamma_4]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_4]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη, η τρίτη, η τέταρτη και η πέμπτη. Άρα $\operatorname{rank}(A) = 4$.

Συνολικά,

$$\boxed{\operatorname{rank}(A) = \begin{cases} 3, & a = -1, \\ 4, & a \neq -1. \end{cases}}$$

Παρατηρούμε ότι για $a = 0$ και $a = 1$ αλλάζουν οι ηγετικές στήλες, αλλά ο βαθμός παραμένει 4.

23. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 1 & a+b & a & a+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 0 & b & a & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Περίπτωση $a = 1$ και $b \neq 0$.

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{b}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{b} & 1 - \frac{1}{b} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη και η δεύτερη, και ο βαθμός είναι 2.

Περίπτωση $a = 1$ και $b = 0$.

Ο πίνακας μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις γίνεται

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη και η τρίτη, και ο βαθμός είναι 2.

Για $a \neq 1$, συνεχίζουμε από τον πίνακα που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{a-1}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Περίπτωση $a \neq 1$ και $b \neq 0$.

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{b}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - a\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{a^2}{b} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι οι τρεις πρώτες και ο βαθμός είναι 3.

Περίπτωση $a = 0$ και $b = 0$.

Από τον πίνακα που προέκυψε για $a \neq 1$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη και η τρίτη, και ο βαθμός είναι 2.

Περίπτωση $b = 0$ και $a \neq 0, 1$.

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{a}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ηγετικές στήλες είναι η πρώτη, η τρίτη και η τέταρτη, και ο βαθμός είναι 3.

Συνεπώς,

$$\boxed{\operatorname{rank}(A) = \begin{cases} 2, & a = 1 \text{ ή } (a,b) = (0,0), \\ 3, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}}$$

24. Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 4 & b \\ 3 & 4 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 1 & 2 & c-3a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = c - a - b.$$

Άρα η αναγκαία και ικανή συνθήκη συμβιβαστότητας είναι

$$\boxed{c = a + b}.$$

Περίπτωση $c = a + b$.

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το τελικό ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3a - b, \\ x_2 + 2x_3 = b - 2a, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Ο άγνωστος x_3 είναι ελεύθερος. Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$\boxed{x_1 = 3a - b + x_3, \qquad x_2 = b - 2a - 2x_3, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.}$$

Ο πίνακας των συντελεστών και ο επαυξημένος πίνακας έχουν και οι δύο βαθμό 2.

Περίπτωση $c \neq a + b$.

Συνεχίζουμε ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{c-a-b}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3a-b \\ 0 & 1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2-(b-2a)\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1-(3a-b)\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή δίνει την αδύνατη εξίσωση $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο. Ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό 2, ενώ ο επαυξημένος πίνακας έχει βαθμό 3.

25. Θεωρούμε τον πίνακα

$$V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις ανάλογα με το πλήθος των διαφορετικών τιμών μεταξύ των a, b, c.

Τα a, b, c είναι ανά δύο διαφορετικά.

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(a+b) \\ 0 & c-a & (c-a)(a+c) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{c-a}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{b-a}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & a+c \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{c-b}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2-(a+b)\Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1-a^2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1-a\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Όλες οι διαιρέσεις επιτρέπονται, αφού $b-a$, $c-a$ και $c-b$ είναι μη μηδενικά. Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι ο I_3 και $\operatorname{rank}(V) = 3$.

Μεταξύ των a, b, c υπάρχουν ακριβώς δύο διαφορετικές τιμές.

Έστω u η τιμή που εμφανίζεται δύο φορές και v η άλλη τιμή, με $u \neq v$. Με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών φέρνουμε τον πίνακα στη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 1 & v & v^2 \\ 1 & u & u^2 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια,

$$\begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 1 & v & v^2 \\ 1 & u & u^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 0 & v-u & (v-u)(u+v) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{v-u}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \\ 0 & 1 & u+v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - u\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -uv \\ 0 & 1 & u+v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -uv \\ 0 & 1 & u+v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

και $\mathrm{rank}(V) = 2$.

Η τελική μορφή εξαρτάται μόνο από τις δύο διαφορετικές τιμές u, v: δεν εξαρτάται από τη σειρά των γραμμών ούτε από το ποια από τις δύο τιμές εμφανίζεται δύο φορές, αφού τα uv και $u+v$ παραμένουν ίδια αν εναλλάξουμε τα u και v.

Ισχύει $a = b = c$.

Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οπότε $\mathrm{rank}(V) = 1$.

Συνολικά, ο βαθμός του V ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τιμών μεταξύ των a, b, c.

26. Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

ανάγουμε τον επαυξημένο πίνακα $(H \mid I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to 60\Gamma_3]{\Gamma_2 \to 12\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 12 & 0 \\ 20 & 15 & 12 & 0 & 0 & 60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 20\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 6\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{16}{3} & -20 & 0 & 60 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 10 & -60 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to 3\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{1}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{array}\right).$$

Επομένως, ο H είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{H^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.}$$

27. (α) Υπολογισμός του αντιστρόφου. Ξεκινάμε από τον επαυξημένο πίνακα $(A \mid I_3)$. Εκτελούμε μία γραμμοπράξη κάθε φορά:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Το αριστερό τμήμα έγινε I_3, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και το δεξιό τμήμα είναι ο αντίστροφός του:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Για επαλήθευση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-1 & -4+4 & 2-2 \\ 3-2-1 & -6+8-1 & 3-4+1 \\ 5-3-2 & -10+12-2 & 5-6+2 \end{pmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

(β) Διερεύνηση της παραμέτρου. Για να εξετάσουμε αν υπάρχει αντίστροφος, αρκεί να εξετάσουμε αν ο $B(t)$ μπορεί να μετατραπεί με γραμμοπράξεις στον I_3. Οι παρακάτω πράξεις επιτρέπονται για κάθε αριθμό t:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & t & 1 \\ 5 & t+1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & t & 1 \\ 5 & t+1 & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-3\Gamma_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 1\\ 5 & t+1 & t\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-5\Gamma_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & t-\frac{3}{2} & t\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & t-1\end{pmatrix}.$$

Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις που προκύπτουν.

Αν $t\neq 1$ **και** $t\neq\frac{3}{2}$**,** μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & t-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\frac{1}{t-1}\Gamma_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & t-\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\to\frac{2}{2t-3}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\frac{1}{2}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3.$$

Οι διαιρέσεις επιτρέπονται ακριβώς λόγω των υποθέσεων $t\neq 1$ και $t\neq\frac{3}{2}$. Άρα ο $B(t)$ είναι αντιστρέψιμος.

Αν $t=1$**,** ο πίνακας στον οποίο καταλήξαμε είναι

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Είναι κλιμακωτός με μηδενική τελευταία γραμμή, οπότε ο $B(1)$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αν $t=\frac{3}{2}$**,** παίρνουμε

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\frac{1}{2}\Gamma_2}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Και εδώ προκύπτει κλιμακωτός πίνακας με μηδενική τελευταία γραμμή, άρα ο $B(\frac{3}{2})$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Συνεπώς

$$\boxed{B(t)\text{ είναι αντιστρέψιμος}\quad\Longleftrightarrow\quad t\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,\frac{3}{2}\right\}.}$$

28. Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση $n=4$**.**

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1\end{array}\right).$$

Εκτελούμε διαδοχικά τις ακόλουθες γραμμοπράξεις:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{2}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \frac{3}{4}\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to \frac{2}{3}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to \frac{3}{4}\Gamma_3 \\ \Gamma_4 \to \frac{4}{5}\Gamma_4 \end{array} \xrightarrow{\quad} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{3}{4}\Gamma_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{2}{3}\Gamma_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Άρα η μοναδική λύση είναι

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 3, 2)}.$$

Γενική περίπτωση $n \geq 2$**.**

Το σύστημα είναι

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 1, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

Για $n = 2$ δεν υπάρχουν ενδιάμεσες εξισώσεις.

Στον επαυξημένο πίνακα εκτελούμε, με αυτή τη σειρά,

$$\Gamma_i \to \Gamma_i + \frac{i-1}{i}\Gamma_{i-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Σε κάθε βήμα χρησιμοποιούμε τη γραμμή Γ_{i-1} όπως έχει ήδη διαμορφωθεί.

Δείχνουμε επαγωγικά ότι η i-οστή γραμμή που προκύπτει έχει ηγετικό στοιχείο $(i+1)/i$ και σταθερό όρο $(i+1)/2$. Για $i = 1$ αυτό ισχύει, αφού τα αντίστοιχα στοιχεία είναι 2 και 1.

Αν ισχύει για τη γραμμή $i-1$, τότε η παραπάνω γραμμοπράξη μηδενίζει το στοιχείο -1 της στήλης $i-1$, ενώ το νέο διαγώνιο στοιχείο είναι

$$2 - \frac{i-1}{i} = \frac{i+1}{i}$$

και ο νέος σταθερός όρος είναι

$$1+\frac{i-1}{i}\cdot\frac{i}{2}=\frac{i+1}{2}.$$

Επομένως, το σύστημα ανάγεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{cases}\dfrac{i+1}{i}x_i-x_{i+1}=\dfrac{i+1}{2}, & 1\le i\le n-1,\\ \dfrac{n+1}{n}x_n=\dfrac{n+1}{2}.\end{cases}$$

Στη συνέχεια εκτελούμε τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i\to\frac{i}{i+1}\Gamma_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

Το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}x_i-\dfrac{i}{i+1}x_{i+1}=\dfrac{i}{2}, & 1\le i\le n-1,\\ x_n=\dfrac{n}{2}.\end{cases}$$

Τέλος, εργαζόμαστε από κάτω προς τα πάνω:

$$\Gamma_i\to\Gamma_i+\frac{i}{i+1}\Gamma_{i+1},\qquad i=n-1,n-2,\dots,1.$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $x_n=n/2$. Αν έχει ήδη προκύψει ότι

$$x_{i+1}=\frac{(i+1)(n-i)}{2},$$

τότε

$$x_i=\frac{i}{2}+\frac{i}{i+1}x_{i+1}=\frac{i}{2}+\frac{i(n-i)}{2}=\frac{i(n+1-i)}{2}.$$

Άρα η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\end{array}\right),\qquad \boxed{x_i=\frac{i(n+1-i)}{2},\quad i=1,\dots,n}.$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση και ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό n.

29. Θεωρούμε το κυκλικό σύστημα

$$\begin{cases}x_1+x_2=b_1,\\ x_2+x_3=b_2,\\ \qquad\vdots\\ x_{n-1}+x_n=b_{n-1},\\ x_n+x_1=b_n.\end{cases}$$

Αφήνουμε αρχικά την τελευταία γραμμή αμετάβλητη. Στις πρώτες $n-1$ γραμμές εκτελούμε διαδοχικά

$$\Gamma_i\to\Gamma_i-\Gamma_{i+1},\qquad i=n-2,n-3,\dots,1.$$

Σε κάθε βήμα χρησιμοποιούμε τη γραμμή Γ_{i+1} όπως έχει ήδη διαμορφωθεί.
Για παράδειγμα, οι δύο τελευταίες από τις πρώτες $n-1$ εξισώσεις γίνονται

$$x_{n-1} + x_n = b_{n-1}, \qquad x_{n-2} - x_n = b_{n-2} - b_{n-1}.$$

Συνεχίζοντας προς τα πάνω, παίρνουμε

$$x_i + v_i x_n = d_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

όπου

$$v_i = (-1)^{n-i+1}, \qquad d_i = \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{j-i} b_j.$$

Θέτουμε

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = b_n - d_1.$$

Η τελευταία εξίσωση παραμένει $x_1 + x_n = b_n$. Με τη γραμμοπράξη

$$\Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1$$

παίρνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & \mathbf{v} & \mathbf{d} \\ O & 1-(-1)^n & \Delta \end{array}\right),$$

επειδή $v_1 = (-1)^n$.

Περίπτωση: ο n είναι περιττός.
Τότε $1-(-1)^n = 2$. Επομένως,

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & \mathbf{v} & \mathbf{d} \\ O & 2 & \Delta \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_n \to \frac{1}{2}\Gamma_n} \left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & \mathbf{v} & \mathbf{d} \\ O & 1 & \frac{\Delta}{2} \end{array}\right).$$

Με τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - v_i \Gamma_n, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

καταλήγουμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & O & \mathbf{d} - \frac{\Delta}{2}\mathbf{v} \\ O & 1 & \frac{\Delta}{2} \end{array}\right).$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιουσδήποτε σταθερούς όρους:

$$\boxed{x_n = \frac{\Delta}{2}, \qquad x_i = d_i - \frac{v_i \Delta}{2}, \quad i = 1, \ldots, n-1.}$$

Ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό n.

Μια ισοδύναμη έκφραση της λύσης προκύπτει ξεκινώντας από το x_1. Επειδή $v_1 = -1$, έχουμε

$$x_1 = d_1 + \frac{b_n - d_1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} b_j.$$

Από τις σχέσεις $x_{i+1} = b_i - x_i$ παίρνουμε

$$x_i = (-1)^{i-1}x_1 + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i-1-j}b_j, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Περίπτωση: ο n είναι άρτιος.

Τότε ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & \mathbf{v} & \mathbf{d} \\ O & 0 & \Delta \end{array}\right).$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$d_1 = b_n.$$

Ισοδύναμα, η συνθήκη συμβιβαστότητας είναι

$$\boxed{b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + b_{n-1} - b_n = 0.}$$

Αν ισχύει αυτή η συνθήκη, ο παραπάνω πίνακας είναι ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Ο άγνωστος x_n είναι ελεύθερος και

$$\boxed{x_i = d_i + (-1)^{n-i}x_n, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad x_n \in \mathbb{R}.}$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό $n - 1$.

Αν $\Delta \neq 0$, εκτελούμε πρώτα

$$\Gamma_n \to \frac{1}{\Delta}\Gamma_n$$

και στη συνέχεια τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - d_i\Gamma_n, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & \mathbf{v} & O \\ O & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή αντιστοιχεί στην αδύνατη εξίσωση $0x_1 + \cdots + 0x_n = 1$. Ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό $n - 1$, ενώ ο επαυξημένος πίνακας έχει βαθμό n.

30. Γράφουμε

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2.$$

Οι συνθήκες $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ και $p(t) = b$ δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_0 + c_1 + c_2 = 2, \\ c_0 + tc_1 + t^2c_2 = b. \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & t & t^2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & t^2 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-t\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t(t-1) & b-1-t \end{array}\right).$$

Περίπτωση $t \neq 0, 1$**.**

Έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t(t-1) & b-1-t \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3\to\frac{1}{t(t-1)}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1-t}{t(t-1)} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t^2-b+1}{t(t-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1-t}{t(t-1)} \end{array}\right).$$

Επομένως, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2 που ικανοποιεί τις συνθήκες, με συντελεστές

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = \frac{t^2-b+1}{t(t-1)}, \qquad c_2 = \frac{b-1-t}{t(t-1)}.$$

Μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή

$$\boxed{p(x) = 1 + x + \frac{b-1-t}{t(t-1)}x(x-1).}$$

Περίπτωση $t = 0$ **ή** $t = 1$**.**

Θέτουμε $\varepsilon = b - 1 - t$. Ο πίνακας που προέκυψε μετά τις αρχικές γραμμοπράξεις γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{array}\right).$$

Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $\varepsilon = 0$. Αναλυτικά,

$$\boxed{\begin{aligned} t = 0: &\quad b = 1, \\ t = 1: &\quad b = 2. \end{aligned}}$$

Αν ισχύει η αντίστοιχη συνθήκη, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Έτσι,

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 1 - c_2, \qquad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Υπάρχουν άπειρα πολυώνυμα:

$$\boxed{p(x) = 1 + x + c_2 x(x-1), \qquad c_2 \in \mathbb{R}.}$$

Αν $\varepsilon \neq 0$, έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{\varepsilon}\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Το σύστημα είναι αδύνατο, οπότε δεν υπάρχει πολυώνυμο που να ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες.

31. Ο πίνακας των συντελεστών είναι

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}, \qquad n \geq 2.$$

Θέτουμε

$$B = b_1 + \cdots + b_n.$$

Στον επαυξημένο πίνακα εκτελούμε τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - \Gamma_1, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 - b_1 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 & b_3 - b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 & b_n - b_1 \end{array}\right).$$

Περίπτωση $a = 1$.

Ο τελευταίος πίνακας γίνεται

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 - b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n - b_1 \end{array}\right).$$

Άρα η αναγκαία και ικανή συνθήκη συμβιβαστότητας είναι

$$\boxed{b_1 = b_2 = \cdots = b_n}.$$

Αν όλοι οι σταθεροί όροι έχουν την κοινή τιμή β, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Επομένως, όλες οι λύσεις δίνονται από

$$\boxed{x_1 = \beta - x_2 - \cdots - x_n, \qquad x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.}$$

Αν οι σταθεροί όροι δεν είναι όλοι ίσοι, επιλέγουμε $j \geq 2$ με $b_j - b_1 \neq 0$. Εκτελούμε πρώτα

$$\Gamma_j \to \frac{1}{b_j - b_1}\Gamma_j.$$

Έπειτα εκτελούμε τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - b_1\Gamma_j, \qquad \Gamma_i \to \Gamma_i - (b_i - b_1)\Gamma_j \quad (i \geq 2,\ i \neq j).$$

Τέλος, αν $j \neq 2$, αντιμεταθέτουμε τις γραμμές Γ_2 και Γ_j. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right).$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $a = 1$, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι πάντοτε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε $\operatorname{rank}(A) = 1$. Ο επαυξημένος πίνακας έχει βαθμό 1 στη συμβιβαστή περίπτωση και βαθμό 2 στην αδύνατη περίπτωση.

