Πρόχειρες Σημειώσεις

Αλγεβρικής Γεωμετρίας



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

Τερεζάκης Αλέξιος

7 Νοεμβρίου 2026

Οι **πρόχειρες σημειώσεις** που ακολουθούν βρίσκονται υπό διαμόρφωση και γράφονται για τις ανάγκες του μεταπτυχιακού μαθήματος «Αλγεβρική Γεωμετρία». Δεν φιλοδοξούν να αντικαταστήσουν κάποιο από τα κλασικά συγγράμματα του αντικειμένου, καθώς:

- δεν έχουν ακόμη ελεγχθεί διεξοδικά και είναι βέβαιο ότι περιέχουν **πολλά λάθη**·
- περιλαμβάνουν σαφώς **λιγότερα** παραδείγματα και ασκήσεις από ένα πλήρες σύγγραμμα.

Η παρουσίαση ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό τις σημειώσεις του A. Gathmann [2]. Για περαιτέρω μελέτη προτείνεται επίσης το ελληνικό σύγγραμμα των Αντωνιάδη και Κοντογεώργη [1].

Οδηγίες προς τον αναγνώστη

- Το μάθημα προϋποθέτει εξοικείωση με τη μεταθετική άλγεβρα και στοιχειώδεις γνώσεις συνολοθεωρητικής τοπολογίας. Τα περισσότερα από τα απαραίτητα προαπαιτούμενα παρουσιάζονται πάντως συνοπτικά μέσα στις σημειώσεις.
- Το Κεφάλαιο 2 αποτελεί μια ολοκληρωμένη απόδειξη του Nullstellensatz, παρουσιάζοντας ταυτόχρονα τα βασικά εργαλεία μεταθετικής άλγεβρας που θα χρειαστούμε.
- Οι ασκήσεις που παρεμβάλλονται στο κείμενο είναι απαραίτητες για την κατανόηση της θεωρίας.
- Οι ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου προορίζονται για εξάσκηση και περαιτέρω εμβάθυνση.

Θα σας είμαι ευγνώμων για κάθε διόρθωση ή σχόλιο στη διεύθυνση aleksistere@math.uoa.gr.

Περιεχόμενα

0 Εισαγωγή **5**

1 Affine Varieties **7**
1.1 Ο αφινικός χώρος . . . 7
1.2 Affine Varieties . . . 7
1.3 Το ιδεώδες ενός συνόλου σημείων . . . 8

2 Το Nullstellensatz **11**
2.1 Λίγη Μεταθετική Άλγεβρα . . . 11
2.2 Το ασθενές Nullstellensatz . . . 12
2.3 Το Θεώρημα του Kaplansky . . . 13
2.4 Το Θεώρημα του Munshi . . . 15
2.5 Δακτύλιοι Noether . . . 15
2.6 Απόδειξη του Nullstellensatz . . . 16

3 Δακτύλιος συντεταγμένων και τοπολογία Zariski **17**
3.1 Πολυωνυμικές συναρτήσεις και δακτύλιος συντεταγμένων . . . 17
3.2 Η τοπολογία Zariski . . . 18
3.3 Irreducible και connected χώροι . . . 20
3.4 Τοπολογικοί χώροι της Noether και irreducible συνιστώσες . . . 21
3.5 Διάσταση . . . 23

4 Regular συναρτήσεις **27**
4.1 Ορισμός και πρώτες ιδιότητες . . . 27
4.2 Regular συναρτήσεις στα βασικά ανοιχτά . . . 28
4.3 Κατηγορίες και συναρτητές (functors) . . . 30
4.4 Presheaves και sheaves . . . 31
4.5 Τοπικοποίηση (localization) . . . 32
4.6 Τοπικές ιδιότητες . . . 34
4.7 Stalks . . . 35

5 Μορφισμοί **37**
5.1 Ringed spaces και μορφισμοί . . . 37
5.2 Μορφισμοί affine varieties . . . 40

Βιβλιογραφία **43**

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Πάνω στο U μπορούμε να θεωρήσουμε διάφορους δακτυλίους συναρτήσεων:

- τον $C^0(U)$ των συνεχών συναρτήσεων $U \to \mathbb{R}$,
- τον $C^\infty(U)$ των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων,
- τον $C^\omega(U)$ των αναλυτικών συναρτήσεων,
- τον δακτύλιο των πολυωνύμων, ιδωμένων ως συναρτήσεις στο U.

Καθένας από αυτούς αντιστοιχεί σε έναν διαφορετικό κλάδο της γεωμετρίας:

$$\begin{array}{rcl} C^0 & \longrightarrow & \text{Τοπολογία} \\ C^\infty & \longrightarrow & \text{Διαφορική Γεωμετρία} \\ C^\omega & \longrightarrow & \text{Αναλυτική Γεωμετρία} \\ \text{Πολυώνυμα} & \longrightarrow & \text{Αλγεβρική Γεωμετρία.} \end{array}$$

Αντικείμενο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας είναι η μελέτη των συνόλων λύσεων συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων, δηλαδή συνόλων της μορφής

$$X = \{x \in k^n : f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\},$$

όπου k ένα σώμα και $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά ερωτήματα.

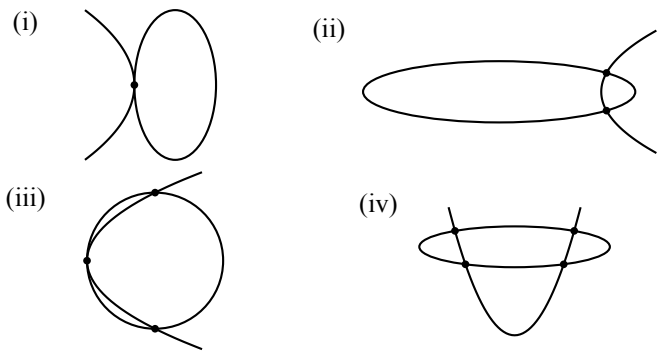
α. Πότε έχει το σύνολο

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^n + y^n = 1\right\}$$

μη τετριμμένα σημεία;

Εδώ «μη τετριμμένα» σημαίνει $xy \neq 0$. Για $n \geq 3$ η απάντηση είναι ότι δεν έχει καμία μη τετριμμένη λύση. Πρόκειται για το Τελευταίο Θεώρημα του Fermat, η απόδειξη του οποίου βασίζεται σε μεγάλο βαθμό σε εργαλεία της αλγεβρικής γεωμετρίας.

β. Σε πόσα σημεία τέμνονται δύο καμπύλες του επιπέδου; Στα παρακάτω σχήματα μια παραβολή τέμνει μια κωνική σε ένα, δύο, τρία και τέσσερα σημεία αντίστοιχα.



Το Θεώρημα του Bézout εξηγεί τι συμβαίνει: στο κατάλληλο περιβάλλον και υπό κατάλληλες συνθήκες[1], δύο καμπύλες βαθμών n και m τέμνονται σε ακριβώς $n \cdot m$ σημεία. Για δύο κωνικές, όπως στα σχήματα, ο αριθμός αυτός είναι $2 \cdot 2 = 4$.

γ. Στη διαφορική γεωμετρία ελέγχουμε αν μια καμπύλη είναι «λεία» με εργαλεία της ανάλυσης (όρια, εφαπτόμενες κ.λπ.), τα οποία δεν έχουν ανάλογο σε σώματα διαφορετικά από το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$. Όταν όμως οι εξισώσεις είναι πολυωνυμικές, οι μερικές παράγωγοι και ο Ιακωβιανός πίνακας ορίζονται τυπικά (formally) πάνω από οποιοδήποτε σώμα, οπότε η έννοια της λειότητας μπορεί να διατυπωθεί αλγεβρικά.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, ανάλογα με το σώμα στο οποίο δουλεύουμε ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ κ.λπ.), η μελέτη των λύσεων πολυωνυμικών εξισώσεων οδηγεί τόσο σε γεωμετρικά όσο και σε αριθμοθεωρητικά ερωτήματα. Ιδανικά, θα θέλαμε ένα ενιαίο πλαίσιο που να λειτουργεί πάνω από οποιοδήποτε σώμα.

Η κλασική Αλγεβρική Γεωμετρία (πριν από τον Grothendieck) εργάζεται πάνω από αλγεβρικά κλειστά σώματα, όπως το $\mathbb{C}$. Στο μάθημα αυτό θα ξεκινήσουμε από την κλασική θεωρία, θα εντοπίσουμε τους περιορισμούς της και, μέσα από αυτούς, θα οδηγηθούμε στην έννοια του scheme και στη σύγχρονη θεωρία του Grothendieck. Ένα από τα μεγάλα πλεονεκτήματα της θεωρίας των schemes είναι ότι εφαρμόζεται και σε πιο «περίεργα» σώματα, όπως τα πεπερασμένα σώματα.

[1] Συγκεκριμένα: στο μιγαδικό προβολικό επίπεδο, για καμπύλες χωρίς κοινή συνιστώσα, μετρώντας τα σημεία τομής με πολλαπλότητα.

Κεφάλαιο 1

Affine Varieties

1.1 Ο αφινικός χώρος

Μέχρι να αναφερθεί ρητά το αντίθετο, με k θα συμβολίζουμε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα.

- $k[x]$ ο δακτύλιος πολυωνύμων σε μία μεταβλητή.
- $k[x_1, \ldots, x_n] \coloneqq \big(k[x_1, \ldots, x_{n-1}]\big)[x_n]$ είναι ο δακτύλιος πολυωνύμων σε n μεταβλητές.

Ορισμός 1.1.1. *Το*

$$\mathbb{A}_k^n \coloneqq \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in k \ \ \forall i\}$$

λέγεται ***αφινικός χώρος*** *(affine space).*

Παρατήρηση 1.1.2. *Το $\mathbb{A}_k^n$ ως σύνολο είναι ακριβώς το k^n. Όμως στο $\mathbb{A}_k^n$ δεν υπάρχει πρόσθεση, ούτε μηδέν. Επίσης, αργότερα θα εφοδιάσουμε τον χώρο $\mathbb{A}_k^n$ με την τοπολογία Zariski, η οποία, για παράδειγμα, διαφέρει από τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{C}^n$.*

1.2 Affine Varieties

Ορισμός 1.2.1. *Για ένα υποσύνολο $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ορίζουμε*

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \ \ \forall f \in S\}.$$

Ένα τέτοιο υποσύνολο του $\mathbb{A}^n$ λέγεται ***affine variety***

Παρατήρηση 1.2.2. *Στη βιβλιογραφία μπορεί να δείτε τα παραπάνω να ονομάζονται αλγεβρικά σύνολα και τα affine varieties να έχουν μια επιπλέον ιδιότητα.*

Παραδείγματα 1.2.3.

