Sheaves

Με X συμβολίζουμε έναν τοπολογικό χώρο και με $\mathrm{Open}(X)$ την κατηγορία των ανοιχτών υποσυνόλων του, όπου για $V \subseteq U$ υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός $V \hookrightarrow U$.

Ένα presheaf (δακτυλίων) στον X είναι ένας contravariant συναρτητής

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}(X) \longrightarrow \mathrm{Rings}.$$

Για $V \subseteq U$ και $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ γράφουμε

$$\varphi|_V := \mathcal{F}(V \hookrightarrow U)(\varphi) \in \mathcal{F}(V).$$

Αν U ανοιχτό, ένα ανοιχτό κάλυμμα του U είναι μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτών με

$$U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Μια οικογένεια $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ λέγεται συμβατή αν

$$\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j} \qquad \text{για κάθε } i, j \in I.$$

Ορισμός 1. *Ένα presheaf $\mathcal{F}$ στον X λέγεται sheaf αν για κάθε ανοιχτό U και κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ ισχύει το εξής:*

- *Αν $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ είναι συμβατή οικογένεια, τότε υπάρχει **μοναδική** $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$, για κάθε $i \in I$.*

Ορισμός 2. *Ένα presheaf $\mathcal{F}$ στον X λέγεται sheaf αν για κάθε ανοιχτό U και κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\bigcup_{i\in I} U_i = U$ ισχύουν τα εξής:*

- ***(E)*** *Αν $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ είναι συμβατή οικογένεια, τότε υπάρχει $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ για κάθε $i \in I$.*
- ***(T)*** *Αν $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i}$ για κάθε $i \in I$, τότε $\varphi = \psi$.*

Πρόταση. *Οι ορισμοί 1 και 2 είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Έστω ένα ανοιχτό U και ένα ανοιχτό κάλυμμα $\bigcup_{i\in I} U_i = U$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Η ιδιότητα (E) είναι άμεση. Για το (T), έστω $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i}$ για κάθε i. Θέτουμε

$$\varphi_i := \varphi|_{U_i} = \psi|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i).$$

Η οικογένεια (φ_i) είναι συμβατή, αφού

$$\varphi_i|_{U_i\cap U_j} = (\varphi|_{U_i})|_{U_i\cap U_j} = \varphi|_{U_i\cap U_j} = (\varphi|_{U_j})|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}.$$

Από τη μοναδικότητα του Ορισμού 1 έπεται ότι $\varphi = \psi$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Έστω $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ συμβατή οικογένεια. Από το (E) υπάρχει $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ για κάθε i. Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι μοναδική. Έστω $\varphi' \in \mathcal{F}(U)$ τέτοια ώστε $\varphi'|_{U_i} = \varphi_i$ για κάθε i, τότε

$$\varphi|_{U_i} = \varphi_i = \varphi'|_{U_i} \qquad \text{για κάθε } i,$$

και από το (T) έπεται ότι $\varphi = \varphi'$. □

Παρατήρηση. *Ισοδύναμα, οι δύο ορισμοί λένε ότι η απεικόνιση*

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \Big\{(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \;\Big|\; \varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}\ \forall\, i,j\Big\}, \qquad \varphi \longmapsto (\varphi|_{U_i})_{i\in I},$$

είναι αμφιμονοσήμαντη. Η (T) δίνει το ένα προς ένα και η (E) το επί.

Παρατήρηση. *Αν επιτρέψουμε $I = \emptyset$, τότε το $U = \emptyset$ καλύπτεται από την κενή οικογένεια και η συνθήκη συμβατότητας ισχύει τετριμμένα. Άρα για ένα sheaf το $\mathcal{F}(\emptyset)$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο: η ιδιότητα (T) δίνει το πολύ ένα και η (E) τουλάχιστον ένα. Για sheaf δακτυλίων λοιπόν, το $\mathcal{F}(\emptyset)$ είναι ο μηδενικός δακτύλιος.*