Για $a \neq 1$, διαιρούμε τις γραμμές $2, \ldots, n$ με $a - 1$ και θέτουμε

$$d_i = \frac{b_i - b_1}{a - 1}, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{array}\right).$$

Αφαιρούμε από την πρώτη γραμμή όλες τις υπόλοιπες:

$$\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 - \cdots - \Gamma_n.$$

Ο πίνακας γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a+n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{array}\right),$$

όπου

$$h = b_1 - \sum_{i=2}^{n} d_i = \frac{(a+n-1)b_1 - B}{a-1}.$$

Περίπτωση $a \neq 1, 1-n$**.**

Επειδή $a+n-1 \neq 0$, εκτελούμε πρώτα

$$\Gamma_1 \to \frac{1}{a+n-1}\Gamma_1$$

και στη συνέχεια τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i \to \Gamma_i + \Gamma_1, \qquad i = 2, \ldots, n.$$

Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h}{a+n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 + \frac{h}{a+n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 + \frac{h}{a+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n + \frac{h}{a+n-1} \end{array}\right).$$

Για $i \geq 2$ έχουμε

$$d_i + \frac{h}{a+n-1} = \frac{b_i - b_1}{a-1} + \frac{(a+n-1)b_1 - B}{(a-1)(a+n-1)} = \frac{(a+n-1)b_i - B}{(a-1)(a+n-1)}.$$

Ο ίδιος τύπος ισχύει και για το x_1. Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\boxed{x_i = \frac{(a+n-1)b_i - B}{(a-1)(a+n-1)}, \qquad i = 1, \ldots, n.}$$

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι ο I_n και $\operatorname{rank}(A) = n$.

Περίπτωση $a = 1-n$**.**

Τότε $a-1 = -n$, οπότε

$$h = \frac{B}{n}, \qquad d_i = \frac{b_1 - b_i}{n}.$$

Ο πίνακας που προέκυψε πριν από τη διαίρεση με $a+n-1$ γίνεται

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{B}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_1-b_2}{n} \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{b_1-b_3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{b_1-b_n}{n} \end{array}\right).$$

Αντιμεταθέτουμε πρώτα την πρώτη με την τελευταία γραμμή:

$$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_n.$$

Κατόπιν εκτελούμε

$$\Gamma_1 \to -\Gamma_1.$$

Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί πλέον στην εξίσωση

$$x_1 - x_n = \frac{b_n - b_1}{n}.$$

Τέλος, εκτελούμε τις ανεξάρτητες γραμμοπράξεις

$$\Gamma_i \to \Gamma_i + \Gamma_1, \qquad i = 2, \dots, n-1.$$

Για $n = 2$ δεν υπάρχουν γραμμοπράξεις αυτού του τελευταίου τύπου.

Καταλήγουμε στον πίνακα

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & -\mathbf{1} & \mathbf{e} \\ O & 0 & \frac{B}{n} \end{array}\right),$$

όπου

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \frac{b_n - b_1}{n} \\ \frac{b_n - b_2}{n} \\ \vdots \\ \frac{b_n - b_{n-1}}{n} \end{pmatrix}.$$

Άρα η αναγκαία και ικανή συνθήκη συμβιβαστότητας είναι

$$\boxed{B = b_1 + \cdots + b_n = 0}.$$

Αν $B = 0$, ο παραπάνω πίνακας είναι ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Το σύστημα ισοδυναμεί με

$$x_i - x_n = \frac{b_n - b_i}{n}, \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

μαζί με τη μηδενική εξίσωση $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$. Επομένως, έχει άπειρες λύσεις:

$$\boxed{x_i = x_n + \frac{b_n - b_i}{n}, \quad i = 1, \dots, n-1, \qquad x_n \in \mathbb{R}.}$$

Αν $B \neq 0$, εκτελούμε πρώτα

$$\Gamma_n \to \frac{n}{B}\Gamma_n$$

και στη συνέχεια

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - \frac{b_n - b_i}{n}\Gamma_n, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι

$$\left(\begin{array}{cc|c} I_{n-1} & -\mathbf{1} & O \\ O & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Η τελευταία γραμμή δείχνει ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Για $a = 1 - n$, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι πάντοτε

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\mathbf{1} \\ O & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε $\operatorname{rank}(A) = n - 1$. Ο επαυξημένος πίνακας έχει βαθμό $n - 1$ όταν $B = 0$ και βαθμό n όταν $B \neq 0$.

Συνολικά,

$$\boxed{\operatorname{rank}(A) = \begin{cases} n, & a \neq 1, 1-n, \\ 1, & a = 1, \\ n-1, & a = 1-n. \end{cases}}$$

Κεφάλαιο 2

Ορίζουσες

Τι θέλουμε να ορίσουμε.
Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A θέλουμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό, τον οποίο θα ονομάσουμε **ορίζουσα του A**.
Αν $F^{n\times n}$ είναι το σύνολο των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα F, αναζητούμε λοιπόν μια συνάρτηση

$$D : F^{n\times n} \longrightarrow F$$

με ορισμένες συγκεκριμένες ιδιότητες.
Αν οι γραμμές του πίνακα A είναι $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, γράφουμε

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Κάθε Γ_j παριστάνει ολόκληρη την j-οστή γραμμή του πίνακα:

$$\Gamma_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιότητες που απαιτούμε είναι οι ακόλουθες.

1. Γραμμικότητα ως προς κάθε γραμμή χωριστά.
Αν κρατήσουμε όλες τις άλλες γραμμές σταθερές, η αντικατάσταση της j-οστής γραμμής με $\lambda\Gamma_j + \mu\Gamma'_j$ πρέπει να δίνει

$$D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \lambda\Gamma_j + \mu\Gamma'_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} + \mu D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma'_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix},$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς λ, μ και οποιεσδήποτε γραμμές Γ_j, Γ'_j με n στοιχεία.

Παράδειγμα:

$$D\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2\cdot 1-3\cdot 3 & 2\cdot 2-3\cdot(-1) & 2\cdot(-1)-3\cdot 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 2D\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 3D\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Προσέχουμε ότι οι τρεις πίνακες διαφέρουν μόνο στην j-οστή γραμμή τους. Όλες οι υπόλοιπες γραμμές παραμένουν ίδιες και στις ίδιες θέσεις.

2. Μηδενισμός όταν δύο γραμμές είναι ίσες.
Αν ένας πίνακας A έχει δύο ίσες γραμμές, απαιτούμε να ισχύει

$$D(A) = 0.$$

Δηλαδή, αν $\Gamma_i = \Gamma_j$ για κάποιους δείκτες $i \neq j$, τότε η τιμή της συνάρτησης στον πίνακα είναι μηδέν.
Παράδειγμα:

$$D\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Η τιμή στον ταυτοτικό πίνακα είναι 1**.**

Απαιτούμε να ισχύει

$$D(I_n) = 1.$$

Οι παραπάνω απαιτήσεις περιγράφουν τη συνάρτηση που θέλουμε να κατασκευάσουμε. Χρειάζεται όμως να απαντήσουμε σε δύο ερωτήματα:

1. Υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες·
2. Αν υπάρχει, καθορίζεται μοναδικά από αυτές·

Θα αποδείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα και έπειτα την ύπαρξη.
Ας δούμε πρώτα κάποιες συνέπειες των ιδιοτήτων που θέλουμε να έχει η συνάρτηση D.

Συνέπειες των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων.

Έστω ότι η συνάρτηση

$$D : F^{n\times n} \longrightarrow F$$

είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή χωριστά, μηδενίζεται σε πίνακες με δύο ίσες γραμμές και ικανοποιεί την ισότητα $D(I_n) = 1$.

Θα αποδείξουμε ορισμένες συνέπειες αυτών των ιδιοτήτων. Όπως προηγουμένως, συμβολίζουμε τις γραμμές ενός πίνακα με $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

1. Αν ένας πίνακας έχει μηδενική γραμμή, τότε η τιμή της συνάρτησης σε αυτόν είναι μηδέν.
Απόδειξη: Έστω ότι η j-οστή γραμμή του πίνακα είναι μηδενική. Μπορούμε να τη γράψουμε ως $0 \cdot \Gamma_j$, όπου Γ_j είναι οποιαδήποτε γραμμή με n στοιχεία. Από τη γραμμικότητα ως προς την j-οστή γραμμή, παίρνουμε

$$D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = 0 \cdot D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = 0.$$

Επομένως, η ύπαρξη έστω και μίας μηδενικής γραμμής συνεπάγεται ότι $D(A) = 0$. ■

2. Ο πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με αριθμό λ πολλαπλασιάζει την τιμή της συνάρτησης με λ.
Απόδειξη: Έστω ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A με την πράξη

$$\Gamma_j \longrightarrow \lambda\Gamma_j.$$

Οι υπόλοιπες γραμμές παραμένουν αμετάβλητες. Από τη γραμμικότητα ως προς την j-οστή γραμμή,

$$D(B) = D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \lambda\Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = \lambda D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = \lambda D(A).$$

Η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ. Για να αποτελεί όμως η αντικατάσταση στοιχειώδη πράξη γραμμών, απαιτούμε $\lambda \neq 0$. ■

3. Η ανταλλαγή δύο γραμμών αλλάζει το πρόσημο της τιμής της συνάρτησης.
Απόδειξη: Έστω ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A με ανταλλαγή των γραμ-

μών Γ_i, Γ_j, όπου $i < j$. Δηλαδή,

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι $D(B) = -D(A)$.
Για τον σκοπό αυτό, τοποθετούμε τη γραμμή $\Gamma_i + \Gamma_j$ τόσο στην i-οστή όσο και στην j-οστή θέση. Ο πίνακας που προκύπτει έχει δύο ίσες γραμμές, οπότε

$$D \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = 0.$$

Εφαρμόζοντας τη γραμμικότητα ως προς την i-οστή γραμμή, παίρνουμε

$$0 = D \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε τώρα καθέναν από τους δύο όρους ως προς την j-οστή γραμμή. Για τον πρώτο όρο,

$$D \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} + D(A) = D(A),$$

επειδή ο πίνακας στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους έχει δύο ίσες γραμμές. Ομοίως, για τον δεύτερο όρο,

$$D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_i + \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = D(B) + D\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix} = D(B).$$

Συνεπώς, $0 = D(A) + D(B)$, άρα $\boxed{D(B) = -D(A).}$ ■

4. Η πρόσθεση σε μια γραμμή πολλαπλασίου μιας άλλης δεν αλλάζει την τιμή της συνάρτησης.

Απόδειξη: Έστω ότι ο πίνακας B προκύπτει από τον A με την πράξη

$$\Gamma_j \longrightarrow \Gamma_j + \lambda\Gamma_i, \qquad i < j.$$

Η i-οστή γραμμή παραμένει αμετάβλητη. Από τη γραμμικότητα ως προς την j-οστή γραμμή, έχουμε

$$D(B) = D\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \\ \vdots & \\ \Gamma_i & \leftarrow i \\ \vdots & \\ \Gamma_j + \lambda\Gamma_i & \leftarrow j \\ \vdots & \\ \Gamma_n & \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \\ \vdots & \\ \Gamma_i & \leftarrow i \\ \vdots & \\ \Gamma_j & \leftarrow j \\ \vdots & \\ \Gamma_n & \end{pmatrix} + \lambda D\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \\ \vdots & \\ \Gamma_i & \leftarrow i \\ \vdots & \\ \Gamma_i & \leftarrow j \\ \vdots & \\ \Gamma_n & \end{pmatrix}.$$

Ο πρώτος πίνακας στο τελευταίο μέλος είναι ο A. Στον δεύτερο πίνακα, η i-οστή και η j-οστή γραμμή είναι ίσες με Γ_i. Επομένως, η τιμή της συνάρτησης στον δεύτερο πίνακα είναι μηδέν. Άρα

$$D(B) = D(A) + \lambda \cdot 0 = D(A).$$

Η περίπτωση $j < i$ αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο, με την j-οστή γραμμή να βρίσκεται πάνω από την i-οστή. ■

Παρατήρηση. Για τις τέσσερις παραπάνω συνέπειες χρησιμοποιήσαμε μόνο τη γραμμικότητα ως προς κάθε γραμμή και τον μηδενισμό σε πίνακες με δύο ίσες γραμμές. Η απαίτηση $D(I_n) = 1$ θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη της μοναδικότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. (Θεώρημα Μοναδικότητας). Υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση

$$D : F^{n\times n} \longrightarrow F$$

η οποία είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή χωριστά, μηδενίζεται σε πίνακες με δύο ίσες γραμμές και ικανοποιεί την ισότητα

$$D(I_n) = 1.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι δύο συναρτήσεις D_1, D_2 ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Θα αποδείξουμε ότι

$$D_1(A) = D_2(A)$$

για κάθε πίνακα $A \in F^{n\times n}$.
Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε τέτοιο πίνακα A. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τον μετατρέπουμε σε έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα R.
Επειδή ο R είναι τετραγωνικός, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
1η περίπτωση: Ο R έχει μηδενική γραμμή.
Από τις συνέπειες που αποδείξαμε, κάθε συνάρτηση με τις απαιτούμενες ιδιότητες μηδενίζεται σε έναν τέτοιο πίνακα. Άρα

$$D_1(R) = D_2(R) = 0.$$

2η περίπτωση: Ο R δεν έχει μηδενική γραμμή.
Τότε καθεμία από τις n γραμμές του έχει έναν οδηγό. Οι οδηγοί βρίσκονται σε διαφορετικές στήλες και ο πίνακας έχει ακριβώς n στήλες. Επομένως, κάθε στήλη περιέχει έναν οδηγό.
Καθώς προχωρούμε από την πρώτη προς την τελευταία γραμμή, οι οδηγοί βρίσκονται σε διαδοχικά δεξιότερες στήλες. Άρα βρίσκονται στις θέσεις

$$(1,1), (2,2), \ldots, (n,n).$$

Επειδή ο πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός, κάθε οδηγός είναι 1 και όλα τα άλλα στοιχεία της στήλης του είναι μηδέν. Συνεπώς,

$$R = I_n.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε την παραδοχή για την τιμή στον μοναδιαίο πίνακα:

$$D_1(R) = D_1(I_n) = 1, \qquad D_2(R) = D_2(I_n) = 1.$$

Άρα και σε αυτή την περίπτωση

$$D_1(R) = D_2(R).$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι οι δύο συναρτήσεις παίρνουν την ίδια τιμή στον τελικό πίνακα R. Θα δείξουμε ότι παίρνουν την ίδια τιμή και στον αρχικό πίνακα A.
Για τον σκοπό αυτό ακολουθούμε τις γραμμοπράξεις με την αντίστροφη σειρά, επιστρέφοντας από τον R στον A.
Σε κάθε βήμα γνωρίζουμε πώς να ανακτήσουμε την τιμή στον προηγούμενο πίνακα:

- Αν είχαμε ανταλλάξει δύο γραμμές, αλλάζουμε το πρόσημο της τιμής. $\big($Αν είχαμε πολλαπλασιάσει με τον $M_{\mu\nu}$, πολλαπλασιάζουμε με τον $M_{\mu\nu}^{-1} = M_{\mu\nu}\big)$.

- Αν είχαμε πολλαπλασιάσει μια γραμμή με αριθμό $\lambda \neq 0$, διαιρούμε την τιμή με λ. $\big($Αν είχαμε πολλαπλασιάσει με τον $T_\mu(\lambda)$, πολλαπλασιάζουμε με τον $T_\mu^{-1}(\lambda) = T_\mu(\lambda^{-1})\big)$.

- Αν είχαμε προσθέσει σε μια γραμμή πολλαπλάσιο μιας άλλης, η τιμή παραμένει ίδια. $\big($Αν είχαμε πολλαπλασιάσει με τον $T_{\mu\nu}(\lambda)$, πολλαπλασιάζουμε με τον $T_{\mu\nu}^{-1}(\lambda) = T_{\mu\nu}(-\lambda)\big)$.

Οι κανόνες αυτοί ισχύουν και για τις δύο συναρτήσεις. Επομένως, αν οι τιμές τους συμφωνούν σε έναν πίνακα, συμφωνούν και στον αμέσως προηγούμενο.
Ξεκινώντας από την ισότητα $D_1(R) = D_2(R)$ και επιστρέφοντας διαδοχικά μέχρι τον A, καταλήγουμε στην ισότητα

$$D_1(A) = D_2(A).$$

Επειδή ο A ήταν οποιοσδήποτε, έχουμε $D_1 = D_2$. Άρα υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση με τις τρεις απαιτούμενες ιδιότητες. ■

Παρατήρηση. Η απόδειξη **δεν προϋποθέτει ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή είναι μοναδική**. Αρκεί να επιλέξουμε μία ακολουθία γραμμοπράξεων που οδηγεί σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ακολουθία για τις δύο συναρτήσεις.