(i) Για $S = \{1\}$, έχουμε $V(1) = \emptyset$.

(ii) Για $S = \{0\}$, έχουμε $V(0) = \mathbb{A}^n$.

(iii) Αν $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, τότε $V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = \{a\}$.

(iv) Στην περίπτωση $n = 1$, όταν είμαστε δηλαδή στον $\mathbb{A}^1$, κάθε γνήσιο affine variety είναι πεπερασμένο.

Λήμμα 1.2.4. *Έστω υποσύνολα $S_i \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$.*

(i) Αν $S_1 \subseteq S_2$, τότε $V(S_1) \supseteq V(S_2)$.

(ii) $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$.

(iii) $\bigcap_i V(S_i) = V\big(\bigcup_i S_i\big)$.

Απόδειξη. (i) Αν $\alpha \in V(S_2)$, τότε

$$f(\alpha) = 0 \ \forall f \in S_2 \Longrightarrow f(\alpha) = 0 \, \forall f \in S_1 \Longrightarrow \alpha \in V(S_1).$$

(ii) Έστω $x \notin V(S_1) \cup V(S_2)$. Τότε υπάρχουν $f \in S_1$ και $g \in S_2$ με $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$, οπότε

$$(f \cdot g)(x) \neq 0 \implies x \notin V(S_1 \cdot S_2).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό απλώς παρατηρήστε ότι όλες οι συνεπαγωγές είναι ισοδυναμίες.

(iii) Έχουμε

$$x \in \bigcap_i V(S_i) \iff f(x) = 0 \ \forall f \in S_i, \ \forall i \iff x \in V\Big(\bigcup_i S_i\Big).$$ □

Ορισμός 1.2.5. *Έστω ένας δακτύλιος R και ένα ιδεώδες του J. Ορίζουμε το **ριζικό** (radical) του J ως:*

$$\sqrt{J} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n \in J\}.$$

*Ένα ιδεώδες J λέγεται **ριζικό** αν $J = \sqrt{J}$.*

Παρατήρηση 1.2.6. *Ένα πρώτο ιδεώδες είναι ίσο με το ριζικό του.*

Παρατήρηση 1.2.7. *Αν δύο πολυώνυμα f και g μηδενίζονται πάνω σε ένα σύνολο X, τότε το ίδιο συμβαίνει και με τα πολυώνυμα $f + g$ και $h \cdot f$, για οποιοδήποτε πολυώνυμο h. Αυτό μας δίνει πως για οποιοδήποτε σύνολο $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ισχύει:*

$$V(S) = V(\langle S \rangle).$$

Λήμμα 1.2.8. *Έστω ιδεώδη $J, J_1, J_2 \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$.*

(i) $V(\sqrt{J}) = V(J)$.

(ii) $V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2) = V(J_1 \cap J_2)$.

(iii) $V(J_1) \cap V(J_2) = V(J_1 + J_2)$.

Απόδειξη. (i) Εφόσον $J \subseteq \sqrt{J}$, έχουμε $V(J) \supseteq V(\sqrt{J})$. Έστω ένα $a \in V(J)$ και ένα $f \in \sqrt{J}$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$f^n \in J \implies f^n(a) = 0 \implies f(a) = 0,$$

και άρα $a \in V(\sqrt{J})$.

(ii) Αρκεί να γνωρίζουμε πως $\sqrt{J_1 \cdot J_2} = \sqrt{J_1 \cap J_2}$.

(iii) Αρκεί να παρατηρήσουμε πως το ιδεώδες $J_1 + J_2$ παράγεται από το σύνολο $J_1 \cup J_2$ σε συνδυασμό με την τελευταία παρατήρηση. □

1.3 Το ιδεώδες ενός συνόλου σημείων

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.2.7, κάθε affine variety δίνεται από ένα ιδεώδες ($V(S) = V(\langle S \rangle)$) και αντίστροφα. Αυτό μας οδηγεί φυσιολογικά στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.3.1. *Για ένα υποσύνολο $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ορίζουμε*

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(x) = 0 \ \forall x \in X\}.$$

Άσκηση 1.3.2. *Να δείξετε ότι το $I(X)$ είναι πράγματι ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Λήμμα 1.3.3. *Έστω $X, X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}^n$.*

(i) Αν $X_1 \subseteq X_2$, τότε $I(X_1) \supseteq I(X_2)$.

(ii) Ισχύει $\sqrt{I(X)} = I(X)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $f \in I(X_2)$. Τότε

$$f(x) = 0 \ \forall x \in X_2 \implies f(x) = 0 \ \forall x \in X_1 \subseteq X_2 \implies f \in I(X_1).$$

(ii) Έστω $f \in \sqrt{I(X)}$. Τότε

$$\exists n : \ f^n(x) = 0 \ \forall x \in X \Longrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in X \implies f \in I(X).$$ □

Παρατήρηση 1.3.4. *Εν γένει δεν ισχύει $I(V(J)) = J$. Για παράδειγμα, για $J = (x^2) \subseteq k[x]$,*

$$I(V(J)) = I(\{x \in k \mid x^2 = 0\}) = I(\{0\}) = (x).$$

Έχουμε λοιπόν τις απεικονίσεις:

$$I : \{\text{affine varieties}\} \longrightarrow \{\text{radical ideals}\},$$
$$V : \{\text{radical ideals}\} \longrightarrow \{\text{affine varieties}\}.$$

Ο πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε ότι οι παραπάνω απεικονίσεις είναι η μία αντίστροφη της άλλης.

Θεώρημα 1.3.5 (Hilbert's Nullstellensatz)**.**

(α) Αν X ένα affine variety, τότε $V(I(X)) = X$.

(β) Αν J ένα ιδεώδες, τότε $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

Έχοντας ως εργαλείο το Nullstellensatz, μπορούμε να μεταφράζουμε γεωμετρικές ιδιότητες των affine varieties σε αλγεβρικές ιδιότητες ιδεωδών του $k[x_1, \ldots, x_n]$, και αντίστροφα.

Παράδειγμα 1.3.6. *Έστω $J \subseteq k[x]$ ιδεώδες, $J \neq (0)$. Αφού ο $k[x]$ είναι PID, $J = (f)$, και αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό,*

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r}.$$

Τότε

$$V(J) = V(f) = \{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{A}^1.$$

Παρατηρούμε ότι η πληροφορία των ριζών υπάρχει στο $V(J)$, αλλά χωρίς την πολλαπλότητα της κάθε ρίζας.

Λήμμα 1.3.7. *Έστω X_1, X_2 affine varieties στον $\mathbb{A}^n$.*

(i) $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.

(ii) $I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}$.

Απόδειξη. (i) Ένα πολυώνυμο f ανήκει στο $I(X_1 \cup X_2)$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X_1$ και για κάθε $x \in X_2$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $f \in I(X_1) \cap I(X_2)$.

(ii) Από το Θεώρημα 1.3.5(α) παίρνουμε ότι $X_1 = V(I(X_1))$ και $X_2 = V(I(X_2))$. Άρα

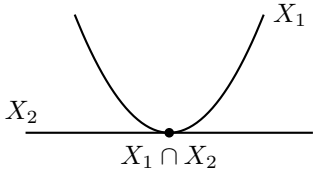
$$I(X_1 \cap X_2) = I\big(V(I(X_1)) \cap V(I(X_2))\big) = I\big(V(I(X_1) + I(X_2))\big) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 1.2.8(iii) και η τρίτη από το Θεώρημα 1.3.5(β). □

Άσκηση 1.3.8. *Δείξτε ότι κάθε ριζικό ιδεώδες είναι ιδεώδες ενός affine variety.*

Παρατήρηση 1.3.9. *Είδαμε πως τα ιδεώδη των affine varieties είναι πάντα ριζικά. Το (i) στο παραπάνω λήμμα εξηγεί πως και οι τομές ριζικών είναι ριζικό. Το (ii) από την άλλη εξηγεί πως το άθροισμα ριζικών δεν είναι πάντα ριζικό.*

Έστω $X_1 = V(y - x^2)$, $X_2 = V(y) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.



Τότε

$$I(X_1) = (y - x^2),$$
$$I(X_2) = (y),$$
$$I(X_1) + I(X_2) = (y - x^2, y) = (y, x^2),$$
$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)} = (x, y).$$

Παρατηρούμε πως το ιδεώδες (y, x^2) δεν είναι ριζικό.

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι πως τα X_1 και X_2 εφάπτονται στο σημείο τομής τους. Κατά κάποιον τρόπο δηλαδή, τα varieties βλέπουν μόνο ριζικά ιδεώδη, δηλαδή μόνο τα σημεία. Το άθροισμα $I(X_1) + I(X_2)$ περιέχει επιπλέον πληροφορία για το πώς τέμνονται τα X_1 και X_2, η οποία χάνεται περνώντας στο ριζικό.

Κεφάλαιο 2

Το Nullstellensatz

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε το Nullstellensatz του Hilbert (Θεώρημα 1.3.5). Ακολουθούμε ουσιαστικά την απόδειξη του Munshi, όπως παρουσιάζεται στο άρθρο του J. P. May [3]: με τη βοήθεια των Θεωρημάτων των Kaplansky και Munshi αποδεικνύουμε πρώτα το ασθενές Nullstellensatz, και από αυτό, με το τέχνασμα του Rabinowitsch, την πλήρη μορφή του θεωρήματος.

2.1 Λίγη Μεταθετική Άλγεβρα

Ορισμός 2.1.1. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος R με μονάδα 1 ($1 \neq 0$) λέγεται **ακέραια περιοχή** αν*

$$x \cdot y = 0 \implies x = 0 \text{ ή } y = 0, \qquad \text{για } x, y \in R.$$

Για το κεφάλαιο αυτό με R θα συμβολίζουμε μια ακέραια περιοχή, και με $K = \mathrm{Frac}(R)$ το σώμα πηλίκων του R. Ακόμα με $R^\times$ θα συμβολίζουμε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου R.

Έστω $R[x_1, \ldots, x_n]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος με n μεταβλητές και συντελεστές από το R. Κάθε πολυώνυμο $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ έχει έναν βαθμό $\deg f$ και ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$,
- $\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$.

Επιπλέον για $f = 0$, θέτουμε $\deg f = -\infty$.

Πρόταση 2.1.2. *Αν ο R είναι ακέραια περιοχή, τότε και ο $R[x]$ είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη. Έστω $f, g \in R[x]$. Αν

$$f \cdot g = 0 \Longrightarrow \deg(f \cdot g) = -\infty \Longrightarrow \deg f + \deg g = -\infty \Longrightarrow \deg f = -\infty \text{ ή } \deg g = -\infty \Longrightarrow f = 0 \text{ ή } g = 0.$$

□

Ορισμός 2.1.3. *Ένα γνήσιο ιδεώδες $I \subsetneq R$ λέγεται*

- ***πρώτο** αν $x \cdot y \in I \Longrightarrow x \in I$ ή $y \in I$.*
- ***μέγιστο** αν για οποιοδήποτε ιδεώδες $J \subseteq R$ ισχύει: $I \subsetneq J \Longrightarrow J = R$.*

Άσκηση 2.1.4. *Να δείξετε ότι κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο.*

Ορισμός 2.1.5. *Έστω R ακέραια περιοχή. Ένα στοιχείο $0 \neq p \in R$ που δεν είναι αντιστρέψιμο, λέγεται*

- ***ανάγωγο** αν: $p = a \cdot b \Longrightarrow$ το a ή το b είναι αντιστρέψιμο.*
- ***πρώτο** αν: το ιδεώδες $(p) := \{rp \mid r \in R\}$ είναι πρώτο.*

Πρόταση 2.1.6. *Κάθε πρώτο στοιχείο είναι ανάγωγο.*

Άσκηση 2.1.7. *Να αποδείξετε την παραπάνω πρόταση και να βρείτε κατάλληλο δακτύλιο στον οποίο υπάρχει ένα ανάγωγο στοιχείο που να μην είναι πρώτο (βλ. Πρόταση 2.1.9).*

Ορισμός 2.1.8. *Μια ακέραια περιοχή λέγεται* ***περιοχή κυρίων ιδεωδών*** *(PID) αν κάθε ιδεώδες είναι κύριο, αν δηλαδή κάθε ιδεώδες παράγεται από ένα στοιχείο.*

Πρόταση 2.1.9. *Έστω R PID και $p \in R$. Το $p \neq 0$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το (p) είναι μέγιστο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω p ανάγωγο και $I \subsetneq R$ ιδεώδες με $(p) \subseteq I$. Αφού ο R είναι PID, υπάρχει $q \in R$: $I = (q)$. Συνεπώς υπάρχει $r \in R$: $rq = p$. Όμως το p είναι ανάγωγο, άρα το r ή το q είναι αντιστρέψιμο. Αν το q είναι αντιστρέψιμο, τότε $I = (q) = R$, άτοπο. Έπεται λοιπόν ότι το r είναι αντιστρέψιμο και

$$q = r^{-1}(rq) = r^{-1}p \in (p).$$

Συνεπώς $(p) = (q)$ και άρα το (p) είναι μέγιστο.

($\Leftarrow$) Αν το (p) είναι μέγιστο, τότε το (p) είναι πρώτο και άρα το p είναι πρώτο. Τελικά το p είναι ανάγωγο (βλ. Άσκηση 2.1.7).

□

Πρόταση 2.1.10. *Αν F ένα σώμα, τότε ο $F[x]$ είναι PID.*

Άσκηση 2.1.11. *Αποδείξτε την παραπάνω πρόταση με χρήση της διαίρεσης πολυωνύμων.*

Ορισμός 2.1.12. *Μια ακέραια περιοχή R λέγεται* ***περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης*** *(UFD) αν κάθε μη μηδενικό, μη αντιστρέψιμο στοιχείο μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος αναγώγων, και μάλιστα με μοναδικό τρόπο μέχρι πολλαπλασιασμό με αντιστρέψιμο στοιχείο.*

Δηλαδή, για κάθε $0 \neq r \in R \setminus R^\times$ υπάρχουν ανάγωγα $p_1, \ldots, p_n \in R$ τέτοια ώστε $r = p_1 \cdots p_n$, και αν $r = q_1 \cdots q_m$ με q_i ανάγωγα, τότε $m = n$ και υπάρχουν αντιστρέψιμα u_i: $p_i = u_i q_i$ για κάθε i (μετά από αναδιάταξη).

Θεώρημα 2.1.13. *Κάθε PID είναι UFD.*

Θεώρημα 2.1.14. *Αν ο R είναι UFD, τότε και ο $R[x_1, \ldots, x_n]$ είναι UFD.*

Παρατήρηση 2.1.15. *Αν ο R είναι PID, ο $R[x]$ δεν είναι πάντα PID. Για παράδειγμα, ο $\mathbb{Z}$ είναι PID, αλλά στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$ το ιδεώδες (p, x), όπου p πρώτος, δεν είναι κύριο.*

2.2 Το ασθενές Nullstellensatz

Στα αγγλικά θα μεταφράζαμε το Nullstellensatz ως «zero-place theorem».

Θεώρημα 2.2.1 (Weak Nullstellensatz)**.** *Έστω k αλγεβρικά κλειστό σώμα. Κάθε ιδεώδες $\mathfrak{m}$ του $k[x_1, \ldots, x_n]$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν παράγεται από στοιχεία $x_i - a_i$, δηλαδή αν $\exists\, a_i \in k$:*

$$\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Πόρισμα 2.2.2. *Για οποιοδήποτε γνήσιο ιδεώδες I του $k[x_1, \ldots, x_n]$, υπάρχει ένα στοιχείο $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$: $f(a) = 0$ για κάθε $f \in I$. Ισοδύναμα, το affine variety $V(I)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο.*

Απόδειξη. Κάθε γνήσιο ιδεώδες I περιέχεται σε κάποιο μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ και από το Λήμμα 1.2.4(i) έχουμε $V(I) \supseteq V(\mathfrak{m})$. □

Παρατήρηση 2.2.3. *Έχουμε μια αντιστοιχία*

$$\{\textit{σημεία του } \mathbb{A}^n\} \longleftrightarrow \{\textit{μέγιστα ιδεώδη του } k[x_1, \ldots, x_n]\}.$$

Πράγματι, κάθε σημείο $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ αντιστοιχεί στο μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, και αντίστροφα, αν $\mathfrak{m}$ ένα μέγιστο ιδεώδες, από το ασθενές Nullstellensatz (Θεώρημα 2.2.1) υπάρχει $a = (a_1, \ldots, a_n)$: $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.

Θεώρημα 2.2.4 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)**.** *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f \in \mathbb{C}[x]$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Έτσι, κάθε μονικό πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων της μορφής $x - a_i$.*

Παρατήρηση 2.2.5. *Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας έπεται ότι τα μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{C}[x]$ είναι ακριβώς τα ιδεώδη $(x - a)$.*

Ένα σώμα με αυτή την ιδιότητα λέγεται ***αλγεβρικά κλειστό****.*

Παρατήρηση 2.2.6. *Για μη αλγεβρικά κλειστά σώματα, όπως το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$, τα προηγούμενα δεν ισχύουν· για παράδειγμα, το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει καμία ρίζα.*

Για να αποδείξουμε αυτή τη μορφή του Nullstellensatz θα χρειαστούμε το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.7 (Munshi)**.** *Έστω μια ακέραια περιοχή R για την οποία ισχύει πως η τομή των μη μηδενικών πρώτων ιδεωδών της είναι (0). Αν $\mathfrak{m}$ ένα μέγιστο ιδεώδες του $R[x_1,\dots,x_n]$, τότε*

$$\mathfrak{m}\cap R\neq(0).$$

Για την απόδειξη αυτού του Θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.8 (Kaplansky)**.** *Έστω R ακέραια περιοχή. Η τομή όλων των μη μηδενικών πρώτων ιδεωδών του $R[x]$ είναι μηδέν.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1. ($\Leftarrow$) Κάθε ιδεώδες της μορφής $\mathfrak{m}=(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ είναι προφανώς μέγιστο, αφού

$$k[x_1,\dots,x_n]/_{\mathfrak{m}}\cong k.$$

($\Rightarrow$) Για $n=1$: ο $k[x_1]$ είναι PID, άρα $\mathfrak{m}=(f)$ με f ανάγωγο από την Πρόταση 2.1.9. Αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό, το f είναι πρωτοβάθμιο, δηλαδή $\mathfrak{m}=(x_1-a_1)$.

Έστω $\mathfrak{m}$ ένα μέγιστο ιδεώδες του $k[x_1,\dots,x_n]$, όπου $n\geq 2$.

Θεωρούμε τον $k[x_1,\dots,x_n]$ ως $\big(k[x_1]\big)[x_2,\dots,x_n]$. Από το Θεώρημα του Kaplansky, ο $k[x_1]$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Θεωρήματος του Munshi, συνεπώς υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο $f\in\mathfrak{m}\cap k[x_1]$. Το f δεν είναι σταθερό, αφού αλλιώς θα ήταν αντιστρέψιμο και θα είχαμε $\mathfrak{m}=k[x_1,\dots,x_n]$. Εφόσον το k είναι αλγεβρικά κλειστό, το $f(x_1)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων. Όμως το $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο και συνεπώς πρώτο, άρα για κάποιο a_1: $(x_1-a_1)\in\mathfrak{m}$. Το ίδιο επιχείρημα δουλεύει για κάθε i και έτσι έχουμε:

$$(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)\subseteq\mathfrak{m}.$$

Όμως το $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$ είναι μέγιστο, και τελικά $\mathfrak{m}=(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$.

□

2.3 Το Θεώρημα του Kaplansky

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Kaplansky.