Μέχρι στιγμής αποδείξαμε ότι, αν υπάρχει συνάρτηση με τις τρεις απαιτούμενες ιδιότητες, είναι μοναδική. Απομένει να αποδείξουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πράγματι υπάρχει.

Η επαγωγική κατασκευή της ορίζουσας.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι υπάρχει το πολύ μία συνάρτηση που είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή χωριστά, μηδενίζεται σε πίνακες με δύο ίσες γραμμές και έχει την τιμή 1 στον μοναδιαίο πίνακα. Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξη μιας

τέτοιας συνάρτησης, κατασκευάζοντάς την επαγωγικά.
Για πίνακες τάξης $\mathbf{1 \times 1}$ θέτουμε

$$\boxed{\det(a) = a}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική και ικανοποιεί την ισότητα $\det(1) = 1$. Η ιδιότητα που αφορά δύο ίσες γραμμές δεν χρειάζεται έλεγχο, αφού υπάρχει μόνο μία γραμμή.
Για πίνακες τάξης $\mathbf{2 \times 2}$ θέτουμε

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

1. Παρατηρούμε ότι

$$\det \begin{pmatrix} \kappa a_{11} + \lambda a'_{11} & \kappa a_{12} + \lambda a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\kappa a_{11} + \lambda a'_{11})a_{22} - (\kappa a_{12} + \lambda a'_{12})a_{21} =$$

$$= \kappa a_{11}a_{22} + \lambda a'_{11}a_{22} - \kappa a_{12}a_{21} - \lambda a'_{12}a_{21} =$$

$$= \kappa(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \lambda(a'_{11}a_{22} - a'_{12}a_{22}) =$$

$$= \kappa \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η γραμμικότητα ως προς τη 2η γραμμή.

2. Παρατηρούμε ότι $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11} = 0.$

3. $\det(I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$

Υποθέτουμε ότι οι ορίζουσες των πινάκων τάξης μικρότερης από n έχουν ήδη κατασκευαστεί επαγωγικά και ικανοποιούν τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες.

Για κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$ τάξης $n \geq 3$, ορίζουμε

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.}$$

Ο πίνακας A_{1j} προκύπτει από τον A με διαγραφή της πρώτης γραμμής και της j-οστής στήλης. Οι γραμμές και οι στήλες που απομένουν διατηρούν την αρχική τους σειρά. Δηλαδή,

$$A_{1j} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \cancel{a_{11}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{1j}} & \cancel{\cdots\ a_{1n}} \\ \hline a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots\ a_{2n} \\ \hline \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots\ a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Στο δεξί μέλος εμφανίζονται ορίζουσες πινάκων τάξης $n-1$, οι οποίες είναι ήδη ορισμένες. Επομένως, ο παραπάνω τύπος προσδιορίζει έναν πραγματικό αριθμό για κάθε πίνακα A τάξης n.
Απομένει να αποδείξουμε ότι η νέα συνάρτηση Det ικανοποιεί τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες.
Κατά την απόδειξη θα χρησιμοποιούμε τις γνωστές ιδιότητες των οριζουσών μικρότερης τάξης, χωρίς να θεωρούμε δεδομένες τις αντίστοιχες ιδιότητες της Det.

1. Η τιμή στον μοναδιαίο πίνακα.
Στην πρώτη γραμμή του I_n, το πρώτο στοιχείο είναι 1 και όλα τα υπόλοιπα είναι μηδέν. Επομένως, στον ορισμό της $\mathrm{Det}\, I_n$ παραμένει μόνο ο πρώτος όρος:

$$\mathrm{Det}\, I_n = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det I_{n-1}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, $\det I_{n-1} = 1$. Άρα

$$\boxed{\mathrm{Det}\, I_n = 1.}$$

2. Γραμμικότητα ως προς κάθε γραμμή χωριστά.
Έστω ότι οι πίνακες A, B διαφέρουν μόνο στη γραμμή r. Συμβολίζουμε τις αντίστοιχες γραμμές τους με Γ_r, Γ'_r.
Έστω επίσης C ο πίνακας που έχει τις ίδιες υπόλοιπες γραμμές, ενώ στη θέση r έχει τη γραμμή

$$\lambda\Gamma_r + \mu\Gamma'_r.$$

Δηλαδή,

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_r \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma'_r \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \lambda\Gamma_r + \mu\Gamma'_r \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{pmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{Det}\, C = \lambda\, \mathrm{Det}\, A + \mu\, \mathrm{Det}\, B.$$

Περίπτωση $r = 1$**.**
Οι πίνακες A, B, C έχουν ίδιες όλες τις γραμμές εκτός από την πρώτη. Συνεπώς, αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και την ίδια στήλη j, προκύπτει ο ίδιος πίνακας:

$$A_{1j} = B_{1j} = C_{1j}.$$

Αν τα στοιχεία των A, B, C συμβολίζονται αντίστοιχα με a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, έχουμε

$$c_{1j} = \lambda a_{1j} + \mu b_{1j}.$$

Επομένως, από τον ορισμό,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} C &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (\lambda a_{1j} + \mu b_{1j}) \det A_{1j} \\
&= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} b_{1j} \det A_{1j} \\
&= \lambda \operatorname{Det} A + \mu \operatorname{Det} B.
\end{aligned}$$

Περίπτωση $r \geq 2$**.**
Τώρα η πρώτη γραμμή είναι ίδια και στους τρεις πίνακες, οπότε

$$a_{1j} = b_{1j} = c_{1j} \qquad \text{για κάθε } j.$$

Αν διαγράψουμε την πρώτη γραμμή και τη στήλη j, οι πίνακες A_{1j}, B_{1j}, C_{1j} διαφέρουν μόνο στη γραμμή $r-1$. $\big($Η r-γραμμή ανεβαίνει μία θέση πάνω, αφού διαγράψουμε την πρώτη γραμμή των πινάκων$\big)$.
Η $(r-1)$-γραμμή αυτή του C_{1j} είναι ο γραμμικός συνδυασμός, με συντελεστές λ, μ, των αντίστοιχων $(r-1)$-γραμμών των A_{1j}, B_{1j}. Πράγματι, η διαγραφή του j-οστού στοιχείου από τις γραμμές δεν αλλάζει τις σχέσεις μεταξύ των υπολοίπων στοιχείων τους.
Από τη γραμμικότητα της ήδη ορισμένης ορίζουσας τάξης $n-1$, παίρνουμε

$$\det C_{1j} = \lambda \det A_{1j} + \mu \det B_{1j}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} C &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det C_{1j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \big(\lambda \det A_{1j} + \mu \det B_{1j}\big) \\
&= \lambda \operatorname{Det} A + \mu \operatorname{Det} B.
\end{aligned}$$

Επομένως, η Det είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή χωριστά.

3. Μηδενισμός όταν δύο γραμμές είναι ίσες.
Έστω ότι ο A έχει δύο ίσες γραμμές. Θα αποδείξουμε ότι $\operatorname{Det} A = 0$, διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις.

1η περίπτωση: οι δύο ίσες γραμμές δεν περιλαμβάνουν την πρώτη.
Έστω

$$\Gamma_r = \Gamma_s, \qquad 2 \le r < s \le n.$$

Σε κάθε πίνακα A_{1j}, οι δύο αυτές γραμμές παραμένουν ίσες, αφού από καθεμία διαγράφεται το στοιχείο στην ίδια στήλη j.
Από την επαγωγική υπόθεση,

$$\det A_{1j} = 0 \qquad \text{για κάθε } j.$$

Επομένως,

$$\operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = 0.$$

2η περίπτωση: οι δύο πρώτες γραμμές είναι ίσες. Για $n = 2$, το έχουμε αποδείξει.
Έστω λοιπόν $n \ge 3$. Ξεκινάμε από τον ορισμό

$$\operatorname{Det} A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

και αναπτύσσουμε κάθε μικρότερη ορίζουσα $\det A_{1j}$ κατά την πρώτη γραμμή της.
Θα προκύψουν πίνακες, έστω

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & \cancel{a_{1k}} & \cdots & \cancel{a_{1n}} \\ \cancel{a_{21}} & \cdots & \cancel{a_{2j}} & \cdots & \cancel{a_{2k}} & \cdots & \cancel{a_{2n}} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3k} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{όπου } j < k.$$

Η πρώτη γραμμή του A_{1j} προέρχεται από τη δεύτερη γραμμή του A, αφού διαγραφεί το στοιχείο a_{2j}. Επομένως, κάθε όρος της διπλής ανάπτυξης περιέχει ένα γινόμενο

$$a_{1j} a_{2k}, \qquad \text{με } j < k.$$

Θα δείξουμε ότι οι όροι αυτοί αλληλοαναιρούνται ανά δύο.
Οι δείκτες j, k αναφέρονται στις στήλες του αρχικού πίνακα. Μετά την πρώτη

διαγραφή, όμως, η αρίθμηση των στηλών αλλάζει. Γι' αυτό εξετάζουμε χωριστά τις δύο διαδρομές.

Πρώτη διαδρομή: επιλέγουμε πρώτα το a_{1j} και έπειτα το a_{2k}.
Διαγράφουμε την πρώτη γραμμή και τη στήλη j, οπότε προκύπτει ο πίνακας A_{1j}. Σε αυτόν:

- η αρχική δεύτερη γραμμή είναι πλέον η πρώτη,
- η αρχική στήλη k βρίσκεται πλέον στη θέση $k-1$, επειδή διαγράφηκε μια προηγούμενή της στήλη.

Άρα το στοιχείο a_{2k} βρίσκεται στη θέση $(1, k-1)$ του A_{1j}. Διαγράφοντας τη γραμμή και τη στήλη του, παίρνουμε

$$(A_{1j})_{1,k-1} = C_{jk}.$$

Ο αντίστοιχος όρος της διπλής ανάπτυξης είναι

$$\begin{aligned}(-1)^{1+j} a_{1j} \, (-1)^{1+(k-1)} a_{2k} \det C_{jk} \\ = (-1)^{j+k+1} a_{1j} a_{2k} \det C_{jk}.\end{aligned}$$

Δεύτερη διαδρομή: επιλέγουμε πρώτα το a_{1k} και έπειτα το a_{2j}.
Διαγράφουμε την πρώτη γραμμή και τη στήλη k, οπότε προκύπτει ο πίνακας A_{1k}. Σε αυτόν:

- η αρχική δεύτερη γραμμή είναι πάλι η πρώτη,
- η αρχική στήλη j παραμένει στη θέση j, επειδή η στήλη που διαγράφηκε βρίσκεται δεξιότερά της.

Άρα το στοιχείο a_{2j} βρίσκεται στη θέση $(1, j)$ του A_{1k}. Διαγράφοντας τη γραμμή και τη στήλη του, παίρνουμε

$$(A_{1k})_{1,j} = C_{jk}.$$

Ο αντίστοιχος όρος είναι

$$\begin{aligned}(-1)^{1+k} a_{1k} \, (-1)^{1+j} a_{2j} \det C_{jk} \\ = (-1)^{j+k+2} a_{1k} a_{2j} \det C_{jk}.\end{aligned}$$

Και στις δύο διαδρομές έχουν αφαιρεθεί οι δύο πρώτες γραμμές του αρχικού πίνακα και οι αρχικές στήλες j, k. Οι υπόλοιπες γραμμές και στήλες διατηρούν την ίδια σειρά. Συνεπώς,

$$\boxed{(A_{1j})_{1,k-1} = (A_{1k})_{1,j} = C_{jk}.}$$

Τα πρόσημα των δύο όρων είναι αντίθετα, διότι

$$(-1)^{j+k+2} = -(-1)^{j+k+1}.$$

Επομένως, το άθροισμά τους είναι

$$(-1)^{j+k+1}\big(a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j}\big)\det C_{jk}.$$

Επειδή οι δύο πρώτες γραμμές του A είναι ίσες, έχουμε

$$a_{1j} = a_{2j}, \qquad a_{1k} = a_{2k}.$$

Άρα

$$a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j} = 0,$$

οπότε οι δύο όροι αλληλοαναιρούνται.
Κάθε όρος της διπλής ανάπτυξης αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικές στήλες. Τον ζευγαρώνουμε με τον όρο που επιλέγει τις ίδιες στήλες με την αντίστροφη σειρά. Έτσι περιλαμβάνονται όλοι οι όροι, χωρίς να παραλείπεται ή να επαναλαμβάνεται κανένας.
Συνεπώς,

$$\operatorname{Det} A = 0.$$

3η περίπτωση: η πρώτη γραμμή είναι ίση με κάποια Γ_k, όπου $k \geq 3$.
Θα ανταλλάξουμε τις γραμμές Γ_2, Γ_k, ώστε οι ίσες γραμμές να βρεθούν στις δύο πρώτες θέσεις. Πρέπει όμως πρώτα να δικαιολογήσουμε την επίδραση αυτής της ανταλλαγής στη νέα συνάρτηση Det.
Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από την ανταλλαγή. Η πρώτη γραμμή δεν μεταβάλλεται, οπότε

$$b_{1j} = a_{1j} \qquad \text{για κάθε } j.$$

Για κάθε j, ο πίνακας B_{1j} προκύπτει από τον A_{1j} με ανταλλαγή δύο γραμμών. Για τις ορίζουσες τάξης $n-1$ γνωρίζουμε ήδη ότι μια τέτοια ανταλλαγή αλλάζει το πρόσημο: αυτό προκύπτει από τη γραμμικότητα και τον μηδενισμό σε ίσες γραμμές, $\big($για τις $(n-1)$-ορίζουσες αυτά ισχύουν$\big)$, όπως αποδείξαμε στις συνέπειες των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων.
Επομένως,

$$\det B_{1j} = -\det A_{1j}.$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Det, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} B &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det B_{1j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j} \\
&= -\operatorname{Det} A.
\end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες γραμμές του B είναι ίσες. Από τη δεύτερη περίπτωση,

$$\mathrm{Det}\, B = 0.$$

Άρα και

$$\mathrm{Det}\, A = 0.$$

Η επαγωγική κατασκευή ολοκληρώθηκε. Η συνάρτηση Det που ορίσαμε είναι γραμμική ως προς κάθε γραμμή χωριστά, μηδενίζεται όταν δύο γραμμές είναι ίσες και παίρνει την τιμή 1 στον μοναδιαίο πίνακα.
Έχουμε λοιπόν αποδείξει την ύπαρξη συνάρτησης με τις τρεις απαιτούμενες ιδιότητες. Από την ήδη αποδεδειγμένη μοναδικότητα, αυτή είναι η μοναδική τέτοια συνάρτηση.
Τη συμβολίζουμε πλέον με **det** και την ονομάζουμε **ορίζουσα**. ■
Για ευκολία στον συμβολισμό πολλές φορές γράφουμε

$$|A| \quad \text{αντί} \quad \det(A)$$

ή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{αντί} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. Μπορούμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ενός πίνακα **ως προς οποιαδήποτε γραμμή**.
Απόδειξη: Έστω $i > 1$. Αντιμεταθέτουμε την i-γραμμή με την προηγούμενη $i-1$. Η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Συνεχίζουμε έτσι μέχρι η i-γραμμή να γίνει πρώτη. Επειδή υπάρχουν $i-1$ γραμμές πάνω από την i-γραμμή, θα χρειαστούν $i-1$ αντιμεταθέσεις. Επομένως η ορίζουσα θα πολλαπλασιαστεί με $(-1)^{i-1} = (-1)^{i-1}(-1)^2 = (-1)^{i+1}$.
Ο πίνακας έχει τώρα τη μορφή

$$B = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και παίρνουμε:
$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \det(C_{ij})$, όπου C_{ij} ο πίνακας που προκύπτει από τον A

αν αφαιρέσουμε την i-γραμμή και την j-στήλη. Επομένως
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+1}(-1)^{1+j}a_{ij}\det(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j+2}a_{ij}\det(C_{ij}) =$
$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(C_{ij})$. Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε αν αναπτύσσαμε κατά την i-γραμμή. ■

Παράδειγμα:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ανάπτυξη κατά την πρώτη γραμμή:

$$\Delta = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ανάπτυξη κατά τη δεύτερη γραμμή:

$$\Delta = (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ανάπτυξη κατά την τρίτη γραμμή:

$$\Delta = (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Και οι τρεις αναπτύξεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει

$$\det A = \det(A^{\mathsf{T}}).$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς την τάξη του πίνακα.
Για πίνακες τάξης 1, η ισότητα είναι προφανής.
Για πίνακες τάξης 2, έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Έστω τώρα $n \geq 3$. Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για όλους τους πίνακες τάξης μικρότερης από n και θα την αποδείξουμε για έναν πίνακα $A = (a_{ij})$ τάξης n.

Μια συνέπεια της επαγωγικής υπόθεσης.
Αν $B = (b_{rs})$ είναι πίνακας τάξης m, όπου $2 \leq m < n$, τότε, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\det B = \det(B^{\mathsf{T}}).$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του B^{T} κατά την πρώτη γραμμή του. Επειδή

$$(B^{\mathsf{T}})_{1r} = (B_{r1})^{\mathsf{T}},$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\det B &= \det(B^{\mathsf{T}}) \\ &= \sum_{r=1}^{m} (-1)^{1+r} b_{r1} \det\big((B_{r1})^{\mathsf{T}}\big) \\ &= \sum_{r=1}^{m} (-1)^{1+r} b_{r1} \det B_{r1}.\end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε πάλι την επαγωγική υπόθεση, αυτή τη φορά για τους πίνακες τάξης $m-1$.
Επομένως, για τους πίνακες τάξης μικρότερης από n, μπορούμε ήδη να αναπτύσσουμε την ορίζουσα και κατά την πρώτη στήλη.
Για $i, j \geq 2$, συμβολίζουμε με C_{ij} τον πίνακα που προκύπτει από τον A διαγράφοντας τις γραμμές $1, i$ και τις στήλες $1, j$. Οι υπόλοιπες γραμμές και στήλες διατηρούν την αρχική τους σειρά.
Υπολογισμός της $\det A$.
Από τον επαγωγικό ορισμό,

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Για $j \geq 2$, η πρώτη στήλη του

$$A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

αποτελείται από τα στοιχεία

$$a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα $\det A_{1j}$ κατά αυτή τη στήλη, όπως μας επιτρέπει η παραπάνω συνέπεια της επαγωγικής υπόθεσης.
Το στοιχείο a_{i1} βρίσκεται στη θέση $(i-1,1)$ του A_{1j}. Άρα το πρόσημό του είναι

$$(-1)^{(i-1)+1} = (-1)^i.$$

Ο πίνακας που απομένει μετά τη διαγραφή της γραμμής και της στήλης του είναι ο C_{ij}. Επομένως,

$$\det A_{1j} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_{i1} \det C_{ij}.$$

Αντικαθιστώντας στην ανάπτυξη της $\det A$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_{i1} \det C_{ij} \\ &= a_{11} \det A_{11} + \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{1j} a_{i1} \det C_{ij}. \end{aligned}$$

Υπολογισμός της $\det(A^\mathsf{T})$.
Η πρώτη γραμμή του A^T αποτελείται από τα στοιχεία

$$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}.$$

Επίσης,

$$(A^\mathsf{T})_{1i} = (A_{i1})^\mathsf{T}.$$

Επομένως, αναπτύσσοντας κατά την πρώτη γραμμή και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} \det(A^\mathsf{T}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det\big((A_{i1})^\mathsf{T}\big) \\ &= a_{11} \det A_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A_{i1}. \end{aligned}$$

Για $i \geq 2$, η πρώτη γραμμή του

$$A_{i1} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

αποτελείται από τα στοιχεία

$$a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσά του κατά την πρώτη γραμμή.
Το στοιχείο a_{1j} βρίσκεται στη θέση $(1, j-1)$ του A_{i1}, οπότε το πρόσημό του είναι

$$(-1)^{1+(j-1)} = (-1)^j.$$

Ο πίνακας που απομένει μετά τη διαγραφή της γραμμής και της στήλης του είναι πάλι ο C_{ij}. Άρα

$$\det A_{i1} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^j a_{1j} \det C_{ij}.$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \det(A^{\mathsf{T}}) &= a_{11} \det A_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^j a_{1j} \det C_{ij} \\ &= a_{11} \det A_{11} + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{i+j+1} a_{i1} a_{1j} \det C_{ij}. \end{aligned}$$

Οι παραστάσεις που βρήκαμε για τις $\det A$ και $\det(A^{\mathsf{T}})$ περιέχουν ακριβώς τους ίδιους όρους. Διαφέρει μόνο η σειρά με την οποία αθροίζονται, ενώ

$$a_{1j} a_{i1} = a_{i1} a_{1j}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\det A = \det(A^{\mathsf{T}}).}$$

Η επαγωγή ολοκληρώθηκε. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.4. Μπορούμε να αναπτύξουμε την $\det(A)$ ως προς οποιαδήποτε στήλη.
Απόδειξη: Αυτό είναι άμεσο από το γεγονός $\det(A) = \det(A^T)$ και οι γραμμές του A^T είναι οι στήλες του A. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. Για δύο τετραγωνικούς πίνακες A, B της ίδιας τάξης,

$$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

Απόδειξη: Πρώτα μια παρατήρηση. Αν E είναι πίνακας γραμμοπράξης και X οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας της ίδιας τάξης, τότε

$$\boxed{\det(EX) = \det E \, \det X.}$$

Πράγματι, ο πολλαπλασιασμός EX εκτελεί στον X τη γραμμοπράξη που αντιστοιχεί στον E:

Γραμμοπράξη	$\det E$	$\det(EX)$
Ανταλλαγή δύο γραμμών	-1	$-\det X$
Πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με $\lambda \neq 0$	λ	$\lambda \det X$
Πρόσθεση πολλαπλασίου άλλης γραμμής	1	$\det X$

Έτσι, η ειδική αυτή περίπτωση προκύπτει από τις ήδη γνωστές ιδιότητες των γραμμοπράξεων.
Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπουμε τον A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα R. Αν $E_1, \ldots, E_s$ είναι οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες, τότε

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = R.$$

Θέτουμε

$$c = \det E_s \cdots \det E_2 \det E_1.$$

Κάθε παράγοντας είναι μη μηδενικός, οπότε $c \neq 0$. Αν δεν χρειάζεται καμία γραμμοπράξη, έχουμε $R = A$ και θέτουμε $c = 1$.
Εφαρμόζοντας διαδοχικά την παρατήρηση για τους στοιχειώδεις πίνακες, παίρνουμε

$$\det R = c \det A.$$

Εκτελούμε τώρα **τις ίδιες γραμμοπράξεις στον** AB. Από την προσεταιριστικότητα,

$$E_s \cdots E_2 E_1 (AB) = (E_s \cdots E_2 E_1 A)B = RB.$$

Επομένως, με τον ίδιο συντελεστή c,

$$\det(RB) = c \det(AB).$$

Εξετάζουμε τις δύο δυνατές περιπτώσεις για τον R. Επειδή είναι τετραγωνικός και ανηγμένος κλιμακωτός, είτε είναι ο I_n είτε έχει μηδενική γραμμή. Πράγματι, αν δεν έχει μηδενική γραμμή, έχει n οδηγούς άσσους σε διαφορετικές στήλες. Άρα κάθε στήλη περιέχει έναν οδηγό άσσο και, από τον ορισμό της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της είναι μηδενικά. Συνεπώς $R = I_n$.

Αν $R = I_n$, τότε

$$\det(RB) = \det B = \det R \, \det B.$$

Αν ο R **έχει μηδενική γραμμή**, τότε η τελευταία γραμμή του είναι μηδενική. Το ίδιο ισχύει και για τον RB:

$$R = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad RB = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\det(RB) = 0 = \det R \, \det B.$$

Και στις δύο περιπτώσεις, λοιπόν,

$$\det(RB) = \det R \, \det B.$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες που βρήκαμε,

$$c \det(AB) = c \det A \, \det B.$$

Επειδή $c \neq 0$, διαιρούμε με c και καταλήγουμε:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \, \det B.} \qquad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6. Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\det A \neq 0$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Από την ισότητα $AA^{-1} = I_n$ και την ορίζουσα γινομένου παίρνουμε

$$\det A \, \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1.$$

Επομένως $\det A \neq 0$.

($\Leftarrow$) Έστω τώρα ότι $\det A \neq 0$. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπουμε τον A σε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα R:

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = R.$$

Οι ορίζουσες των στοιχειωδών πινάκων είναι μη μηδενικές. Άρα

$$\det R = \det E_s \cdots \det E_2 \det E_1 \, \det A \neq 0.$$

Συνεπώς ο R δεν έχει μηδενική γραμμή. Επειδή είναι τετραγωνικός και ανηγμένος κλιμακωτός, έπεται ότι $R = I_n$. Επομένως

$$E_s \cdots E_2 E_1 A = I_n.$$

Θέτουμε

$$B = E_s \cdots E_2 E_1.$$

Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος, καθώς η αντίστοιχη γραμμοπράξη αναιρείται με μια στοιχειώδη γραμμοπράξη. Άρα και ο B είναι αντιστρέψιμος.

Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $BA = I_n$ από αριστερά με τον B^{-1}, βρίσκουμε

$$B^{-1}(BA) = B^{-1} I_n \quad \Longrightarrow \quad (B^{-1}B)A = B^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A = B^{-1}.$$

Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$. Αν ο A είναι ήδη σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, το ίδιο επιχείρημα δίνει απευθείας $A = I_n$. $\blacksquare$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. Για δύο τετραγωνικούς πίνακες A, B της ίδιας τάξης ισχύει

$$AB = I_n \quad \Longleftrightarrow \quad BA = I_n.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $AB = I_n$. Τότε

$$\det A \, \det B = \det(AB) = \det I_n = 1.$$

Επομένως $\det A \neq 0$, οπότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα $AB = I_n$ από αριστερά με τον A^{-1}, παίρνουμε

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n \quad \Longrightarrow \quad (A^{-1}A)B = A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad B = A^{-1}.$$

Συνεπώς

$$BA = A^{-1}A = I_n.$$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή προκύπτει με το ίδιο επιχείρημα, αν ανταλλάξουμε τους ρόλους των A και B. ■

Παρατήρηση. Για να αποδείξουμε ότι δύο τετραγωνικοί πίνακες είναι αντίστροφοι ο ένας του άλλου, αρκεί να ελέγξουμε ότι το ένα από τα δύο γινόμενα AB, BA είναι το I_n.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9. Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij} είναι ο αριθμός

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

όπου A_{ij} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A με διαγραφή της i-οστής γραμμής και της j-οστής στήλης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10. Ο **προσαρτημένος (adjoint) πίνακας** του A είναι ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τάξης $n \geq 2$ ισχύει

$$\boxed{A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = (\det A) I_n.}$$

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι

$$M_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \qquad (\operatorname{adj} A)_{ij} = M_{ji}.$$

Επομένως, το στοιχείο του γινομένου $A \cdot \operatorname{adj} A$ στη θέση (i, j) είναι

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ij} = a_{i1}M_{j1} + a_{i2}M_{j2} + \cdots + a_{in}M_{jn}.$$

1. Τα διαγώνια στοιχεία. Αν $i = j$, έχουμε

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ii} = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \cdots + a_{in}M_{in} = \det A,$$

διότι το άθροισμα είναι το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την i-οστή γραμμή.
2. Τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου. Έστω $i \neq j$. Αντικαθιστούμε την j-οστή γραμμή του A με την i-οστή γραμμή του και ονομάζουμε B τον πίνακα που προκύπτει.
Για παράδειγμα, αν $i < j$, η αντικατάσταση έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_j \to \Gamma_i} B = \begin{pmatrix} \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \\ \Gamma_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Ο B έχει δύο ίσες γραμμές, οπότε

$$\det B = 0.$$

Τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της j-οστής γραμμής του B είναι τα ίδια με εκείνα της j-οστής γραμμής του A. Πράγματι, για τον υπολογισμό τους διαγράφουμε τη j-οστή γραμμή, δηλαδή τη μόνη γραμμή στην οποία ενδέχεται να διαφέρουν οι δύο πίνακες. Έτσι, με διαγραφή της j-οστής γραμμής και της k-οστής στήλης του B προκύπτει ο ίδιος πίνακας A_{jk}.
Αναπτύσσοντας λοιπόν τη $\det B$ ως προς τη j-οστή γραμμή, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 = \det B &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} M_{jk} \\ &= (A \cdot \operatorname{adj} A)_{ij}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, όλα τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου του $A \cdot \operatorname{adj} A$ είναι μηδενικά. Άρα

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A) I_n.$$

Εξετάζουμε τώρα το γινόμενο $\operatorname{adj} A \cdot A$. Το στοιχείο του στη θέση (i, j) είναι

$$(\operatorname{adj} A \cdot A)_{ij} = M_{1i}a_{1j} + M_{2i}a_{2j} + \cdots + M_{ni}a_{nj}.$$

Αν $i = j$, το άθροισμα είναι το ανάπτυγμα της $\det A$ ως προς την i-οστή στήλη. Επομένως

$$(\operatorname{adj} A \cdot A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}M_{ki} = \det A.$$

Αν $i \neq j$, αντικαθιστούμε την i-οστή στήλη του A με την j-οστή στήλη του και ονομάζουμε D τον πίνακα που προκύπτει. Ο D έχει δύο ίσες στήλες, άρα $\det D = 0$.
Τα αλγεβρικά συμπληρώματα της i-οστής στήλης παραμένουν τα $M_{1i}, \ldots, M_{ni}$, αφού κατά τον υπολογισμό τους διαγράφεται η στήλη που αντικαταστήσαμε. Αναπτύσσοντας τη $\det D$ ως προς αυτή τη στήλη, βρίσκουμε

$$0 = \det D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}M_{ki} = (\operatorname{adj} A \cdot A)_{ij}.$$

Συνεπώς $$\operatorname{adj} A \cdot A = (\det A) I_n.$$ ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.12. Ο τύπος του αντιστρόφου. Αν $\det A \neq 0$, τότε

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.}$$

Απόδειξη: Από το προηγούμενο θεώρημα, διαιρώντας με τον μη μηδενικό αριθμό $\det A$, παίρνουμε

$$A\left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) A = I_n.$$

Επομένως ο πίνακας $\dfrac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ είναι ο αντίστροφος του A. Ειδικότερα,

$$\boxed{(A^{-1})_{ij} = \frac{M_{ji}}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}.} \qquad (1)$$ ■

Υποθέτουμε τώρα ότι $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ με $\det(A) \neq 0$. Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$AX = b,$$

όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,
δηλαδή το σύστημα

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Τότε

$$X = A^{-1}b = (\mathbf{det}(A))^{-1}\mathbf{adj}(A)b$$

Υπολογίζουμε την j-γραμμή του $\mathrm{adj}A \cdot b$.
Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\mathbf{det}A_{ji} \cdot b_j$$

Η παραπάνω παράσταση είναι το ανάπτυγμα της i-στήλης της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,i-1} & b_3 & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} -1 & 4 & b_1 \\ 5 & 2 & b_2 \\ 3 & -6 & b_3 \end{vmatrix}$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & b_1 \\ 5 & 2 & b_2 \\ 3 & -6 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε: $\det A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$, $\det A_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$ και $\det A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. Τότε $(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\cdot b_1 + (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\cdot b_2 + (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\cdot b_3 = -36b_1 + 6b_2 - 22b_3$ είναι το ανάπτυγμα της παραπάνω ορίζουσας κατά την 3η στήλη.

Θέτουμε $D = \det A$ και $D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,i-1} & b_3 & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Τότε

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}, \quad \text{για κάθε} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Η μέδοδος αυτή λέγεται **κανόνας του Cramer**. Προσοχή! Ο κανόνας του Cramer εφαρμόζεται μόνον όταν ο πίνακας του συστήματος είναι τετραγωνικός. Αν το σύστημα είναι ομογενές, τότε με βάση τον κανόνα του Cramer έχει μία μόνο λύση, τη μηδενική. Άλλωστε αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,i-1} & 0 & a_{3,i+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$, γιατί έχει μια μηδενική στήλη.

Παράδειγμα. Να λυθεί με τον κανόνα του Cramer το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + w = 4, \\ y + z - w = -1, \\ x + z = 1, \\ x - y + z + w = 1. \end{cases}$$

Λύση: Ο πίνακας των συντελεστών είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσά του:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Επειδή $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται από τον κανόνα του Cramer. Αντικαθιστώντας διαδοχικά τις στήλες του πίνακα A με τη στήλη των σταθερών όρων, βρίσκουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_w = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Επομένως,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{2} = 2, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{2} = -1, \qquad w = \frac{D_4}{D} = \frac{2}{2} = 1.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$\boxed{(x, y, z, w) = (2, 1, -1, 1)}.$$

Ασκήσεις στις ορίζουσες

Α. Βασικές εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Για τη δεύτερη ορίζουσα, να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με ανάπτυγμα ως προς διαφορετική γραμμή ή στήλη.

2. Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ορίζουσες, επιλέγοντας κάθε φορά κατάλληλη γραμμή ή στήλη για το ανάπτυγμα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Χωρίς να αναπτύξετε τις ορίζουσες, να εξηγήσετε γιατί καθεμία από τις ακόλουθες είναι μηδενική:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Να κατασκευάσετε ένα δικό σας παράδειγμα ορίζουσας τρίτης τάξης που είναι μηδενική, χωρίς να έχει μηδενική γραμμή.

4. Να αποδείξετε ότι η ορίζουσα άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Πότε είναι αντιστρέψιμος ένας τριγωνικός πίνακας;

5. Έστω ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 5.$$

Να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών,

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -3g & -3h & -3k \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & k \end{vmatrix},$$

καθώς και την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}.$$

Β. Αξιοποίηση των ιδιοτήτων

6. Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

με γραμμοπράξεις, χωρίς ανάπτυγμα σε ορίζουσες τρίτης τάξης.

Να γενικεύσετε το αποτέλεσμα για τον πίνακα $A = (a_{ij})$ τάξης n με $a_{ij} = \min\{i, j\}$.

7. Να υπολογίσετε με γραμμοπράξεις την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}.$$

Να αναγράφετε σε κάθε βήμα αν η πράξη που εκτελείτε μεταβάλλει την τιμή της ορίζουσας.