Ορισμός 2.3.1. *Μια ακέραια περιοχή R λέγεται **πεπερασμένου τύπου** (of finite type) αν το σώμα πηλίκων $K=\mathrm{Frac}(R)$ είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη R-άλγεβρα. Δηλαδή, αν υπάρχουν $k_1,\dots,k_n\in K$ τέτοια ώστε $\forall x\in K\ \exists f\in R[x_1,\dots,x_n]$:*

$$f(k_1,\dots,k_n)=x.$$

Λήμμα 2.3.2. *Αν ο R είναι πεπερασμένου τύπου, τότε το $K=\mathrm{Frac}(R)$ μπορεί να παραχθεί με ένα μόνο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K παράγεται από τα στοιχεία $k_1,\dots,k_n\in K$, όπου $k_i=\frac{a_i}{b_i}$ για κάθε i, με $a_i,b_i\in R$. Θέτω

$$s=\frac{1}{b_1\cdots b_n}\in K.$$

Παρατηρούμε ότι για $r_1=a_1\cdot b_2\cdots b_n$: $k_1=r_1\cdot s$. Όμοια και για τα υπόλοιπα k_i. □

Παρατήρηση 2.3.3. *Από το παραπάνω λήμμα μπορούμε να γράφουμε*

$$K=\mathrm{Frac}(R)=R\big[1/c\big]\qquad\text{για κάποιο } c\in R.$$

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $c\in R$ με $c\neq 0$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το c ανήκει στην τομή των μη μηδενικών πρώτων ιδεωδών του R.

(ii) Κάθε μη τετριμμένο ιδεώδες του R περιέχει κάποια δύναμη του c.

(iii) $K=\mathrm{Frac}(R)=R\big[1/c\big]$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $(0) \neq I \subsetneq R$ και έστω, προς άτοπο, ότι καμία δύναμη του c δεν ανήκει στο I. Έστω P ένα μεγιστικό ιδεώδες που περιέχει το I αλλά καμία δύναμη του c. Ένα τέτοιο P υπάρχει από το Λήμμα του Zorn.

Ισχυρισμός: Το P είναι πρώτο.

Πράγματι, αν $a \cdot b \in P$ και $a, b \notin P$, τότε τα (P, a) και (P, b) είναι γνήσια μεγαλύτερα από το P και άρα περιέχουν κάποια δύναμη του c. Τότε

$$c^n = p + ra \quad \text{και} \quad c^m = q + sb, \qquad \text{με } p, q \in P,\ r, s \in R.$$

Τότε όμως

$$c^{n+m} = p \cdot q + raq + psb + rs \cdot ab \in P,$$

άτοπο. Άρα το P είναι πρώτο και δεν περιέχει καμία δύναμη του c, άτοπο από το (i).

(ii)⇒(iii) Έστω $0 \neq b \in R$. Από την υπόθεση $\exists\, n\colon c^n \in (b) \Longrightarrow \exists\, r \in R\colon c^n = rb$

$$\Longrightarrow \frac{1}{b} = \frac{r}{c^n} \in R\big[1/c\big].$$

(iii)⇒(i) Έστω P πρώτο και $0 \neq b \in P$. Τότε $\frac{1}{b} = \frac{r}{c^n}$ για $r \in R$ και $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow c^n = r \cdot b \in P \Longrightarrow c \in P. \qquad \square$$

Λήμμα 2.3.5. *Έστω R PID. Ο R είναι πεπερασμένου τύπου αν και μόνο αν έχει πεπερασμένα το πλήθος πρώτα στοιχεία (μέχρι πολλαπλασιασμό με αντιστρέψιμα).*

Απόδειξη. Αφού ο R είναι PID, είναι και UFD.

(⇐) Αν ο R έχει πεπερασμένα το πλήθος ανάγωγα $p_1, \ldots, p_n$ (μέχρι πολλαπλασιασμό με αντιστρέψιμα), τότε θέτουμε $c = p_1 \cdots p_n$ και $K = R\big[1/c\big]$. Συνεπώς ο R είναι πεπερασμένου τύπου.

(⇒) Αν ο R είναι πεπερασμένου τύπου, τότε υπάρχει $c \in R$: $K = R\big[1/c\big]$. Έστω ένα $p \in R$ ανάγωγο. Τότε $p^{-1} \in K \setminus R$ και άρα $p^{-1} = f\big(\frac{1}{c}\big)$ για κάποιο $f(x) \in R[x]$:

$$\begin{aligned} p^{-1} &= f_0 + f_1\Big(\frac{1}{c}\Big) + \cdots + f_n\Big(\frac{1}{c}\Big)^n \\ &\Longrightarrow p^{-1} \cdot c^n = f_0 c^n + f_1 c^{n-1} + \cdots + f_n \\ &\Longrightarrow c^n = \big(f_0 c^n + f_1 c^{n-1} + \cdots + f_n\big)p \\ &\Longrightarrow p \mid c^n \Longrightarrow p \mid c \end{aligned}$$

Όμως το c γράφεται με μοναδικό τρόπο (μέχρι πολλαπλασιασμό με αντιστρέψιμα) ως γινόμενο πεπερασμένων το πλήθος αναγώγων.

$\square$

Λήμμα 2.3.6. *Έστω S ακέραια περιοχή τέτοια ώστε $R \subseteq S \subseteq K = \mathrm{Frac}(R)$. Αν ο R είναι πεπερασμένου τύπου, τότε και ο S είναι πεπερασμένου τύπου.*

Απόδειξη. $\mathrm{Frac}(R) = R\big[1/c\big] \subseteq S\big[1/c\big] \subseteq \mathrm{Frac}(R)$. $\square$

Λήμμα 2.3.7. *Ο δακτύλιος $K[x]$ έχει άπειρα πρώτα ιδεώδη.*

Απόδειξη. Ο $K[x]$ είναι PID και συνεπώς κάθε πρώτο ιδεώδες παράγεται από ένα ανάγωγο στοιχείο. Αν τώρα υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ανάγωγα $p_1, \ldots, p_n$, σχηματίζουμε το στοιχείο $1 + p_1 \cdots p_n$ και έχουμε άτοπο. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.8. Έστω $0 \neq c \in R[x]$ τέτοιο ώστε

$$c \in \bigcap_{\substack{P \text{ πρώτο} \\ P \neq (0)}} P.$$

Αν $L = \mathrm{Frac}(R[x])$, τότε $L = R[x]\big[\frac{1}{c}\big]$ και ο $R[x]$ είναι πεπερασμένου τύπου. Όμως $R[x] \subseteq K[x] \subseteq L$ και συνεπώς ο $K[x]$ είναι επίσης πεπερασμένου τύπου. Εφόσον ο $K[x]$ είναι και PID, έπεται ότι έχει πεπερασμένα το πλήθος ανάγωγα στοιχεία, άτοπο. $\square$

2.4 Το Θεώρημα του Munshi

Θεώρημα 2.4.1 (Munshi)**.** *Έστω μια ακέραια περιοχή R για την οποία ισχύει πως η τομή των μη μηδενικών πρώτων ιδεωδών της είναι (0). Αν $\mathfrak{m}$ ένα μέγιστο ιδεώδες του $R[x_1,\dots,x_n]$, τότε $\mathfrak{m}\cap R\neq(0)$.*

Απόδειξη. Για $n=1$, έστω ότι υπάρχει μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}\subseteq R[x]$: $\mathfrak{m}\cap R=(0)$. Έστω $f(x)=\alpha_0x^k+\cdots\in R[x]$ ένα πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού $\deg f=k$ στο $\mathfrak{m}$. Εφόσον $\mathfrak{m}\cap R=(0)$, έχουμε αναγκαστικά $k\geq 1$.

Από την υπόθεση, $\exists\, P\neq(0)$ πρώτο τέτοιο ώστε $\alpha_0\notin P$. Έστω $0\neq p\in P$. Αφού $p\in P\subseteq R$, το $p\notin\mathfrak{m}$ και συνεπώς $(\mathfrak{m},p)=R[x]$. Άρα

$$\forall s\in R\setminus P\quad \exists\, g_s(x)\in R[x]:\quad p\cdot g_s(x)+s\in\mathfrak{m}.$$

Εφόσον $s\notin P\supseteq(p)$, έχουμε $p\cdot g_s(x)+s\neq 0$. Επιλέγω g_s με τον ελάχιστο βαθμό, και

$$\deg\big(p\cdot g_s(x)+s\big)=\deg\big(g_s(x)\big)\geq k.$$

Επιλέγουμε $s_0\in R\setminus P$ το οποίο επιτυγχάνει τον ελάχιστο βαθμό για το $g_{s_0}(x)$. Γράφουμε

$$g_{s_0}(x)=b_0x^l+\cdots,\qquad b_0\neq 0,\ l\geq k.$$

Τα α_0 και s_0 ανήκουν στο $R\setminus P$ και άρα το α_0s_0 ανήκει επίσης στο $R\setminus P$. Θεωρούμε το στοιχείο

$$\alpha_0\big(p\cdot g_{s_0}(x)+s_0\big)-b_0\,p\,x^{l-k}f(x)=p\big[\alpha_0g_{s_0}(x)-b_0x^{l-k}f(x)\big]+\alpha_0\cdot s_0\in\mathfrak{m}.$$

Ο συντελεστής του x^l στο πολυώνυμο της αγκύλης είναι μηδέν, και συνεπώς ο βαθμός αυτού του πολυωνύμου είναι $\leq l-1$, και έχουμε άτοπο.