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια γραμμή τετραγωνικού πίνακα είναι άθροισμα πολλαπλασίων των υπόλοιπων γραμμών του, τότε η ορίζουσά του είναι μηδενική.

Να εφαρμόσετε το αποτέλεσμα στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & -11 \end{vmatrix}.$$

9. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα ως προς τη δεύτερη γραμμή, να γράψετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2a-3x & 2b-3y & 2c-3z \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ως γραμμικό συνδυασμό δύο οριζουσών.

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+tx & b+ty & c+tz \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

έχει τη μορφή $f(t) = \alpha + t\beta$, προσδιορίζοντας τους α, β ως ορίζουσες.

10. Να εξετάσετε ποιοι από τους ακόλουθους ισχυρισμούς είναι αληθείς για τετραγωνικούς πίνακες της ίδιας τάξης. Να αποδείξετε τους αληθείς και να δώσετε αντιπαράδειγμα για τους ψευδείς:

(α) $\det(A+B) = \det A + \det B$,
(β) $\det(AB) = \det(BA)$,
(γ) $\det A = \det B \implies A = B$,
(δ) $\det(AB) = 0 \implies \det A = 0$ ή $\det B = 0$,
(ε) $\det(A^2) = (\det A)^2$.

Γ. Παράμετροι και αντίστροφοι

11. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

και να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του t για τις οποίες ο $A(t)$ είναι αντιστρέψιμος.

Για καθεμία από τις εξαιρετικές τιμές, να εξηγήσετε και με γραμμοπράξεις γιατί η ορίζουσα μηδενίζεται.

12. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (s,t) για τα οποία ο πίνακας

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος.

13. Για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

να υπολογίσετε:

$$\det A, \qquad M_{ij}\ (1 \le i,j \le 3), \qquad \operatorname{adj} A, \qquad A^{-1}.$$

Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα υπολογίζοντας το γινόμενο AA^{-1}.

14. Έστω A, B πίνακες τρίτης τάξης με

$$\det A = 2, \qquad \det B = -3.$$

Να υπολογίσετε

$$\det(AB), \qquad \det(A^{-1}B), \qquad \det(2A), \qquad \det(A^2B^{\mathsf{T}}), \qquad \det(B^{-1}AB).$$

Να αιτιολογήσετε πρώτα γιατί υπάρχουν οι αντίστροφοι που εμφανίζονται.

15. Έστω P αντιστρέψιμος πίνακας και

$$B = P^{-1}AP.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\det B = \det A$$

και, γενικότερα, ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t,

$$\det(tI_n - B) = \det(tI_n - A).$$

Δ. Γενικές αποδείξεις και ειδικές μορφές

16. Έστω B, C τετραγωνικοί πίνακες τάξης p, q αντίστοιχα και X, Y πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Να αποδείξετε ότι

$$\det \begin{pmatrix} B & X \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B & \mathrm{O} \\ Y & C \end{pmatrix} = \det B \, \det C.$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ισότητα, χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς q και ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή. Για τη δεύτερη, χρησιμοποιήστε τον ανάστροφο πίνακα.

17. Έστω $A = (a_{ij})$ πίνακας τάξης n με

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{όταν } i + j > n + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

Υπόδειξη. Αντιστρέψτε τη σειρά των στηλών με ανταλλαγές διαδοχικών στηλών.

18. Ένας πραγματικός τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $A^{\mathsf{T}} = -A$.

Να αποδείξετε ότι:

(α′) Όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι μηδενικά.

(β′) Αν η τάξη του είναι περιττή, τότε $\det A = 0$.

(γ′) Ένας αντισυμμετρικός πίνακας άρτιας τάξης μπορεί να είναι αντιστρέψιμος. Να δώσετε παράδειγμα δεύτερης τάξης.

19. Για $n \geq 2$ θέτουμε

$$D_n(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & t & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & t & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \end{vmatrix}, \qquad D_0(t) = 1, \quad D_1(t) = t.$$

Να αποδείξετε ότι

$$D_n(t) = tD_{n-1}(t) - D_{n-2}(t) \qquad (n \geq 2).$$

Να υπολογίσετε τα $D_2(t), D_3(t), D_4(t)$ και να αποδείξετε ότι

$$D_n(2) = n + 1.$$

Υπόδειξη. Αναπτύξτε ως προς την πρώτη γραμμή και κατόπιν ως προς την πρώτη στήλη της δεύτερης υποορίζουσας.

20. Να αποδείξετε ότι, για $n \geq 2$,

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}\big(a + (n-1)b\big).$$

Να προσδιορίσετε πότε ο αντίστοιχος πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη. Προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις υπόλοιπες και κατόπιν αφαιρέστε την πρώτη γραμμή από καθεμία από τις υπόλοιπες. Μην διαιρέσετε με παράσταση που μπορεί να μηδενίζεται.

Ε. Απαιτητικότερες ασκήσεις

21. Ορίζουσα Vandermonde και γενίκευση. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Στη συνέχεια, έστω ότι για $j = 0, \ldots, n-1$ το $p_j(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού j με συντελεστή του x^j ίσο με $c_j \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\det\big(p_{j-1}(x_i)\big)_{1\le i,j\le n} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} c_j\right) \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ταυτότητα, εκτελέστε τις πράξεις

$$\Sigma_j \to \Sigma_j - x_1\Sigma_{j-1}, \qquad j = n, n-1, \ldots, 2,$$

και χρησιμοποιήστε επαγωγή. Για τη γενίκευση, χρησιμοποιήστε πράξεις στηλών για να αφαιρέσετε τους όρους μικρότερου βαθμού.

22. Για $n \ge 3$, να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n-1} b_1b_2\cdots b_n.$$

Υπόδειξη. Αναπτύξτε ως προς την πρώτη στήλη και παρατηρήστε τη μορφή των δύο υποπινάκων.

23. Έστω A τετραγωνικός πίνακας τάξης $n \ge 2$, b πίνακας διαστάσεων $n \times 1$, c πίνακας διαστάσεων $1 \times n$ και d πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} = d \det A - c \operatorname{adj} A\, b.}$$

Η ταυτότητα πρέπει να αποδειχθεί και όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη. Αναπτύξτε ως προς την τελευταία γραμμή. Στις υποορίζουσες που περιέχουν τη στήλη b, αναπτύξτε ως προς αυτή τη στήλη. Προσέξτε τις θέσεις των στηλών μετά τη διαγραφή.

24. Έστω A τετραγωνικός πίνακας τάξης $n \geq 2$ και u, v πίνακες διαστάσεων $n \times 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\det(A + uv^{\mathsf{T}}) = \det A + v^{\mathsf{T}} \operatorname{adj} A\, u.}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να συμπεράνετε ότι

$$\det(A + uv^{\mathsf{T}}) = \det A\big(1 + v^{\mathsf{T}} A^{-1} u\big).$$

Να προσδιορίσετε πότε ο $A + uv^{\mathsf{T}}$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη. Η j-οστή στήλη του uv^{T} είναι $v_j u$. Χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς κάθε στήλη. Κάθε όρος που περιέχει δύο στήλες πολλαπλάσιες του u είναι μηδενικός.

25. Έστω B πίνακας διαστάσεων $m \times n$ και C πίνακας διαστάσεων $n \times m$. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\boxed{\det(I_m + BC) = \det(I_n + CB).}$$

Παρατηρήστε ότι οι δύο ορίζουσες δεν έχουν κατ' ανάγκην την ίδια τάξη.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τον πίνακα

$$K = \begin{pmatrix} I_m & B \\ -C & I_n \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την ορίζουσά του με δύο τρόπους, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά, χωριστά, με τους πίνακες

$$L_1 = \begin{pmatrix} I_m & \mathrm{O} \\ C & I_n \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} I_m & -B \\ \mathrm{O} & I_n \end{pmatrix}.$$

Χρησιμοποιήστε την άσκηση 16.

ΣΤ. Ο κανόνας του Cramer και εφαρμογές

26. Υπολογισμός ενός μόνο αγνώστου. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 5y + z = 2, \\ y + 3z + w = 3, \\ 2z + 3w = 4. \end{cases}$$

(α′) Να υπολογίσετε την ορίζουσα D των συντελεστών και να εξηγήσετε γιατί το σύστημα έχει μοναδική λύση.

(β′) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer, να υπολογίσετε μόνο τον άγνωστο z, χωρίς να υπολογίσετε τους υπόλοιπους αγνώστους.

Υπόδειξη. Για το δεύτερο ερώτημα αρκεί να υπολογίσετε την ορίζουσα Δ_3, αντικαθιστώντας την τρίτη στήλη του πίνακα των συντελεστών με τη στήλη των σταθερών όρων.

27. Άμεση εφαρμογή. Να λύσετε με τον κανόνα του Cramer τα συστήματα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ 3x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

Να γράψετε αναλυτικά τις ορίζουσες $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ και, για το δεύτερο σύστημα, την Δ_3. Να επαληθεύσετε τις λύσεις με αντικατάσταση στις αρχικές εξισώσεις.

28. Σύστημα με μία παράμετρο. Να διερευνήσετε, για τις διάφορες πραγματικές τιμές του t, το σύστημα

$$\begin{cases} tx + y = 1, \\ x + ty = 1. \end{cases}$$

Ειδικότερα:

(α′) Να υπολογίσετε τις $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$.

(β′) Να προσδιορίσετε τις τιμές του t για τις οποίες υπάρχει μοναδική λύση και να τη βρείτε με τον κανόνα του Cramer.

(γ′) Για καθεμία από τις τιμές που μηδενίζουν τη Δ, να εξετάσετε απευθείας το σύστημα και να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις του, εφόσον υπάρχουν.

29. Σύστημα με δύο παραμέτρους. Να διερευνήσετε, για τις διάφορες πραγματικές τιμές των s, t, το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + ty + z = s, \\ x + y + tz = s. \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε:

(α′) Τα ζεύγη (s, t) για τα οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση και τη λύση αυτή, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer.

(β΄) Τα ζεύγη (s,t) για τα οποία το σύστημα είναι αδύνατο.

(γ΄) Τα ζεύγη (s,t) για τα οποία το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και τη γενική μορφή τους.

Στις περιπτώσεις όπου $\Delta = 0$, να χρησιμοποιήσετε γραμμοπράξεις.

30. Cramer και πολυωνυμική παρεμβολή. Έστω x_1, x_2, x_3 τρεις ανά δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και y_1, y_2, y_3 οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

για το οποίο

$$p(x_1) = y_1, \qquad p(x_2) = y_2, \qquad p(x_3) = y_3.$$

(α΄) Να γράψετε το σύστημα με αγνώστους a_0, a_1, a_2 και να υπολογίσετε την ορίζουσα των συντελεστών του με τον τύπο της άνδερμονδε.

(β΄) Να εκφράσετε τους a_0, a_1, a_2 ως πηλίκα οριζουσών με τον κανόνα του Cramer.

(γ΄) Να βρείτε το πολυώνυμο για το οποίο

$$p(0) = 1, \qquad p(1) = 3, \qquad p(2) = 9.$$

(δ΄) Να αποδείξετε ότι, στη γενική περίπτωση, το ζητούμενο πολυώνυμο γράφεται

$$\begin{aligned} p(x) = y_1 &\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη για το τελευταίο ερώτημα. Ελέγξτε ότι το πολυώνυμο του δεξιού μέλους ικανοποιεί τις τρεις απαιτούμενες ισότητες και χρησιμοποιήστε τη μοναδικότητα που αποδείξατε.

Λύσεις των ασκήσεων στις ορίζουσες

Α. Βασικές εφαρμογές

1. **Υπολογισμός μικρών οριζουσών.** Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22.$$

Αναπτύσσοντας τη δεύτερη ως προς την πρώτη γραμμή, βρίσκουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0+4) - (3-2) - (-6-0) = 13.$$

Για επαλήθευση, αναπτύσσουμε ως προς τη δεύτερη γραμμή:

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3(1-2) - 2(-4-1) = 13.$$

Τέλος,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (6-1) - 2(4-3) + 3(2-9) = -18.$$

2. **Επιλογή κατάλληλης γραμμής.** Στην πρώτη ορίζουσα αναπτύσσουμε ως προς την τρίτη γραμμή και κατόπιν ως προς την πρώτη γραμμή της υποορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 10(2-8) = -60.$$

Στη δεύτερη αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-5) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10(9+2) = 110.$$

Το δεύτερο αρνητικό πρόσημο προέρχεται από τη θέση $(2,3)$ του στοιχείου 5 στην ορίζουσα τρίτης τάξης.

3. **Ορίζουσες που μηδενίζονται.** Η πρώτη ορίζουσα είναι μηδενική επειδή η δεύτερη γραμμή είναι μηδενική. Η δεύτερη είναι μηδενική επειδή η πρώτη και η τρίτη γραμμή είναι ίσες. Στην τρίτη ισχύει $\Gamma_2 = -2\Gamma_1$. Με την πράξη $\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1$ δημιουργείται μηδενική γραμμή χωρίς να αλλάξει η ορίζουσα. Άρα και αυτή είναι μηδέν.

Ένα ακόμη παράδειγμα, χωρίς μηδενική γραμμή, είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

διότι $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Οι δύο διαδοχικές πράξεις $\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1$ και $\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2$ μηδενίζουν την τρίτη γραμμή.

4. Τριγωνικοί πίνακες. Έστω πρώτα ότι ο A είναι κάτω τριγωνικός. Θα αποδείξουμε τον τύπο με επαγωγή ως προς την τάξη n. Για $n = 1$ είναι άμεσος. Έστω ότι ισχύει για τάξη $n-1$. Η πρώτη γραμμή του A έχει μηδενικά όλα τα στοιχεία εκτός, ενδεχομένως, από το a_{11}. Αναπτύσσοντας ως προς αυτήν,

$$\det A = a_{11} \det C_{11}.$$

Ο C_{11} είναι κάτω τριγωνικός τάξης $n-1$, με διαγώνια στοιχεία $a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Αν ο A είναι άνω τριγωνικός, ο A^{T} είναι κάτω τριγωνικός με τα ίδια διαγώνια στοιχεία. Επειδή $\det A = \det(A^{\mathsf{T}})$, ισχύει ο ίδιος τύπος.

Οι δύο αριθμητικές ορίζουσες της άσκησης είναι αντίστοιχα

$$2(-3)5 \cdot 4 = -120, \qquad (-1)3 \cdot 2(-4) = 24.$$

Ο τριγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\det A \neq 0$, δηλαδή αν και μόνον αν όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη μηδενικά.

5. Μεταβολή της ορίζουσας. Στην πρώτη περίπτωση ανταλλάσσονται οι δύο πρώτες γραμμές, άρα η ορίζουσα είναι -5. Στη δεύτερη, η πρώτη γραμμή πολλαπλασιάζεται με 2 και η τρίτη με -3. Επομένως η ορίζουσα είναι

$$2(-3) \cdot 5 = -30.$$

Στην τρίτη περίπτωση εκτελείται η πράξη $\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1$, η οποία δεν μεταβάλλει την ορίζουσα. Το αποτέλεσμα είναι 5. Ο τελευταίος πίνακας είναι ο ανάστροφος του αρχικού, οπότε και η ορίζουσά του είναι 5.

Β. Αξιοποίηση των ιδιοτήτων

6. Αφαίρεση διαδοχικών γραμμών. Οι παρακάτω πράξεις δεν αλλάζουν την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Γενικά, για $a_{ij} = \min\{i, j\}$ εκτελούμε, με αυτή τη σειρά,

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - \Gamma_{i-1}, \qquad i = n, n-1, \ldots, 2.$$

Ξεκινάμε από την τελευταία γραμμή, ώστε η γραμμή που αφαιρούμε να μην έχει ακόμη μεταβληθεί. Στη νέα γραμμή i τα στοιχεία με $j < i$ είναι $j - j = 0$, ενώ για $j \geq i$ είναι $i - (i-1) = 1$. Ο τελικός πίνακας είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο. Άρα $\boxed{\det A = 1}$ για κάθε $n \geq 1$.

7. Υπολογισμός με γραμμοπράξεις. Χρησιμοποιούμε μόνο προσθήκες πολλαπλασίου άλλης γραμμής, οπότε όλες οι παρακάτω ισότητες διατηρούν την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 = \boxed{-4}.$$

8. Γραμμή που είναι συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω ότι

$$\Gamma_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \Gamma_j.$$

Για κάθε $j \neq i$ εκτελούμε διαδοχικά την πράξη $\Gamma_i \to \Gamma_i - \lambda_j \Gamma_j$. Οι υπόλοιπες γραμμές δεν μεταβάλλονται και η τελική γραμμή i είναι μηδενική. Καμία από τις πράξεις δεν αλλάζει την ορίζουσα, άρα η αρχική ορίζουσα είναι μηδέν.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα,

$$2(1, 2, -1) - 3(2, -1, 3) = (-4, 7, -11),$$

δηλαδή $\Gamma_3 = 2\Gamma_1 - 3\Gamma_2$. Επομένως

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Γραμμικότητα ως προς μία γραμμή. Από τη γραμμικότητα ως προς τη δεύτερη γραμμή,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2a - 3x & 2b - 3y & 2c - 3z \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & b & c \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ομοίως,

$$f(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Άρα $f(t) = \alpha + t\beta$, όπου

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Αληθείς και ψευδείς ισχυρισμοί.