□

2.5 Δακτύλιοι Noether

Ορισμός 2.5.1. *Ένα πρότυπο λέγεται **της Noether** αν κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του είναι τελικά σταθερή.*

Ισοδύναμα, ένα πρότυπο είναι της Noether αν κάθε υποπρότυπό του είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Ορισμός 2.5.2. *Ένας μεταθετικός δακτύλιος λέγεται **της Noether** αν κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του είναι τελικά σταθερή.*

Ισοδύναμα, ένας δακτύλιος είναι της Noether αν κάθε ιδεώδες του είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Πρόταση 2.5.3. *Αν ο R είναι της Noether, κάθε πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο είναι επίσης της Noether.*

Θεώρημα 2.5.4 (Θεώρημα Βάσης του Hilbert)**.** *Αν ο R είναι της Noether, τότε και ο $R[x]$ είναι της Noether.*

Απόδειξη. Έστω ένα ιδεώδες $I\subseteq R[x]$. Ορίζουμε το ιδεώδες (άσκηση)

$$J=\big\{s\in R\;\big|\;\exists\, f(x)\in I:\ f(x)=s\,x^n+(\text{μικρότεροι όροι})\big\}.$$

Αφού ο R είναι της Noether, $\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in J$: $J=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Για κάθε i $\exists\, f_i\in I$: $f_i=\alpha_ix^{r_i}+(\text{μικρότεροι όροι})$. Θέτουμε

$$r=\max_{i=1,\dots,n}\{r_i\}\qquad\text{και}\qquad I'\coloneqq(f_1,\dots,f_n)\subseteq I.$$

Έστω $f=\alpha x^m+\cdots\in I\cdot$ τότε $\alpha\in J$. Αν $m\geq r$, τότε γράφουμε $\alpha=\sum s_i\alpha_i$, $s_i\in R$. Τότε

$$f-\sum_i s_if_ix^{m-r_i}\in I$$

και έχει βαθμό γνήσια μικρότερο από m. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε

$$f=g+h,\qquad\text{όπου }\deg g<r\text{ και }h\in I'.$$

Αν M το R-πρότυπο που παράγεται από τα $1,x,\dots,x^{r-1}$, τότε

$$I=(I\cap M)+I'.$$

Το M είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο και συνεπώς είναι της Noether. Το $I\cap M$ είναι λοιπόν πεπερασμένα παραγόμενο. Αν τώρα το $I\cap M$ παράγεται από τα $g_1,\dots,g_m$, τότε τα $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m$ παράγουν όλο το I. □

Πόρισμα 2.5.5. *Αν ο R είναι της Noether, τότε και ο $R[x_1,\dots,x_n]$ είναι της Noether. Ειδικότερα, κάθε ιδεώδες του $k[x_1,\dots,x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Άμεσο με επαγωγή στο n. □

2.6 Απόδειξη του Nullstellensatz

Θεώρημα 2.6.1 (Nullstellensatz)**.**

$$I(V(J)) = \sqrt{J}.$$

Απόδειξη. Έστω J ένα ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Θα δείξουμε ότι $I(V(J)) \subseteq \sqrt{J}$. Από το Πόρισμα 2.5.5 υπάρχουν $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$: $J = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.

Έστω $g \in I(V(J))$. Θεωρούμε τον δακτύλιο $k[x_1, \ldots, x_n, y]$ και το

$$J' = \langle f_1, \ldots, f_s,\, gy - 1 \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, y].$$

Αν $a \in V(J)$, τότε

$$f_1(a) = \cdots = f_s(a) = 0 \Longrightarrow g(a) = 0 \Longrightarrow (gy-1)(a, a_{n+1}) = 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

Άρα $V(J') = \emptyset$ και συνεπώς από το Πόρισμα 2.2.2 $J' = k[x_1, \ldots, x_n, y]$:

$$\exists\, h_1, \ldots, h_s, h_{s+1} \in k[x_1, \ldots, x_n, y] : \qquad 1 = h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s + h_{s+1}(gy - 1).$$

Έστω $z = y^{-1}$ (στο fraction field). Τα h_i είναι πολυώνυμα πάνω στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n, z^{-1}$, και επιπλέον

$$h_{s+1}(g \cdot y - 1) = z^{-1} h_{s+1}(g - z).$$

Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη δύναμη του z παίρνουμε

$$z^N = h_1' f_1 + \cdots + h_s' f_s + h_{s+1}'(g - z)$$

για κάποια $h_i' \in k[x_1, \ldots, x_n, z]$. Θέτοντας $z = g$ παίρνουμε

$$g^N = h_1' f_1 + \cdots + h_s' f_s + 0 \in J.$$

Αντίστροφα, αν $g \in \sqrt{J} \Longrightarrow g^N \in J \Longrightarrow \forall a \in V(J)$: $g^N(a) = 0$. Αφού

$$I(V(J)) = \{f : f(a) = 0 \ \ \forall a \in V(J)\},$$

έχουμε $g^N \in I(V(J))$ και από το Λήμμα 1.3.3(ii) $g \in I(V(J))$. □

Τέλος, θέλουμε να δείξουμε ότι αν $X = V(J)$,

$$V(I(X)) = V(I(V(J))) = V(\sqrt{J}) = V(J) = X$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 1.2.8(i).

Άσκηση 2.6.2. *Έστω ένα affine variety X, να δείξετε ότι $V(I(X)) = X$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε το Nullstellensatz.*

Κεφάλαιο 3

Δακτύλιος συντεταγμένων και τοπολογία Zariski

3.1 Πολυωνυμικές συναρτήσεις και δακτύλιος συντεταγμένων

Αν πάρουμε δύο πολυώνυμα $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ τα οποία ορίζουν την ίδια συνάρτηση στον $\mathbb{A}^n$, δηλαδή $f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in \mathbb{A}^n$, τότε

$$f - g \in I(\mathbb{A}^n) = I(V(0)) = \sqrt{(0)} = (0),$$

και συνεπώς $f = g$ ως πολυώνυμα, ως στοιχεία δηλαδή του $k[x_1, \ldots, x_n]$. Μπορούμε λοιπόν να σκεφτόμαστε τον δακτύλιο πολυωνύμων ως συναρτήσεις στον $\mathbb{A}^n$.

Το ανάλογο ισχύει και για οποιοδήποτε affine variety. Πράγματι, αν X affine variety και $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ με $f(a) = g(a)$ για κάθε $a \in X$, τότε $f - g \in I(X)$, και το πηλίκο

$$k[x_1, \ldots, x_n] \Big/ I(X)$$

συμπεριφέρεται σαν συναρτήσεις στο X.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω affine variety $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Μια **πολυωνυμική απεικόνιση** στο X είναι μια απεικόνιση*

$$X \longrightarrow k, \qquad a \longmapsto f(a),$$

για κάποιο $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Από τα προηγούμενα, ο δακτύλιος των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο X είναι το πηλίκο

$$A(X) = k[x_1, \ldots, x_n] \Big/ I(X),$$

*και λέγεται **δακτύλιος συντεταγμένων (coordinate ring)** του X.*

Ορισμός 3.1.2. *Έστω $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ ένα affine variety.*

(i) Αν $S \subseteq A(Y)$, ορίζουμε τα σημεία μηδενισμού

$$V(S) := V_Y(S) := \{a \in Y : f(a) = 0 \ \ \forall f \in S\} \subseteq Y.$$

*Αυτά λέγονται **affine subvarieties** του Y.*

(ii) Αν X υποσύνολο του Y, το ιδεώδες του X είναι

$$I(X) := I_Y(X) := \{f \in A(Y) : f(a) = 0 \ \ \forall a \in X\} \subseteq A(Y).$$

Παρατήρηση 3.1.3. *Έστω Y ένα affine variety και X ένα affine subvariety του Y.*

(i) $A(X) \cong A(Y) \Big/ I_Y(X)$.

(ii) $V_Y(I_Y(X)) = X$, *και αν J ιδεώδες του $A(Y)$, τότε* $I_Y(V_Y(J)) = \sqrt{J}$.

Έχουμε λοιπόν μια αντιστοιχία

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{affine subvarieties} \\ \textit{του } Y \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{ριζικά ιδεώδη} \\ \textit{του } A(Y) \end{array} \right\}.$$

Όποτε είναι σαφές ότι μιλάμε για ένα subvariety X ενός affine variety Y θα συμβολίζουμε το ιδεώδες του απλά ως $I(X)$ αντί για $I_Y(X)$.

Παράδειγμα 3.1.4. *Θα υπολογίσουμε το ριζικό του*

$$J = (x^3 - y^6,\ xy - y^3) \subseteq \mathbb{C}[x, y].$$

Από το Nullstellensatz, $\sqrt{J} = I(V(J))$. *Υπολογίζουμε πρώτα το* $V(J)$*:*

$$xy - y^3 = 0 \iff (x - y^2)\, y = 0 \iff y = 0 \textit{ ή } x = y^2.$$

- *Αν* $y = 0$*:* $x^3 - y^6 = 0 \Longrightarrow x = 0$.
- *Αν* $x = y^2$*: τότε* $x^3 - y^6 = 0$.

Άρα $V(J) = V(x - y^2)$ *(το* $(0, 0)$ *ανήκει ήδη στην παραβολή). Όμως*

$$\mathbb{C}[x, y] \Big/ (x - y^2) \cong \mathbb{C}[x],$$

δηλαδή το $(x - y^2)$ *είναι πρώτο, και άρα το* $(x - y^2)$ *είναι ριζικό. Επομένως*

$$\sqrt{J} = I(V(J)) = I(V(x - y^2)) = (x - y^2).$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.5. *Βρείτε το ριζικό του ιδεώδους*

$$J = \big(x^2(y - x^2),\ (y - 1)(y - x^2)\big)$$

και δείξτε ότι δεν είναι πρώτο.

Άσκηση 3.1.6. *Αποδείξτε ότι ο coordinate ring* $A(X)$ *ενός affine variety* X *είναι σώμα αν και μόνο αν το* X *είναι μονοσύνολο.*

Άσκηση 3.1.7. *Επαληθεύστε ότι οι ιδιότητες που αποδείξαμε για τα* $V(\cdot)$ *και* $I(\cdot)$ *ισχύουν και για τα* $V_Y(\cdot)$ *και* $I_Y(\cdot)$.

Άσκηση 3.1.8. *Αποδείξτε την Παρατήρηση 3.1.3.*

3.2 Η τοπολογία Zariski

Μια **τοπολογία** σε ένα σύνολο X αποτελείται από μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τα μέλη της οποίας ονομάζουμε **κλειστά**, και έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Το $\emptyset$ και ο χώρος X είναι κλειστά.

(ii) Τομές κλειστών είναι κλειστό (και άπειρες).

(iii) Πεπερασμένες ενώσεις κλειστών είναι κλειστό.

Σε μια τοπολογία, ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ λέγεται **ανοιχτό** αν το $X \setminus U$ είναι κλειστό.

Η **κλειστή θήκη** ενός υποσυνόλου $A \subseteq X$ είναι η τομή όλων των κλειστών που το περιέχουν, ή ισοδύναμα το μικρότερο κλειστό που το περιέχει.

Μια απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων λέγεται **συνεχής** αν αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά, ή ισοδύναμα ανοιχτά σε ανοιχτά, δηλαδή η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού είναι κλειστό.

Τέλος, αν $A \subseteq X$, μια τοπολογία στον X επάγει μια τοπολογία στον A, όπου τα κλειστά του A είναι τα $Y \cap A$, όπου Y κλειστό του X. Αν ο A είναι κλειστό υποσύνολο του X, τότε τα κλειστά του A είναι ακριβώς τα κλειστά του X που περιέχονται στο A, και όμοια για τα ανοιχτά.

Ορισμός 3.2.1 (Η τοπολογία Zariski)**.** *Έστω X ένα affine variety. Ορίζουμε την **τοπολογία Zariski** στο X, της οποίας τα κλειστά είναι τα υποσύνολα $V(S) \subseteq X$ για κάποιο $S \subseteq A(X)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η τοπολογία Zariski είναι πράγματι μια τοπολογία.

(i) $\emptyset = V_X(1)$ και $X = V_X(0)$.

(ii) Θα δείξουμε ότι $\bigcap_i V_X(S_i) = V_X\big(\bigcup_i S_i\big)$:

$$\begin{aligned} a \in \bigcap_i V_X(S_i) &\iff \forall i \ \forall f \in S_i : \ f(a) = 0 \\ &\iff f(a) = 0 \ \forall f \in \textstyle\bigcup_i S_i \\ &\iff a \in V_X\big(\textstyle\bigcup_i S_i\big). \end{aligned}$$

(iii) Θα δείξουμε ότι $V_X(S_1) \cup V_X(S_2) = V_X(S_1 \cdot S_2)$:

$$\begin{aligned} a \notin V_X(S_1) \cup V_X(S_2) &\iff \exists f \in S_1 : \ f(a) \neq 0 \text{ και } \exists g \in S_2 : \ g(a) \neq 0 \\ &\iff \exists f \in S_1 \text{ και } \exists g \in S_2 : \ (f \cdot g)(a) \neq 0 \\ &\iff a \notin V_X(S_1 \cdot S_2). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.2.2. *Η τοπολογία όπως την ορίσαμε σε ένα affine variety είναι ακριβώς η επαγόμενη τοπολογία υποχώρου από τον αφινικό χώρο, $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Αυτό προκύπτει αφού κάθε affine variety είναι κλειστό στον $\mathbb{A}^n$.*

Παράδειγμα 3.2.3. *Η μοναδιαία μπάλα*

$$\{x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} : |x| \leq 1\}$$

δεν είναι κλειστό με την τοπολογία Zariski (είχαμε δει ότι τα κλειστά του $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ είναι πεπερασμένα).

Αντίστροφα όμως, κάθε κλειστό της τοπολογίας Zariski είναι κλειστό στη συνήθη τοπολογία, αφού τα πολυώνυμα είναι συνεχή (με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{C}$).

Διαισθητικά λοιπόν, τα κλειστά της Zariski είναι πολύ «μικρά» και κατά συνέπεια τα ανοιχτά της πολύ «μεγάλα».

Άσκηση 3.2.4. *Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ μια 1-1 απεικόνιση, τότε είναι συνεχής ως προς την τοπολογία Zariski.*

Παρατήρηση 3.2.5 (Τοπολογία γινόμενο)**.** *Στην τοπολογία υπάρχει η έννοια της τοπολογίας γινόμενο. Αν X και Y τοπολογικοί χώροι, τότε τα ανοιχτά στον $X \times Y$ είναι τα σύνολα της μορφής*

$$\bigcup_i U_i \times V_i, \qquad \text{όπου } U_i \text{ ανοιχτό στον } X \text{ και } V_i \text{ ανοιχτό στον } Y.$$

Αυτή η κατασκευή δεν συμφωνεί με την τοπολογία Zariski. Για παράδειγμα, το

$$V(x - y) = \{(a, a) : a \in \mathbb{A}^1\} \subseteq \mathbb{A}^2$$

είναι κλειστό στην τοπολογία Zariski του $\mathbb{A}^2$, αλλά όχι στην τοπολογία γινόμενο $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Πράγματι, αν U, V ανοιχτά του $\mathbb{A}^1$, τότε $U = \mathbb{A}^1 \setminus F_1$ και $V = \mathbb{A}^1 \setminus F_2$, όπου F_1, F_2 πεπερασμένα, άρα

$$U \cap V = \mathbb{A}^1 \setminus (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset.$$

Αν $a \in U \cap V$, τότε $(a, a) \in (U \times V) \cap V(x - y)$. Αν το $V(x - y)$ είναι κλειστό με την τοπολογία γινόμενο, τότε το $W = \mathbb{A}^2 \setminus V(x-y)$ είναι ανοιχτό και μη κενό, άρα περιέχει κάποιο ανοιχτό της μορφής $U \times V$ και $(U \times V) \cap V(x-y) = \emptyset$, άτοπο!

Αν λοιπόν έχουμε δύο affine varieties $X = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ και $Y = V(T) \subseteq \mathbb{A}^m$, με $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ και $T \subseteq k[y_1, \ldots, y_m]$, ταυτίζουμε το $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ με το $\mathbb{A}^{n+m}$ και θεωρούμε τα S, T ως υποσύνολα του $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Τότε

$$X \times Y = V(S \cup T) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}.$$

Επομένως το $X \times Y$ είναι affine variety στον $\mathbb{A}^{n+m}$, και η τοπολογία με την οποία εφοδιάζουμε τον $X \times Y$ είναι η τοπολογία Zariski αυτού του affine variety. Από εδώ και στο εξής όποτε αναφερόμαστε στο γινόμενο δύο affine varieties θα το θεωρούμε με αυτή την τοπολογία.

3.3 Irreducible και connected χώροι

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος.*

*(i) Λέμε ότι ο X είναι **reducible** αν υπάρχουν γνήσια κλειστά $X_1, X_2 \subsetneq X$ με $X = X_1 \cup X_2$. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι ο X είναι **irreducible**.*

*(ii) Λέμε ότι ο X είναι **disconnected** αν υπάρχουν γνήσια κλειστά $X_1, X_2 \subsetneq X$ με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ και $X = X_1 \cup X_2$. Στην αντίθετη περίπτωση ο X λέγεται **connected**.*

Παρατήρηση 3.3.2. *Με τη συνήθη τοπολογία ο $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ είναι reducible, αφού*

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \{a \in \mathbb{C} : |a| \leq 1\} \cup \{a \in \mathbb{C} : |a| \geq 1\}.$$

Με την τοπολογία Zariski όμως είναι irreducible.

Άσκηση 3.3.3. *Αποδείξτε ότι ο $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ είναι irreducible με την τοπολογία Zariski.*

Πρόταση 3.3.4. *Έστω X disconnected affine variety: $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Τότε*

$$A(X) \cong A(X_1) \times A(X_2).$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$I(X_1) \cap I(X_2) = I(X_1 \cup X_2) = I(X) = (0)$$

και

$$\sqrt{I(X_1) + I(X_2)} = I(X_1 \cap X_2) = I(\emptyset) = (1) \implies I(X_1) + I(X_2) = (1).$$

Το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων μας δίνει

$$A(X) \cong A(X) \Big/ I(X_1) \times A(X) \Big/ I(X_2)$$

□

Πρόταση 3.3.5. *Ένα affine variety $X \neq \emptyset$ είναι irreducible αν και μόνο αν ο $A(X)$ είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη.

- ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο $A(X)$ δεν είναι ακέραια περιοχή. Τότε υπάρχουν μη μηδενικά $f_1, f_2 \in A(X)$ με $f_1 \cdot f_2 = 0$. Τα $X_1 = V(f_1)$ και $X_2 = V(f_2)$ είναι κλειστά, γνήσια υποσύνολα του X, και

  $$X_1 \cup X_2 = V(f_1) \cup V(f_2) = V(f_1 \cdot f_2) = V(0) = X.$$

  Άρα το X είναι reducible.

- ($\Leftarrow$) Έστω ότι το X είναι reducible. Τότε υπάρχουν κλειστά $X_1, X_2 \subsetneq X$ με $X = X_1 \cup X_2$, οπότε

  $$I(X_1) \neq (0) \quad \text{και} \quad I(X_2) \neq (0).$$

  Έστω $0 \neq f_1 \in I(X_1) \subseteq A(X)$ και $0 \neq f_2 \in I(X_2) \subseteq A(X)$. Το $f_1 \cdot f_2$ ανήκει στο $I(X_1 \cup X_2) = I(X)$, αλλά $f_1, f_2 \notin I(X_1 \cup X_2)$.

□

Παρατήρηση 3.3.6. *Έχουμε μια 1-1 αντιστοιχία*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{μη κενά irreducible} \\ \text{affine varieties του } Y \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{πρώτα ιδεώδη} \\ \text{του } A(Y) \end{array} \right\}.$$

Πράγματι, από την Πρόταση 3.3.5 ένα subvariety $X \subseteq Y$ είναι irreducible $\iff$ $A(X) \cong A(Y)/I_Y(X)$ ακέραια περιοχή $\iff$ το $I_Y(X)$ είναι πρώτο.

Παραδείγματα 3.3.7. *(i) Ένα πεπερασμένο affine variety είναι irreducible αν και μόνο αν είναι connected, αν δηλαδή έχει μόνο ένα σημείο.*

(ii) Κάθε irreducible είναι connected.

(iii) Ο αφινικός χώρος $\mathbb{A}^n$ είναι πάντα irreducible, αφού ο coordinate ring του είναι ο $k[x_1, \ldots, x_n]$, ο οποίος είναι ακέραια περιοχή.

(iv) Ο $X = V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2$ δεν είναι irreducible, αφού είναι ίσος με την ένωση των $V(x)$ και $V(y)$. Τα $V(x)$ και $V(y)$ όμως είναι και τα δύο irreducible.