(α) Ψευδής. Για $A = B = I_2$ έχουμε

$$\det(A+B) = \det(2I_2) = 4, \qquad \det A + \det B = 2.$$

(β) Αληθής. Από την ορίζουσα γινομένου,

$$\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA).$$

Η αντιμετάθεση στο μεσαίο βήμα αφορά πραγματικούς αριθμούς, όχι τους πίνακες A, B.

(γ) Ψευδής. Οι διαφορετικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχουν και οι δύο ορίζουσα 1.

(δ) Αληθής. Αν $\det(AB) = 0$, τότε $\det A \det B = 0$. Ένα γινόμενο πραγματικών αριθμών είναι μηδέν μόνο αν ένας τουλάχιστον παράγοντας είναι μηδέν.

(ε) Αληθής. Έχουμε

$$\det(A^2) = \det(AA) = \det A \det A = (\det A)^2.$$

Γ. Παράμετροι και αντίστροφοι

11. Πίνακας με μία παράμετρο. Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και κατόπιν από την τρίτη:

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1-t & t-1 & 0 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Βγάζοντας τον κοινό παράγοντα $t-1$ από καθεμία από τις δύο τελευταίες γραμμές, παίρνουμε

$$\det A(t) = (t-1)^2 \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2).$$

Η παραγοντοποίηση αυτή ισχύει και για $t = 1$, διότι προκύπτει από τη γραμμικότητα, χωρίς διαίρεση με $t-1$. Άρα

$$\boxed{A(t) \text{ αντιστρέψιμος} \iff t \neq 1 \text{ και } t \neq -2.}$$

Για $t = 1$ όλες οι γραμμές είναι ίσες. Η πράξη $\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1$ δημιουργεί μηδενική γραμμή. Για $t = -2$ ισχύει $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = (0,0,0)$. Οι διαδοχικές πράξεις $\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1$ και $\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2$ μηδενίζουν την τρίτη γραμμή. Έτσι επαληθεύεται με γραμμοπράξεις ο μηδενισμός της ορίζουσας και στις δύο εξαιρετικές τιμές.

12. Πίνακας με δύο παραμέτρους. Αφαιρούμε διαδοχικά την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και την τρίτη:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & 2 & t \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 1 \\ 1 & 2 & t \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη,

$$\det A(s,t) = (s-1)(t-1) - 1 = st - s - t.$$

Επομένως ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος ακριβώς όταν

$$\boxed{(s-1)(t-1) \neq 1.}$$

Ειδικότερα, για $s = 1$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε t. Για $s \neq 1$ η μοναδική τιμή που αποκλείεται είναι $t = 1 + 1/(s-1)$.

13. Αντίστροφος μέσω του προσαρτημένου πίνακα. Για

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1) - 2 = 4.$$

Τα εννέα αλγεβρικά συμπληρώματα είναι

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων είναι εδώ συμμετρικός, οπότε η αναστροφή του δεν τον αλλάζει. Άρα

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Για επαλήθευση,

$$AA^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3.$$

14. Ορίζουσες γινομένων και δυνάμεων. Επειδή $\det A = 2 \neq 0$ και $\det B = -3 \neq 0$, οι A, B είναι αντιστρέψιμοι και

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}, \qquad \det(B^{-1}) = -\frac{1}{3}.$$

Επομένως

$$\det(AB) = 2(-3) = -6,$$

$$\det(A^{-1}B) = \frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2},$$

$$\det(2A) = 2^3 \det A = 8 \cdot 2 = 16,$$

$$\det(A^2 B^{\mathsf{T}}) = (\det A)^2 \det B = 4(-3) = -12,$$

$$\det(B^{-1}AB) = \left(-\frac{1}{3}\right) 2(-3) = 2.$$

Στον τρίτο υπολογισμό, ο εκθέτης 3 εμφανίζεται επειδή ο A είναι πίνακας τρίτης τάξης.

15. Οι πίνακες A και $P^{-1}AP$. Αφού ο P είναι αντιστρέψιμος, $\det P \neq 0$ και

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \frac{1}{\det P}\det A \det P = \det A.$$

Επίσης,

$$tI_n - B = P^{-1}(tI_n - A)P,$$

διότι $P^{-1}(tI_n)P = tI_n$. Παίρνοντας ορίζουσες, για κάθε πραγματικό t βρίσκουμε

$$\boxed{\det(tI_n - B) = \det(tI_n - A).}$$

Δ. Γενικές αποδείξεις και ειδικές μορφές

16. Τριγωνικοί πίνακες κατά τμήματα. Θεωρούμε τον πίνακα

$$H = \begin{pmatrix} B & X \\ \mathrm{O} & C \end{pmatrix},$$

όπου οι B, C έχουν τάξεις p, q αντίστοιχα. Αποδεικνύουμε τον τύπο με επαγωγή ως προς q, για κάθε B και κάθε κατάλληλο X.

Για $q = 1$ η τελευταία γραμμή του H έχει μόνο το τελευταίο στοιχείο ενδεχομένως μη μηδενικό. Αν $C = (c_{11})$, το ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή δίνει $\det H = c_{11}\det B = \det B \det C$.

Έστω τώρα $q \geq 2$ και ότι ο τύπος ισχύει για $q-1$. Τα ενδεχομένως μη μηδενικά στοιχεία της τελευταίας γραμμής του H είναι τα c_{qj}, στις θέσεις $(p+q, p+j)$, για $j = 1, \ldots, q$. Με διαγραφή της αντίστοιχης γραμμής και στήλης προκύπτει πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} B & X_j \\ \mathrm{O} & \widehat{C}_{qj} \end{pmatrix},$$

όπου $\widehat{C}_{qj}$ προκύπτει από τον C με διαγραφή της τελευταίας γραμμής και της στήλης j, και X_j από τον X με διαγραφή της στήλης j. Από την επαγωγική υπόθεση, η ορίζουσα αυτού του πίνακα είναι $\det B \det \widehat{C}_{qj}$. Επομένως

$$\begin{aligned} \det H &= \sum_{j=1}^{q} (-1)^{(p+q)+(p+j)} c_{qj} \det B \det \widehat{C}_{qj} \\ &= \det B \sum_{j=1}^{q} (-1)^{q+j} c_{qj} \det \widehat{C}_{qj} = \det B \det C. \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη μορφή, χρησιμοποιούμε την αναστροφή:

$$\det \begin{pmatrix} B & \mathrm{O} \\ Y & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B^{\mathsf{T}} & Y^{\mathsf{T}} \\ \mathrm{O} & C^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \det(B^{\mathsf{T}}) \det(C^{\mathsf{T}}) = \det B \det C.$$

Δεν χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι οι B, C είναι αντιστρέψιμοι.

17. Δευτερεύουσα διαγώνιος. Αντιστρέφουμε τη σειρά των στηλών του A και ονομάζουμε T τον πίνακα που προκύπτει. Το στοιχείο του T στη θέση (i, j) είναι $a_{i,n+1-j}$. Αν $i > j$, τότε

$$i + (n + 1 - j) > n + 1,$$

οπότε $a_{i,n+1-j} = 0$. Άρα ο T είναι άνω τριγωνικός και η διαγώνιός του είναι $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$.

Η αντιστροφή της σειράς μπορεί να γίνει μεταφέροντας την τελευταία στήλη στην πρώτη θέση με $n-1$ διαδοχικές ανταλλαγές, την αρχική προτελευταία στη δεύτερη θέση με $n-2$ ανταλλαγές, και ούτω καθεξής. Συνολικά απαιτούνται

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

ανταλλαγές. Συνεπώς

$$\det T = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A.$$

Επειδή $\det T = a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ και το τετράγωνο του παράγοντα προσήμου είναι 1, καταλήγουμε στον τύπο

$$\boxed{\det A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.}$$

18. Αντισυμμετρικοί πίνακες. Η σχέση $A^{\mathsf{T}} = -A$ σημαίνει $a_{ji} = -a_{ij}$. Για $i = j$ παίρνουμε $a_{ii} = -a_{ii}$, δηλαδή $2a_{ii} = 0$. Επειδή τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί, $a_{ii} = 0$.

Αν η τάξη n είναι περιττή, τότε

$$\det A = \det(A^{\mathsf{T}}) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Άρα $2\det A = 0$ και συνεπώς $\boxed{\det A = 0}$.

Η ίδια κατάληξη δεν ισχύει αναγκαστικά σε άρτια τάξη. Για παράδειγμα,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικός και έχει ορίζουσα 1, άρα είναι αντιστρέψιμος.

19. Αναδρομική σχέση για τριδιαγώνια ορίζουσα. Για $n = 2$ έχουμε

$$D_2(t) = t^2 - 1 = tD_1(t) - D_0(t).$$

Για $n \geq 3$, αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη γραμμή, παίρνουμε δύο όρους. Ο πρώτος είναι $tD_{n-1}(t)$. Στον δεύτερο, το στοιχείο 1 της θέσης $(1,2)$ έχει αρνητικό πρόσημο. Ο αντίστοιχος υποπίνακας έχει πρώτη στήλη $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσά του ως προς αυτή τη στήλη, απομένει ακριβώς η ορίζουσα $D_{n-2}(t)$. Επομένως

$$\boxed{D_n(t) = tD_{n-1}(t) - D_{n-2}(t).}$$

Διαδοχικά,

$$\begin{aligned} D_2(t) &= t^2 - 1, \\ D_3(t) &= t(t^2-1) - t = t^3 - 2t, \\ D_4(t) &= t(t^3-2t) - (t^2-1) = t^4 - 3t^2 + 1. \end{aligned}$$

Για $t = 2$, αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι $D_n(2) = n+1$. Έχουμε $D_0(2) = 1$ και $D_1(2) = 2$. Αν $D_{n-1}(2) = n$ και $D_{n-2}(2) = n-1$, τότε

$$D_n(2) = 2n - (n-1) = n+1.$$

Άρα ο τύπος ισχύει για κάθε $n \geq 0$.

20. Ίσα στοιχεία εκτός της διαγωνίου. Θέτουμε $L = a+(n-1)b$. Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη διαδοχικά όλες τις άλλες στήλες. Κάθε στοιχείο της νέας πρώτης στήλης ισούται με L, ενώ οι υπόλοιπες στήλες παραμένουν αμετάβλητες. Στη συνέχεια αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από καθεμία από τις υπόλοιπες. Η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται και γίνεται

$$\begin{vmatrix} L & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}.$$

Ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, οπότε

$$\boxed{\Delta_n = (a-b)^{n-1}\big(a+(n-1)b\big).}$$

Ο υπολογισμός ισχύει για όλες τις τιμές των a, b, καθώς δεν κάναμε καμία διαίρεση. Για $n \geq 2$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν

$$\boxed{a \neq b \quad \text{και} \quad a+(n-1)b \neq 0.}$$

Ε. Απαιτητικότερες ασκήσεις

21. Η ορίζουσα ἄνδερμονδε και η γενίκευσή της. Χρησιμοποιούμε την ανάστροφη μορφή της ορίζουσας:

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Για $n = 1$ η ορίζουσα είναι 1, όπως και το κενό γινόμενο του τύπου. Για $n = 2$ έχουμε άμεσα

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Έστω $n \geq 3$ και ότι ο τύπος ισχύει για τάξη $n-1$. Εκτελούμε τις πράξεις γραμμών

$$\Gamma_i \to \Gamma_i - x_1\Gamma_{i-1}, \qquad i = n, n-1, \ldots, 2,$$

ξεκινώντας από την τελευταία. Έτσι κάθε γραμμή που αφαιρούμε διατηρεί ακόμη τα αρχικά της στοιχεία. Στη θέση (i, j), για $i \geq 2$, προκύπτει

$$x_j^{i-1} - x_1 x_j^{i-2} = x_j^{i-2}(x_j - x_1).$$

Η πρώτη στήλη γίνεται $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$. Αναπτύσσοντας ως προς αυτήν, βρίσκουμε

$$V_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Βγάζοντας από κάθε στήλη τον αντίστοιχο κοινό παράγοντα,

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right) V_{n-1}(x_2,\dots,x_n).$$

Από την επαγωγική υπόθεση,

$$V_n = \left(\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)\right)\left(\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)\right) = \boxed{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)}.$$

Δεν διαιρέσαμε με κανένα $x_j - x_i$, οπότε η απόδειξη καλύπτει και την περίπτωση ίσων τιμών των x_i.

Γενίκευση σε πολυώνυμα διαφορετικών βαθμών. Γράφουμε

$$p_j(x) = b_{j0} + b_{j1}x + \cdots + b_{jj}x^j, \qquad b_{jj} = c_j \neq 0, \qquad j = 0,\dots,n-1.$$

Θεωρούμε τον πίνακα των τιμών στην ανάστροφη διάταξη

$$H = \big(p_{i-1}(x_j)\big)_{1\le i,j\le n}.$$

Αν V είναι ο πίνακας της παραπάνω ορίζουσας άνδερμονδε, τότε, από τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων,

$$H = TV, \qquad T = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{10} & c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, το στοιχείο (i,j) του γινομένου είναι $\sum_{k=0}^{i-1} b_{i-1,k}x_j^k = p_{i-1}(x_j)$. Ο T είναι κάτω τριγωνικός, συνεπώς

$$\det H = \det T \det V = \boxed{\left(\prod_{j=0}^{n-1} c_j\right)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)}.$$

Ο πίνακας $\big(p_{j-1}(x_i)\big)$ της αρχικής διατύπωσης είναι ο H^{T}, οπότε έχει την ίδια ορίζουσα.

22. Μια ορίζουσα με δύο γινόμενα. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη. Τα μόνα ενδεχομένως μη μηδενικά στοιχεία της είναι το a_1 στη θέση $(1,1)$ και το b_n στη θέση $(n,1)$.

Με διαγραφή της πρώτης γραμμής και της πρώτης στήλης, απομένει άνω τριγωνικός πίνακας με διαγώνιο $a_2,\dots,a_n$. Ο πρώτος όρος είναι επομένως $a_1a_2\cdots a_n$.

Με διαγραφή της τελευταίας γραμμής και της πρώτης στήλης, απομένει ο κάτω τριγωνικός πίνακας

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

με τη φυσική προσαρμογή του σχήματος στις μικρές τάξεις. Η ορίζουσά του είναι $b_1\cdots b_{n-1}$. Το πρόσημο του δεύτερου όρου είναι $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$. Άρα η ζητούμενη ορίζουσα είναι

$$\boxed{a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{n-1}b_1b_2\cdots b_n}.$$

23. Ορίζουσα πίνακα με πρόσθετη γραμμή και στήλη. Θέτουμε

$$K = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή του K. Ο όρος του τελευταίου στοιχείου d είναι $d \det A$. Για $j = 1, \ldots, n$, έστω H_j ο πίνακας που απομένει μετά τη διαγραφή της τελευταίας γραμμής και της στήλης j. Οι στήλες του είναι, με αυτή τη σειρά, όλες οι στήλες του A εκτός από τη j-οστή και, τελευταία, η b. Έτσι

$$\det K = d \det A + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+1+j} c_j \det H_j.$$

Αναπτύσσουμε τώρα τη $\det H_j$ ως προς την τελευταία στήλη. Το b_i βρίσκεται στη θέση (i, n), και με διαγραφή της γραμμής του και της τελευταίας στήλης απομένει ακριβώς ο C_{ij} του αρχικού πίνακα A. Επομένως

$$\det H_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} b_i \det C_{ij}.$$

Το γινόμενο των δύο προσήμων είναι

$$(-1)^{n+1+j}(-1)^{i+n} = (-1)^{i+j+1}.$$

Άρα, επειδή $M_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ij}$,

$$\begin{aligned} \det K &= d \det A - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_j M_{ij} b_i \\ &= d \det A - c \operatorname{adj} A \, b. \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι το στοιχείο (j, i) του $\operatorname{adj} A$ είναι το M_{ij}. Η απόδειξη δεν προϋποθέτει ότι $\det A \neq 0$.

24. Πρόσθεση πίνακα της μορφής uv^{T}. Γράφουμε

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Αν οι στήλες του A είναι $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, οι στήλες του $A + uv^{\mathsf{T}}$ είναι

$$\Sigma_1 + v_1 u, \quad \ldots, \quad \Sigma_n + v_n u.$$

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τη γραμμικότητα ως προς κάθε στήλη. Ο όρος όπου επιλέγονται όλες οι αρχικές στήλες είναι $\det A$. Κάθε όρος όπου επιλέγονται τουλάχιστον δύο στήλες της μορφής $v_j u$ είναι μηδενικός: βγάζοντας τους συντελεστές, η αντίστοιχη ορίζουσα έχει δύο ίσες στήλες u.

Απομένουν λοιπόν μόνο οι όροι με ακριβώς μία τέτοια στήλη. Έστω $A^{[j]}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον A με αντικατάσταση της στήλης j από το u. Τότε

$$\det(A + uv^{\mathsf{T}}) = \det A + \sum_{j=1}^{n} v_j \det A^{[j]}.$$

Αναπτύσσοντας τη $\det A^{[j]}$ ως προς τη στήλη j, οι υποπίνακες που εμφανίζονται είναι οι C_{ij} του A, διότι η στήλη που άλλαξε διαγράφεται. Άρα

$$\det A^{[j]} = \sum_{i=1}^{n} u_i M_{ij}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\det(A + uv^{\mathsf{T}}) &= \det A + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_j M_{ij} u_i \\ &= \boxed{\det A + v^{\mathsf{T}} \operatorname{adj} A\, u}.\end{aligned}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\operatorname{adj} A = (\det A)A^{-1}$ και επομένως

$$\boxed{\det(A + uv^{\mathsf{T}}) = \det A\big(1 + v^{\mathsf{T}} A^{-1} u\big).}$$

Υπό αυτή την υπόθεση, ο $A + uv^{\mathsf{T}}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν

$$1 + v^{\mathsf{T}} A^{-1} u \neq 0.$$

Χωρίς υπόθεση αντιστρεψιμότητας του A, το αντίστοιχο κριτήριο είναι $\det A + v^{\mathsf{T}} \operatorname{adj} A\, u \neq 0$.

25. Ορίζουσες διαφορετικών τάξεων. Θεωρούμε τους πίνακες τάξης $m + n$

$$K = \begin{pmatrix} I_m & B \\ -C & I_n \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} I_m & \mathrm{O} \\ C & I_n \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} I_m & -B \\ \mathrm{O} & I_n \end{pmatrix}.$$

Από την άσκηση 16, $\det L_1 = \det L_2 = 1$. Ο πολλαπλασιασμός δίνει

$$L_1 K = \begin{pmatrix} I_m & B \\ \mathrm{O} & I_n + CB \end{pmatrix}.$$

Παίρνοντας ορίζουσες και εφαρμόζοντας πάλι την άσκηση 16,

$$\det K = \det(L_1 K) = \det(I_n + CB).$$

Από την άλλη,

$$L_2 K = \begin{pmatrix} I_m + BC & \mathrm{O} \\ -C & I_n \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\det K = \det(L_2 K) = \det(I_m + BC).$$

Άρα

$$\boxed{\det(I_m + BC) = \det(I_n + CB).}$$

Δεν υποθέσαμε ότι κάποιος από τους $I_m + BC$, $I_n + CB$ είναι αντιστρέψιμος. Η ταυτότητα ισχύει για όλα τα B, C των δεδομένων διαστάσεων.

ΣΤ. Ο κανόνας του Cramer και εφαρμογές

Στις λύσεις που ακολουθούν, Δ είναι η ορίζουσα των συντελεστών και Δ_j η ορίζουσα που προκύπτει με αντικατάσταση της στήλης j από τη στήλη των σταθερών όρων. Οι τύποι του Cramer εφαρμόζονται μόνο όταν $\Delta \neq 0$.

26. Υπολογισμός μόνο του αγνώστου z. Για το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x + 5y + z = 2, \\ y + 3z + w = 3, \\ 2z + 3w = 4, \end{cases}$$

η ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη και κατόπιν ως προς την πρώτη γραμμή, βρίσκουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 2) - 3 = 4.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για να βρούμε τον z, αντικαθιστούμε μόνο την τρίτη στήλη:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας ως προς τη δεύτερη γραμμή,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5.$$

Επομένως, χωρίς να υπολογίσουμε τους άλλους αγνώστους,

$$\boxed{z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{4}.}$$

27. Άμεσες εφαρμογές του κανόνα του Cramer. Για το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = 4, \end{cases}$$

έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 12 = 26, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13.$$

Άρα

$$\boxed{x = 2, \qquad y = -1.}$$

Πράγματι, $2 \cdot 2 - 3(-1) = 7$ και $3 \cdot 2 + 2(-1) = 4$.

Για το δεύτερο σύστημα,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ 3x + y + 2z = 7, \end{cases}$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-4-3) - (2-9) - (1+6) = -14. \end{aligned}$$

Οι ορίζουσες των αριθμητών είναι

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-7) - (-21) - 14 = -14, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2(-21) - 3(-7) - 7 = -28, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-14) - 7 + 3(7) = -14. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 1.}$$

Η επαλήθευση δίνει

$$2 + 2 - 1 = 3, \qquad 1 - 4 + 3 = 0, \qquad 3 + 2 + 2 = 7.$$

28. Διερεύνηση συστήματος με μία παράμετρο. Για το σύστημα

$$\begin{cases} tx + y = 1, \\ x + ty = 1, \end{cases}$$

έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t - 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t - 1.$$

Αν $t \neq 1$ **και** $t \neq -1$**,** τότε $\Delta \neq 0$ και

$$\boxed{x = y = \frac{t-1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t+1}.}$$

Η απλοποίηση γίνεται μόνο υπό την υπόθεση $t \neq 1$.

Αν $t = 1$**,** οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν με την $x + y = 1$. Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις:

$$\boxed{(x, y) = (\lambda, 1-\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Αν $t = -1$**,** το σύστημα είναι

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις προκύπτει $0 = 2$. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρατήρηση. Η τιμή $x = y = 1/2$, που θα παίρναμε βάζοντας $t = 1$ στον απλοποιημένο τύπο, είναι μία από τις λύσεις της εξαιρετικής περίπτωσης, αλλά δεν τις περιγράφει όλες. Η διερεύνηση των τιμών που μηδενίζουν τη Δ είναι απαραίτητη.

29. Διερεύνηση συστήματος με δύο παραμέτρους. Για το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + ty + z = s, \\ x + y + tz = s, \end{cases}$$

αφαιρώντας διαδοχικά την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη και από την τρίτη στον πίνακα των συντελεστών, παίρνουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2.$$

Για τον πρώτο αριθμητή αφαιρούμε από τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή το s-πλάσιο της πρώτης:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s & t & 1 \\ s & 1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-s & 1-s \\ 0 & 1-s & t-s \end{vmatrix}$$
$$= (t-s)^2 - (1-s)^2 = (t-1)(t+1-2s).$$

Για τους άλλους δύο αριθμητές, αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από καθεμία από τις υπόλοιπες:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & s-1 & t-1 \end{vmatrix} = (s-1)(t-1),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & s \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-1 & s-1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix} = (t-1)(s-1).$$

Αν $t \neq 1$**,** για κάθε s το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$\boxed{x = \frac{t+1-2s}{t-1}, \qquad y = z = \frac{s-1}{t-1}.}$$

Αν $t = 1$**,** ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & 1 & s \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \\ 1 & 1 & 1 & s \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{array}\right).$$

Αν $s \neq 1$, εμφανίζεται η αδύνατη εξίσωση $0 = s - 1$. Αν $s = 1$, απομένει μόνο η εξίσωση $x + y + z = 1$, με λύσεις

$$\boxed{(x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

Συνολικά:

Συνθήκη	Πλήθος λύσεων
$t \neq 1$	Μοναδική λύση για κάθε s
$t = 1,\ s \neq 1$	Καμία λύση
$t = 1,\ s = 1$	Άπειρες λύσεις

Εδώ, για $t = 1$, όλες οι $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ είναι μηδενικές ακόμη και όταν $s \neq 1$ και το σύστημα είναι αδύνατο. Άρα ο ταυτόχρονος μηδενισμός τους δεν αρκεί για να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν λύσεις.

30. Cramer και πολυωνυμική παρεμβολή. Οι συνθήκες για το $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ ισοδυναμούν με το σύστημα

$$\begin{cases} a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 = y_1, \\ a_0 + x_2 a_1 + x_2^2 a_2 = y_2, \\ a_0 + x_3 a_1 + x_3^2 a_2 = y_3. \end{cases}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο της Vandermonde. Ο πίνακας εδώ είναι ο ανάστροφος εκείνου της άσκησης 21 και έχει την ίδια ορίζουσα. Επειδή τα x_1, x_2, x_3 είναι ανά δύο διαφορετικά, $\Delta \neq 0$. Άρα υπάρχει μοναδική τριάδα (a_0, a_1, a_2) και επομένως μοναδικό πολυώνυμο της ζητούμενης μορφής.

Ο κανόνας του Cramer δίνει

$$a_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \qquad a_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

$$a_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Για τα δεδομένα $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p(2) = 9$ έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2.$$

Οι τρεις αριθμητές είναι αντίστοιχα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = (12-9)-(4-1) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (9-6)+(2-1) = 4.$$

Συνεπώς $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, και

$$\boxed{p(x) = 1 + 2x^2.}$$

Πράγματι, $p(0) = 1$, $p(1) = 3$ και $p(2) = 9$.

Για τον γενικό τύπο, θέτουμε

$$\begin{aligned} q(x) = y_1 &\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &+ y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \end{aligned}$$

Οι παρονομαστές είναι μη μηδενικοί σταθεροί αριθμοί, οπότε το q είναι πολυώνυμο της μορφής $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Για $x = x_1$, το πρώτο κλάσμα είναι 1 και τα άλλα δύο είναι 0. Άρα $q(x_1) = y_1$. Με τον ίδιο τρόπο, $q(x_2) = y_2$ και $q(x_3) = y_3$.

Τα p, q ικανοποιούν επομένως τις ίδιες τρεις συνθήκες. Από τη μοναδικότητα που αποδείξαμε με τη μη μηδενική ορίζουσα του συστήματος, $p = q$. Έτσι προκύπτει ο ζητούμενος τύπος, χωρίς να χρειαστούμε έννοιες διανυσματικών χώρων.

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοί χώροι

Πριν προχωρήσουμε στην έννοια του Διανυσματικού Χώρου επί ενός σώματος F θεωρούμε χρήσιμο να υπενθυμίσουμε την έννοια του σώματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Ένα μη κενό σύνολο F, εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση $+$ και τον πολλαπλασιασμό $\cdot$, ονομάζεται **σώμα**, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. **Ιδιότητες της πρόσθεσης:** Για κάθε $a, b, c \in F$ ισχύουν:
   - **(α΄)** $a + b = b + a$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).
   - **(β΄)** $(a + b) + c = a + (b + c)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).
   - **(γ΄)** Υπάρχει στοιχείο $0_F \in F$ τέτοιο ώστε $a + 0_F = a, \quad a \in F.$
   - **(δ΄)** Για κάθε $a \in F$ υπάρχει στοιχείο $-a \in F$ τέτοιο ώστε $a + (-a) = 0_F.$
2. **Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:** Για κάθε $a, b, c \in F$ ισχύουν:
   - **(α΄)** $ab = ba$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).
   - **(β΄)** $(ab)c = a(bc)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).
   - **(γ΄)** Υπάρχει στοιχείο $1_F \in F$, διαφορετικό από το 0_F, τέτοιο ώστε
   $$a \cdot 1_F = a, \qquad a \in F.$$
   - **(δ΄)** Για κάθε $a \in F$, $a \neq 0_F$, υπάρχει στοιχείο $a^{-1} \in F$ τέτοιο ώστε
   $$aa^{-1} = 1_F.$$
3. **Επιμεριστική ιδιότητα:** Για κάθε $a, b, c \in F$ ισχύει $a(b + c) = ab + ac.$

Παραδείγματα:

1. Τα σύνολα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι σώματα ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.
2. Αν p είναι πρώτος αριθμός, το σύνολο
   $$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$
   των κλάσεων υπολοίπων μοδυλο p είναι σώμα ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μοδυλο p.

3. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι σώμα ως προς τις συνήθεις πράξεις.

Αντιπαράδειγμα. Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων δεν είναι σώμα, διότι τα μη μηδενικά στοιχεία του δεν έχουν κατ' ανάγκην πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο $\mathbb{Z}$. Για παράδειγμα, ο αριθμός 2 δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο στο $\mathbb{Z}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. Έστω F ένα σώμα και V ένα μη κενό σύνολο, εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

1. Μια πράξη πρόσθεσης

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \qquad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

2. Μια πράξη πολλαπλασιασμού με στοιχεία του σώματος F

$$\cdot : F \times V \longrightarrow V, \qquad (\lambda, \mathbf{v}) \longmapsto \lambda\mathbf{v}.$$

Το $\boldsymbol{V}$ ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\boldsymbol{F}$**, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες.

Α. Ιδιότητες της πρόσθεσης

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ισχύουν:

1. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

2. Προσεταιριστική ιδιότητα: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

3. Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος: Υπάρχει στοιχείο $\mathbf{0}_V \in V$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{u}$$

για κάθε $\mathbf{u} \in V$.

4. Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος: Για κάθε $\mathbf{u} \in V$ υπάρχει στοιχείο $-\mathbf{u} \in V$, τέτοιο ώστε $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$.

Β. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του σώματος

Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ και $\lambda, \mu \in F$ ισχύουν:

1. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων:

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}.$$

2. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση στο σώμα:

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}.$$

3. Συμβατότητα των πολλαπλασιασμών: $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$.

4. **Ιδιότητα της μονάδας:** $1_F \mathbf{u} = \mathbf{u}$, όπου 1_F είναι η μονάδα του σώματος F.

Τα στοιχεία του V ονομάζονται **διανύσματα**, ενώ τα στοιχεία του F ονομάζονται **αριθμοί** ή **βαθμωτά**.
Αν $F = \mathbb{R}$, ο διανυσματικός χώρος ονομάζεται **πραγματικός**, ενώ αν $F = \mathbb{C}$, ονομάζεται **μιγαδικός**.

3.1 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Παράδειγμα 1. Ένα υπερσώμα του F.
Έστω K ένα υπερσώμα του σώματος F, δηλαδή $F \subseteq K$.
Τότε το K είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το F, με τη συνήθη πρόσθεση στο K και τον πολλαπλασιασμό στοιχείων του K με στοιχεία του F. Ιδιαιτέρως, το F είναι διανυσματικός χώρος επί του εαυτού του.
Πράγματι, οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με βαθμωτά προκύπτουν αμέσως από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πράξεων του σώματος K.
Ειδικότερα, το σώμα $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, ενώ το $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$.
Επίσης, το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$.
Παράδειγμα 2. Ο χώρος F^n. Το σύνολο $F^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in F\}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα F, με πράξεις

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι

$$\mathbf{0}_{F^n} = (0_F, 0_F, \ldots, 0_F),$$

ενώ το αντίθετο του $(x_1, \ldots, x_n)$ είναι

$$(-x_1, \ldots, -x_n).$$

Ειδικές περιπτώσεις, για $F = \mathbb{R}$, είναι οι γνωστοί χώροι $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι ο διανυσματικός χώρος F^n είναι στην ουσία το σύνολο των πινάκων με μία γραμμή και n στήλες. Άρα $F^n = F^{1\times n}$.
Παράδειγμα 3. Ο χώρος των πινάκων. Έστω $F^{m\times n}$ το σύνολο όλων των πινάκων $m \times n$ με στοιχεία από το F.
Με τη συνήθη πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό πίνακα με στοιχείο του F, το $F^{m\times n}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το F. Το μηδενικό διάνυσμα αυτού του χώρου είναι ο μηδενικός πίνακας $O_{m\times n}$.

Ιδιαιτέρως, τα διανύσματα-γραμμές $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ αποτελούν τον χώρο $F^{1\times n} =$
$= F^n$ και τα διανύσματα-στήλες $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ τον χώρο $F^{n\times 1}$.

Παράδειγμα 4. Ο χώρος των πολυωνύμων.
Το σύνολο $F[x]$ όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το F είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το F, με τη συνήθη πρόσθεση πολυωνύμων και τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμου με στοιχείο του F.
Επίσης, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n, το σύνολο

$$P_n(F) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in F\}$$

είναι διανυσματικός χώρος.
Πρόκειται για το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n, μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο.

Παράδειγμα 5. Ο χώρος των συναρτήσεων.
Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο

$$\mathcal{F}(X, F) = \{f \mid f : X \longrightarrow F\}$$

όλων των συναρτήσεων από το X στο F είναι διανυσματικός χώρος, αν ορίσουμε

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

και
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι η μηδενική συνάρτηση

$$\mathbf{0}(x) = 0_F, \qquad x \in X.$$

Παράδειγμα 6. Λύσεις ομογενούς γραμμικού συστήματος.
Έστω A ένας πίνακας $m \times n$ με στοιχεία από το F. Το σύνολο

$$V = \{\mathbf{x} \in F^{n\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}_{F^{m\times 1}}\}$$

είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το F, με τις συνήθεις πράξεις του $F^{n\times 1}$.
Πράγματι, αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, τότε $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Επομένως $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$.
Επίσης, αν $\lambda \in F$, τότε $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, οπότε $\lambda x \in V$.
Τέλος, το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{F^{n\times 1}}$ ανήκει στο V, αφού $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Συνεπώς, το V είναι διανυσματικός χώρος.

Παράδειγμα 7. Ο μηδενικός χώρος.
Το σύνολο

$$V = \{0\}$$

αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από οποιοδήποτε σώμα F, με τις μοναδικές δυνατές πράξεις: $\quad 0+0=0, \qquad \lambda 0=0.$
Ο χώρος αυτός ονομάζεται **μηδενικός διανυσματικός χώρος**.