3.4 Τοπολογικοί χώροι της Noether και irreducible συνιστώσες

Φυσιολογικά μπορεί κανείς να σκεφτεί λοιπόν ότι κάθε affine variety αποτελείται από πεπερασμένα irreducible κομμάτια. Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως την ιδιότητα αυτή την έχει μια μεγαλύτερη κλάση τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 3.4.1. *Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται **της Noether** αν δεν υπάρχει (άπειρη) γνήσια φθίνουσα αλυσίδα κλειστών υποσυνόλων του*

$$X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \cdots .$$

Πρόταση 3.4.2. *Κάθε affine variety είναι τοπολογικός χώρος της Noether.*

Απόδειξη. Έστω affine variety X και έστω μια άπειρη ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του

$$X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \cdots .$$

Τότε έχουμε μια αύξουσα ακολουθία ιδεωδών

$$I(X_1) \subseteq I(X_2) \subseteq \cdots .$$

Όμως αυτή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα από το (σχετικό) Nullstellensatz. Τέτοια ακολουθία όμως δεν υπάρχει, αφού ο $A(X)$ είναι δακτύλιος της Noether, ως πηλίκο του $k[x_1, \ldots, x_n]$, και έχουμε άτοπο. Άρα ο X είναι τοπολογικός χώρος της Noether. □

Λήμμα 3.4.3. *Αν X τοπολογικός χώρος της Noether και $A \subseteq X$, τότε ο A είναι τοπολογικός χώρος της Noether (με την επαγόμενη τοπολογία).*

Απόδειξη. Έστω ότι ο A δεν είναι της Noether. Τότε υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία

$$A \cap X_0 \supsetneq A \cap X_1 \supsetneq A \cap X_2 \supsetneq \cdots ,$$

όπου $X_0, X_1, X_2, \ldots$ κλειστά υποσύνολα του X. Τότε όμως

$$X_0 \supseteq X_0 \cap X_1 \supseteq X_0 \cap X_1 \cap X_2 \supseteq \cdots .$$

Επιπλέον η ακολουθία αυτή είναι γνήσια, αφού αν $X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_k = X_0 \cap X_1 \cap \cdots \cap X_{k+1}$, τότε

$$\begin{aligned} &\implies A \cap (X_0 \cap \cdots \cap X_k) = A \cap (X_0 \cap \cdots \cap X_{k+1}) \\ &\implies A \cap X_k = A \cap X_{k+1}, \end{aligned}$$

που δεν ισχύει. Ο X όμως είναι τοπολογικός χώρος της Noether και έχουμε άτοπο. □

Πρόταση 3.4.4. *Κάθε τοπολογικός χώρος της Noether X μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση irreducible κλειστών υποσυνόλων του, δηλαδή*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad \textit{όπου τα } X_i \textit{ είναι irreducible κλειστά.}$$

*Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $X_i \not\subseteq X_j$ για κάθε $i \neq j$, τότε τα $X_1, \ldots, X_k$ είναι μοναδικά και λέγονται οι **irreducible συνιστώσες** του X.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει reducible τοπολογικός χώρος της Noether X που δεν μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση από irreducible. Αφού είναι reducible, υπάρχουν $Y, Z \subsetneq X$ κλειστά με

$$X = Y \cup Z.$$

Τώρα η πρόταση πρέπει να αποτυγχάνει για τουλάχιστον ένα από τα Y, Z. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, φτιάχνουμε μια άπειρη, γνησίως φθίνουσα ακολουθία από κλειστά υποσύνολα, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα. Έστω ότι

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k = X_1' \cup \cdots \cup X_r',$$

όπου X_i, X_i' irreducible κλειστά υποσύνολα του X. Τότε για κάθε i έχουμε

$$X_i \subseteq X_1' \cup \cdots \cup X_r' \implies X_i = \bigcup_j (X_i \cap X_j').$$

Όμως το X_i είναι irreducible και άρα για κάποιο j: $X_i = X_i \cap X'_j \subseteq X'_j$. Όμοια για το j, υπάρχει ℓ με $X'_j = X_\ell \cap X'_j \subseteq X_\ell$. Και τελικά

$$X_i \subseteq X'_j \subseteq X_\ell,$$

όμως από την υπόθεση $X_i \not\subseteq X_j$ για κάθε $i \neq j$ έπεται ότι $i = \ell$, και

$$X_i = X'_j.$$

Όμοια και για τις άλλες συνιστώσες. □

Πόρισμα 3.4.5. *Κάθε affine variety X μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση irreducible affine varieties, δηλαδή*

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k, \quad \text{όπου τα } X_i \text{ είναι irreducible affine varieties}.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $X_i \not\subseteq X_j$ για κάθε $i \neq j$, τότε τα $X_1, \ldots, X_k$ είναι μοναδικά.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.4.2 και την Πρόταση 3.4.4. □

Παρατήρηση 3.4.6. *Έστω ένα affine variety X. Αν γνωρίζουμε την primary decomposition του $I(X) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$, τότε έχουμε*

$$X = V(I(X)) = V(Q_1) \cup \cdots \cup V(Q_r) = V\big(\sqrt{Q_1}\big) \cup \cdots \cup V\big(\sqrt{Q_r}\big).$$

Τα $\sqrt{Q_i}$ είναι πρώτα και συνεπώς τα $V(\sqrt{Q_i})$ είναι irreducible.

Παρατήρηση 3.4.7. *Έχουμε ήδη δει ότι τα ανοιχτά στην τοπολογία Zariski είναι πολύ μεγάλα. Αν X είναι irreducible affine variety και U, V δύο μη κενά ανοιχτά του, τότε:*

α. $U \cap V \neq \emptyset$. Πράγματι, αν ήταν το κενό θα είχαμε $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$, το οποίο είναι άτοπο αφού το X είναι irreducible.

β. $\overline{U} = X$, όπου $\overline{U}$ η κλειστή θήκη. Με άλλα λόγια κάθε μη κενό ανοιχτό είναι πυκνό στον χώρο. Πράγματι, αν $Y \subseteq X$ κλειστό με $U \subseteq Y$, τότε $X = Y \cup (X \setminus U)$. Αλλά το X είναι irreducible και συνεπώς είτε $X \setminus U = X$ είτε $Y = X$. Το πρώτο αποκλείεται αφού $U \neq \emptyset$.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.8. *Αν X υποσύνολο του $\mathbb{A}^n$, δείξτε ότι $V(I(X)) = \overline{X}$.*

Άσκηση 3.4.9. *Αν A υποσύνολο ενός affine variety X, τότε $I_X(A) = I_X(\overline{A})$.*

Άσκηση 3.4.10. *Αν X irreducible τοπολογικός υπόχωρος του Y, τότε και ο $\overline{X}$ είναι irreducible.*

Άσκηση 3.4.11. *Αν X irreducible τοπολογικός χώρος και $U \neq \emptyset$ ένα ανοιχτό του X, δείξτε ότι το U είναι irreducible.*

Άσκηση 3.4.12. *Αν J_1 και J_2 ιδεώδη ενός δακτυλίου R, ορίζουμε*

$$J_1 : J_2 = \{f \in R \mid f \cdot J_2 \subseteq J_1\}.$$

(i) Αν X_1, X_2 subvarieties του affine variety Y, τότε

$$I(X_1 \setminus X_2) = I(X_1) : I(X_2) \subseteq A(Y).$$

(ii) Αν J_1, J_2 ριζικά ιδεώδη του $A(Y)$, τότε

$$\overline{V(J_1) \setminus V(J_2)} = V(J_1 : J_2).$$

Παράδειγμα 3.4.13. *Έστω $X = \mathbb{A}^2$, $Y_1 = V(xy)$, $Y_2 = V(x)$. Έχουμε:*

- $Y_1 \setminus Y_2 = V(y) \setminus \{(0,0)\}$.
- $\overline{Y_1 \setminus Y_2} = V(y)$.
- $(xy) : (x) = \{f : f \cdot x \in (xy)\} = (y)$.
- $I(V(y)) = (y)$.

Από την άλλη, αν θεωρήσουμε τα ιδεώδη $J_1 = (x^2)$ (το οποίο δεν είναι ριζικό) και $J_2 = (x)$ του $k[x]$:

- $V(J_1) \setminus V(J_2) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$,
- $J_1 : J_2 = \{f : f \cdot x \in (x^2)\} = (x)$,
- $V(J_1 : J_2) = \{0\} \neq \emptyset$,

οπότε

$$V(J_1) \setminus V(J_2) \neq V(J_1 : J_2).$$

Συνεπώς στην Άσκηση 3.4.12(ii) η υπόθεση ότι το J_1 είναι ριζικό είναι απαραίτητη.

3.5 Διάσταση

Η βασική ιδέα για τον ορισμό της διάστασης που θα δώσουμε είναι ότι κάθε irreducible γνήσιο κλειστό υποσύνολο ενός irreducible affine variety X έχει γνήσια μικρότερη διάσταση.

Ορισμός 3.5.1. *Έστω $X \neq \emptyset$ ένας τοπολογικός χώρος.*

*(i) Η **διάσταση** $\dim X$ του X ορίζεται ως το supremum όλων των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους υπάρχει ακολουθία*

$$\emptyset \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq X,$$

όπου τα Y_i είναι irreducible κλειστά υποσύνολα του X.

*(ii) Αν το Y είναι μη κενό irreducible κλειστό υποσύνολο του X, τότε ορίζουμε τη **συνδιάσταση** $\operatorname{codim}_X Y$ του Y ως το supremum των $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχει ακολουθία*

$$Y \subseteq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n \subseteq X,$$

όπου τα Y_i είναι irreducible κλειστά υποσύνολα του X.

Παράδειγμα 3.5.2. *Η διάσταση του $\mathbb{A}^1$ είναι $\dim \mathbb{A}^1 = 1$, αφού οι μέγιστες ακολουθίες που μπορούν να σχηματιστούν είναι ακριβώς οι*

$$\{a\} \subsetneq \mathbb{A}^1, \qquad a \in \mathbb{A}^1.$$

Η συνδιάσταση του $\{a\}$ είναι $\operatorname{codim}\{a\} = 1$.