Αντιπαράδειγμα.
Το σύνολο $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$ δεν είναι διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις του $\mathbb{R}^2$.
Πράγματι, το μηδενικό διάνυσμα $(0,0)$ δεν ανήκει στο S.
Επιπλέον, αν $\mathbf{u}=(1,0)$, και $\mathbf{v}=(0,1)$, τότε $\mathbf{u},\mathbf{v}\in S$, αλλά $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1,1)\notin S$.
Επομένως, το S δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

3.2 Βασικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα F.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
(i) Το μηδενικό διάνυσμα του V είναι μοναδικό.
(ii) Κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}\in V$ έχει μοναδικό αντίθετο.
(iii) Για κάθε $\mathbf{v}\in V$ ισχύει $0_F\mathbf{v}=\mathbf{0}_V$.
(iv) Για κάθε $\lambda\in F$ ισχύει $\lambda\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$.
(v) Για κάθε $\lambda\in F$ και $\mathbf{v}\in V$ ισχύει $(-\lambda)\mathbf{v}=-(\lambda\mathbf{v})=\lambda(-\mathbf{v})$.
(vi) Αν $\lambda\in F$ και $\mathbf{v}\in V$, τότε $\lambda\mathbf{v}=0_V \iff \lambda=0_F$ ή $\mathbf{v}=\mathbf{0}_V$.
(vii) Για κάθε $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ ισχύει $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w} \iff \mathbf{u}=\mathbf{v}$.
Απόδειξη: (i) Έστω $\mathbf{0}_V$ και $\mathbf{0}'_V$ δύο μηδενικά διανύσματα. Τότε

$$\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V+\mathbf{0}'_V=\mathbf{0}'_V.$$

Άρα το μηδενικό διάνυσμα είναι μοναδικό.
(ii) Έστω $\mathbf{u},\mathbf{w}$ δύο αντίθετα του $\mathbf{v}$. Τότε

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}_V=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{0}_V+\mathbf{w}=\mathbf{w}.$$

Επομένως, το αντίθετο κάθε διανύσματος είναι μοναδικό.
(iii) Από την επιμεριστική ιδιότητα έχουμε

$$0_F\cdot\mathbf{v}=(0_F+0_F)\mathbf{v}=0_F\mathbf{v}+0_F\mathbf{v}.$$

Συνεπώς

$$\mathbf{0}_V=0_F\mathbf{v}+(-0_F\mathbf{v})=(0_F\mathbf{v}+0_F\mathbf{v})+(-0_F\mathbf{v})=0_F\mathbf{v}+(0_F\mathbf{v}+(-0_F\mathbf{v}))=$$
$$=0_F\mathbf{v}+\mathbf{0}_V=0_F\mathbf{v}.$$

(iv) Για κάθε $\lambda\in F$ έχουμε $\lambda\mathbf{0}_V=\lambda(\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V)=\lambda\mathbf{0}_V+\lambda\mathbf{0}_V$. Επομένως $\mathbf{0}_V=\lambda\mathbf{0}_V+(-\lambda\mathbf{0}_V)=(\lambda\mathbf{0}_V+\lambda\mathbf{0}_V)+(-\lambda\mathbf{0}_V)=\lambda\mathbf{0}_V+(\lambda\mathbf{0}_V+(-\lambda\mathbf{0}_V))=$
$=\lambda\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V=\lambda\mathbf{0}_V$.
(v) Επειδή $\mathbf{0}_V=0_F\cdot\mathbf{v}=(\lambda+(-\lambda))\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}+(-\lambda)\mathbf{v}$, προκύπτει ότι $(-\lambda)\mathbf{v}=$
$=-(\lambda\mathbf{v})$. Ιδιαιτέρως $(-1_F)\mathbf{v}=-(1_F\mathbf{v})=-\mathbf{v}$.
Θα παραλείπουμε την παρένθεση και θα γράφουμε $-\lambda\mathbf{v}$ αντί $-(\lambda\mathbf{v})$.
Επίσης, $\mathbf{0}_V=\lambda\mathbf{0}_V=\lambda(\mathbf{v}+(-\mathbf{v}))=\lambda\mathbf{v}+\lambda(-\mathbf{v})$. Επομένως $\lambda(-\mathbf{v})=-\lambda\mathbf{v}$.

(vi) ($\Longleftarrow$) Η κατεύθυνση αυτή έχει αποδειχθεί στα **(iii)** και **(iv)**.
($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0_F$ και $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$. Έστω $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Τότε $\mathbf{v} = 1_F\mathbf{v} =$
$= (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, αντίφαση. Επομένως $\lambda = 0_F$ ή $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$.
(vii) ($\Longleftarrow$) Η κατεύθυνση αυτή είναι προφανής.
($\Longrightarrow$) $\mathbf{u}+\mathbf{w} = \mathbf{v}+\mathbf{w} \Leftrightarrow (\mathbf{u}+\mathbf{w})+(-\mathbf{w}) = (\mathbf{v}+\mathbf{w})+(-\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{u}+(\mathbf{w}+(-\mathbf{w})) =$
$= \mathbf{v} + (\mathbf{w} + (-\mathbf{w})) \Leftrightarrow \mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{v} + \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. ■

3.3 Διανυσματικοί υπόχωροι

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα F και W ένα μη κενό υποσύνολο του V.
Το W ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος** του V, αν είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το F ως προς τις πράξεις που κληρονομεί από το V.

Συμβολισμός: $W \leqslant V$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5. (Κριτήριο υποχώρου). Έστω W ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από το F.
Το W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V αν και μόνον αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(α΄) Για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ ισχύει $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

(β΄) Για κάθε $\lambda \in F$ και $\mathbf{v} \in W$ ισχύει $\lambda\mathbf{v} \in W$.

Απόδειξη: Αν το W είναι διανυσματικός υπόχωρος, τότε οι δύο ιδιότητες ισχύουν από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το W είναι μη κενό και ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες.
Επειδή $W \neq \varnothing$, υπάρχει $\mathbf{v} \in W$. Από την τρίτη ιδιότητα, $0_F\mathbf{v} = \mathbf{0}_V \in W$. Επομένως, το W περιέχει το μηδενικό διάνυσμα του V.
Επίσης, για κάθε $\mathbf{v} \in W$ έχουμε $(-1_F)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \in W$. Άρα το W περιέχει το αντίθετο κάθε στοιχείου του.
Οι υπόλοιπες ιδιότητες του διανυσματικού χώρου ισχύουν στο W,επειδή ισχύουν ήδη στο V.
Συνεπώς, το W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.6. Ένα μη κενό υποσύνολο W του V είναι διανυσματικός υπόχωρος αν και μόνον αν

$$\boxed{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W}$$

για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ και $\lambda, \mu \in F$.
Απόδειξη: Αν το W είναι υπόχωρος, η συνθήκη ισχύει λόγω της κλειστότητας ως προς τις δύο πράξεις.

Αντίστροφα, επιλέγοντας $\lambda = \mu = 1_F$, παίρνουμε $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
Επίσης, επιλέγοντας $\mu = 0_F$, παίρνουμε $\lambda\mathbf{u} + 0_F\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} \in W$. Επομένως, ισχύουν οι δύο συνθήκες του κριτηρίου υποχώρου. ■

Στα επόμενα θα γράφουμε $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ αντί $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, 1 αντί 1_F, $\mathbf{0}$ αντί $\mathbf{0}_V$ κτλ.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Σε κάθε διανυσματικό χώρο V τα σύνολα

$$\{\mathbf{0}\} \quad \text{και} \quad V$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V.
Ο υπόχωρος $\{\mathbf{0}\}$ ονομάζεται **τετριμμένος υπόχωρος**.

Παράδειγμα 2. Το σύνολο

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
Πράγματι, το W είναι μη κενό, αφού $(0, 0, 0) \in W$.
Έστω $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ δύο διανύσματα του W.
Τότε $x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$ και $x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.
Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2,\ \lambda z_1 + \mu z_2).$$

Επειδή $(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) +$
$+\mu(x_2 + 2y_2 - z_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$, προκύπτει $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W$.
Άρα το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 3. Έστω $A \in F^{m\times n}$. Το σύνολο

$$W = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}_{m\times 1}\}$$

των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}_{m\times 1}$ είναι υπόχωρος του F^n.
Πράγματι, το W είναι μη κενό, αφού περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.
Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ και $\lambda, \mu \in F$, τότε

$$A(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v})^T = \lambda A\mathbf{u}^T + \mu A\mathbf{v}^T = \lambda\mathbf{0}_{m\times 1} + \mu\mathbf{0}_{m\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}.$$

Άρα $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W$.

Παράδειγμα 4. Το σύνολο

$$W = \{A \in F^{n\times n} \mid A \text{ είναι άνω τριγωνικός}\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $F^{n\times n}$.
Πράγματι, ο μηδενικός πίνακας ανήκει στο W και κάθε γραμμικός συνδυασμός δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι επίσης άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα 5. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n, το σύνολο

$$P_n(F) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in F\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $F[x]$ όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το F.

Αντιπαράδειγμα. Το σύνολο

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, διότι

$$(0, 0) \notin W.$$

Γενικότερα, αν $A \in F^{m\times n}$ και $\mathbf{b} \in F^{m\times 1}$, με $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, τότε το σύνολο λύσεων

$$W = \{\mathbf{x} \in F^{n\times 1} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $F^{n\times 1}$, αφού το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει στο W.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. Η τομή οποιουδήποτε πλήθους υποχώρων του διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του V.
Απόδειξη: Έστω $\{W_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υποχώρων του V και $W = \bigcap_{i\in I} W_i$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ και $\kappa, \lambda \in F$. Τότε, για κάθε $i \in I$ έχουμε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_i$ και κατά συνέπεια $\kappa\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \in W_i$. Επομένως $\kappa\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} \in \bigcap_{i\in I} W_i = W$. ■

Η ένωση δύο ή περισσότερων υποχώρων του V δεν είναι κατ' ανάγκην υπόχωρος του V.

Παράδειγμα: $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\} \leqslant \mathbb{R}^2$ και $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \leqslant \mathbb{R}^2$. Έχουμε $(1, 1) \in W_1$ και $(1, -1) \in W_2$. Αλλά $(1, 1) + (1, -1) = = (2, 0) \notin W_1 \cup W_2$.

Αθροίσματα υποχώρων-Ευθέα αθροίσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8. Έστω $W_1, W_2, \ldots, W_k$ υπόχωροι του V. Το άθροισμα

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k$, όπου $\mathbf{u}_i \in W_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. Το $\sum_{i=1}^{k} W_i$ είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k$ και $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k$ με $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i \in W_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και $\kappa, \lambda \in F$. Τότε έχουμε:

$$\kappa\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w} = \kappa(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k) + \lambda(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k) =$$

$$= (\kappa\mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{w}_1) + (\kappa\mathbf{u}_2 + \lambda\mathbf{w}_2) + \cdots + (\kappa\mathbf{u}_k + \lambda\mathbf{w}_k)$$

και $\kappa\mathbf{u}_i + \lambda\mathbf{w}_i \in W_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Επομένως $\kappa\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w} \in \sum_{i=1}^{k} W_i$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10. Το άθροισμα $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ λέγεται **ευθύ** και παριστάνεται με $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ ή πιο σύντομα με $\bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ αν

$$\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} W_i\Big) \bigcap W_j = \{\mathbf{0}\},$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, k$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. Έστω $W_1, W_2, \ldots, W_k \leqslant V$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) Το άθροισμα $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ είναι ευθύ.
(ii) Κάθε στοιχείο του $W = \sum_{i=1}^{k} W_i \leqslant V$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k$, όπου $\mathbf{u}_i \in W_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.
(iii) Αν $\mathbf{u}_i \in W_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \cdots = \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$.

Απόδειξη: (i)⇒(ii) Έστω $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \cdots + \mathbf{w}_k$, όπως παραπάνω. $\big(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i \in W_i\big)$. Τότε για κάθε $j = 1, 2, \ldots, k$ έχουμε:
$W_j \ni \mathbf{u}_j - \mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{u}_1) + \cdots + (\mathbf{w}_{j-1} - \mathbf{u}_{j-1}) + (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{u}_{j+1}) + \cdots + (\mathbf{w}_k - \mathbf{u}_k) \in$
$\in \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} W_i \Longrightarrow \mathbf{u}_j - \mathbf{w}_j \in W_j \bigcap \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} W_i\Big) = \{\mathbf{0}\}$. Επομένως $\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_j$.
(ii)⇒(iii) Αν $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0} = \underbrace{\mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{k \text{ φορές}}$, και από το **(ii)** προκύπτει ότι $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.
(iii)⇒(i) Έστω $\mathbf{u}_j \in W_j \bigcap \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} W_i\Big)$. Τότε και $-\mathbf{u}_j \in W_j \bigcap \Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} W_i\Big)$. Επομένως υπάρχουν $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_k$, όπου $\mathbf{u}_i \in W_i$ για κάθε $i \neq j$, τέτοια ώστε $-\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{u}_{j+1} + \ldots + \mathbf{u}_k \Leftrightarrow \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{u}_j +$

$+\mathbf{u}_{j+1}+\cdots+\mathbf{u}_k=\mathbf{0}$. Από το **(iii)** προκύπτει ότι $\mathbf{u}_i=\mathbf{0}$, για κάθε $i=1,2,\ldots,k$. Ιδιαιτέρως $\mathbf{u}_j=\mathbf{0}$. ■

Παραδείγματα: 1. Θεωρούμε τους ακόλουθους υποχώρους του $\mathbb{R}^5$: $U=\{(x,y,x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $V=\{(z,w,0,0,z+w)\mid z,w\in\mathbb{R}\}$ και $W=\{(0,0,t,t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$.
Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα $U+V+W$ είναι ευθύ.
Πράγματι, έστω $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$, όπου $\mathbf{u}\in U$, $\mathbf{v}\in V$ και $\mathbf{w}\in W$.
Τότε $(x,y,x,y,0)+(z,w,0,0,z+w)+(0,0,t,t,t)=\mathbf{0}$, οπότε

$$\begin{cases} x+z=0,\\ y+w=0,\\ x+t=0,\\ y+t=0,\\ z+w+t=0. \end{cases}$$

Από τις τέσσερις πρώτες εξισώσεις προκύπτει $x=y=-t$, και $z=w=t$.
Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση, βρίσκουμε $3t=0$, άρα $t=0$ και, συνεπώς, $x=y=z=w=t=0$.
Επομένως, $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{w}=\mathbf{0}$, δηλαδή το άθροισμα $U+V+W$ είναι ευθύ. ■

2. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των άνω τριγωνικών πινάκων του $F^{n\times n}$. Για κάθε $k=1,\ldots,n$, ορίζουμε

$$W_k=\big\{(a_{ij})\in F^{n\times n}\mid a_{ij}=0 \text{ όταν } j-i\neq k-1\big\}.$$

Δηλαδή, στους πίνακες του W_k επιτρέπονται μη μηδενικά στοιχεία μόνο στις θέσεις

$$(1,k),\ (2,k+1),\ \ldots,\ (n-k+1,n).$$

Έτσι, ο W_1 αποτελείται από τους διαγώνιους πίνακες, ο W_2 από τους πίνακες που έχουν ενδεχομένως μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην πρώτη παράλληλη πάνω από την κύρια διαγώνιο, και ούτω καθεξής. Τέλος, στους πίνακες του W_n το μόνο στοιχείο που μπορεί να είναι μη μηδενικό βρίσκεται στη θέση $(1,n)$.

$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ \vdots\\ n-k+1\\ n-k+2\\ \vdots\\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-k+1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}\in W_k$$

$$a_{1k},\quad a_{2,k+1},\quad \ldots,\ a_{n-k+1,n}\in F.$$

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ένα γενικό στοιχείο του W_k. Μόνο στις σκιασμένες θέσεις επιτρέπονται μη μηδενικά στοιχεία.
Οι πρώτες $k-1$ στήλες και οι τελευταίες $k-1$ γραμμές είναι μηδενικές. Όταν $k=1$, τα τμήματα αυτά δεν υπάρχουν, ενώ όταν $k=n$, η σκιασμένη παράλληλη περιορίζεται στη μοναδική θέση $(1,n)$.
Κάθε W_k είναι υποχώρος του V: περιέχει τον μηδενικό πίνακα, ενώ η πρόσθεση πινάκων και ο πολλαπλασιασμός με στοιχείο του F διατηρούν μηδενικά τα στοιχεία έξω από τις παραπάνω θέσεις. Θα δείξουμε ότι

$$\boxed{V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n.}$$

Πράγματι, κάθε $A=(a_{ij}) \in V$ γράφεται ως

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n, \qquad A_k \in W_k,$$

όπου ο A_k προκύπτει από τον A αν κρατήσουμε τα στοιχεία στις θέσεις με $j-i=k-1$ και μηδενίσουμε όλα τα υπόλοιπα. Επομένως,

$$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n.$$

Για να δείξουμε ότι το άθροισμα είναι ευθύ, υποθέτουμε ότι

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = O, \qquad B_k \in W_k.$$

Στις θέσεις με $j-i=k-1$, όλοι οι πίνακες του αθροίσματος, εκτός από τον B_k, έχουν μηδενικά στοιχεία. Άρα και τα αντίστοιχα στοιχεία του B_k είναι μηδενικά. Αυτό ισχύει για κάθε k, οπότε

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_n = O,$$

και συνεπώς το άθροισμα είναι ευθύ. ■