Παρατήρηση 3.5.3. *Ένας τοπολογικός χώρος X της Noether μπορεί να έχει άπειρη διάσταση. Πράγματι, στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε τοπολογία με κλειστά τα*

$$\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$$

καθώς και τα $\emptyset$ και $\mathbb{N}$. Αυτός ο χώρος είναι της Noether αλλά έχει άπειρη διάσταση.

Ορισμός 3.5.4. *Έστω R δακτύλιος. Ορίζουμε τη **διάσταση Krull** του R ως το supremum των $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχει ακολουθία*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq R$$

από πρώτα ιδεώδη.

*Και ορίζουμε το **height** ενός πρώτου ιδεώδους $\mathfrak{p} \subseteq R$ ως το supremum των $n \in \mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχει ακολουθία*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}$$

από πρώτα ιδεώδη.

Παραδείγματα 3.5.5. *(i) Τα σώματα έχουν διάσταση Krull μηδέν.*

(ii) Αν R Noether, τότε $\dim R = 0 \iff R$ Artin.

(iii) Έστω R PID που δεν είναι σώμα. Τότε κάθε πρώτο ιδεώδες, εκτός από το (0), είναι και μέγιστο, άρα $\dim R = 1$ ($\dim \mathbb{Z} = 1$, $\dim k[x] = 1$*).*

Παρατήρηση 3.5.6. *Αν X irreducible affine variety, τότε*

$$\dim A(X) = \operatorname{tr.deg}_k \operatorname{Frac}(A(X)).$$

Λήμμα 3.5.7. *Έστω Y affine variety και $X \neq \emptyset$ irreducible affine subvariety.*

(i) Η διάσταση του Y είναι ίση με τη διάσταση Krull του $A(Y)$.

(ii) Η συνδιάσταση του X στον Y είναι ίση με το height του $I(X) \subseteq A(Y)$.

Απόδειξη. Αρκεί να θυμηθούμε ότι έχουμε μια 1-1 αντιστοιχία

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{μη κενά irreducible} \\ \text{affine subvarieties του } Y \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{πρώτα ιδεώδη} \\ \text{του } A(Y) \end{array} \right\}.$$

(Παρατήρηση 3.3.6), και συνεπώς κάθε ακολουθία

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$$

αντιστοιχεί σε ακολουθία

$$I(X_0) \supsetneq I(X_1) \supsetneq \cdots \supsetneq I(X_n).$$

□

Παράδειγμα 3.5.8. *Έστω $X = V(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Έχουμε*

- $A(X) \cong \mathbb{C}[x, y]/(y - x^2) \cong \mathbb{C}[x]$*, άρα το X είναι irreducible.*
- $\dim X = 1$*, αφού ο $\mathbb{C}[x]$ είναι PID και άρα έχει διάσταση Krull* $\dim \mathbb{C}[x] = 1$.

Πρόταση 3.5.9. *Έστω $X, Y \neq \emptyset$ irreducible affine varieties.*

(i) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

(ii) Αν $X \subseteq Y$, τότε $\dim Y = \dim X + \operatorname{codim}_Y X$.

(iii) Αν $0 \neq f \in A(X)$, κάθε μη κενή irreducible συνιστώσα του $V(f)$ έχει συνδιάσταση ίση με 1 μέσα στον X.

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Πρόταση 3.5.10. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, όπου τα $X_i \neq \emptyset$ είναι κλειστά υποσύνολα του X. Τότε*

$$\dim X = \max\{\dim X_1, \ldots, \dim X_r\}.$$

Ειδικότερα, η διάσταση ενός μη κενού affine variety είναι το μέγιστο των διαστάσεων των irreducible συνιστωσών του.

Απόδειξη. Αν $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n$ είναι αλυσίδα από irreducible κλειστά υποσύνολα του X_i, τότε τα A_j είναι κλειστά και στο X, αφού το X_i είναι κλειστό. Άρα είναι αλυσίδα κλειστών και στο X, έπεται ότι $\dim X \geq \dim X_i$.

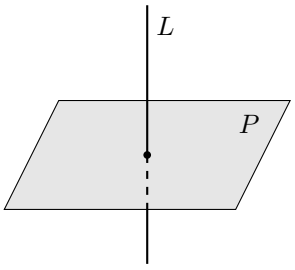
Αντίστροφα τώρα, έστω $A_0 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n$ αλυσίδα από irreducible κλειστά υποσύνολα του X. Τότε

$$A_n = (A_n \cap X_1) \cup \cdots \cup (A_n \cap X_r)$$

είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών υποσυνόλων του A_n. Εφόσον το A_n είναι irreducible, έχουμε $A_n = A_n \cap X_i$, δηλαδή $A_n \subseteq X_i$, για κάποιο i. Τότε όλη η αλυσίδα περιέχεται στο X_i και αποτελείται από irreducible κλειστά υποσύνολα του, άρα $\dim X_i \geq n$. □

Παραδείγματα 3.5.11. *(i) Έστω $X = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{A}^4$. Το πολυώνυμο $xy - zw \in k[x, y, z, w]$ είναι ανάγωγο και από την Πρόταση 3.5.9 έπεται* $\operatorname{codim}_{\mathbb{A}^4} X = 1$ *και* $\dim X = 3$.

(ii) Έστω $X = V(xz, yz) \subseteq \mathbb{A}^3$. Έχουμε $xz = yz = 0 \iff z = 0$ ή $x = y = 0$, άρα $X = P \cup L$, όπου $P = V(z)$, $L = V(x, y)$, και $P \cap L = \{0\}$.



Το X λοιπόν είναι reducible με irreducible συνιστώσες τα P και L. Το X είναι connected αλλά όχι irreducible, και συνεπώς ο $A(X)$ δεν είναι ακέραια περιοχή. Η διάσταση του είναι $\dim X = \max\{\dim P, \dim L\} = 2$.

Παρατήρηση 3.5.12. *Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση* $\dim Y \geq \dim X + \operatorname{codim}_Y X$*, ισχύει για κάθε τοπολογικό χώρο Y και irreducible κλειστό υπόχωρο X. Πράγματι, παίρνοντας δύο μεγιστικές αλυσίδες μπορούμε να φτιάξουμε μια αλυσίδα από irreducible κλειστά του Y με μήκος* $\dim X + \operatorname{codim}_Y X$*. Στο (ii) του παραπάνω παραδείγματος βλέπουμε μια περίπτωση που η ισότητα χαλάει διότι ο $V(xz, yz)$ δεν είναι irreducible.*

Παράδειγμα 3.5.13. *Έστω $X = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Το $y^2 - x^3$ είναι irreducible αφού*

$$\mathbb{C}[x, y] \Big/ (y^2 - x^3) \cong \mathbb{C}[t^2, t^3] \subseteq \mathbb{C}[t],$$

που είναι ακέραια περιοχή.

Ο $A(X) \cong \mathbb{C}[t^2, t^3]$ δεν είναι PID (ούτε καν UFD: $t^6 = (t^2)^3 = (t^3)^2$), οπότε για τη διάσταση δεν δουλεύει το επιχείρημα του Παραδείγματος 3.5.8 για το $V(y - x^2)$. Από την Πρόταση 3.5.9(iii), $\dim X = 1$.

Ορισμός 3.5.14. *Έστω ένα irreducible affine variety X.*

- *Αν* $\dim X = 1$*, το X λέγεται καμπύλη.*
- *Αν* $\dim X = 2$*, το X λέγεται επιφάνεια.*

Ασκήσεις

Άσκηση 3.5.15. *Δείξτε ότι το (i) της Πρότασης 3.5.9 ισχύει και χωρίς την υπόθεση irreducible.*

Άσκηση 3.5.16. *Δείξτε ότι τα (ii) και (iii) της Πρότασης 3.5.9 αποτυγχάνουν χωρίς την υπόθεση irreducible. (Χρησιμοποιήστε το (ii) από το Παράδειγμα 3.5.11)*

Κεφάλαιο 4

Regular συναρτήσεις

4.1 Ορισμός και πρώτες ιδιότητες

Θέλουμε τώρα να ορίσουμε τις συναρτήσεις που θα έχουμε μεταξύ των affine varieties. Πρώτα θα ορίσουμε τις συναρτήσεις από ένα affine variety στο $\mathbb{A}^1$.

Οι συναρτήσεις αυτές θα είναι το ανάλογο των διαφορίσιμων απεικονίσεων στην πραγματική ανάλυση ή των ολόμορφων στη μιγαδική.

Οι διαφορίσιμες και οι ολόμορφες απεικονίσεις μπορούν να οριστούν και σε ανοιχτά υποσύνολα, σε αντίθεση με τον coordinate ring, του οποίου οι απεικονίσεις ορίζονται σε ολόκληρο το affine variety. Με αυτή την ιδέα μπορούμε να θεωρήσουμε συναρτήσεις της μορφής f/g στο $X \setminus V(g)$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε απεικονίσεις της μορφής f/g με $f, g \in A(X)$, $g \neq 0$.

Μια ακόμα ιδιότητα που έχουν οι διαφορίσιμες και οι ολόμορφες συναρτήσεις είναι η τοπικότητά τους, ότι δηλαδή μπορεί να ελεγχθεί η διαφορισιμότητά τους ή η ολομορφία τους σε κάθε σημείο ξεχωριστά. Οι παραπάνω ιδέες λοιπόν μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.1. *Έστω X affine variety και U ένα ανοιχτό υποσύνολο του X. Μια απεικόνιση $\varphi\colon U \to \mathbb{A}^1$ λέγεται **regular** αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in U$ υπάρχουν ανοιχτό $U_a \subseteq U$ με $a \in U_a$ και $f, g \in A(X)$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in U_a$, ώστε*

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall\, x \in U_a.$$

Το σύνολο όλων των regular απεικονίσεων του U θα συμβολίζεται με $\mathcal{O}_X(U)$ και είναι μια k-άλγεβρα (k το σώμα).

Παράδειγμα 4.1.2. *Έστω $X = V(xw - yz) \subseteq \mathbb{A}^4$ και*

$$U = X \setminus V(y, w) = \{(x, y, z, w) \in X \mid y \neq 0 \text{ ή } w \neq 0\}.$$

Ορίζουμε $\varphi\colon U \to \mathbb{A}^1$,

$$(x, y, z, w) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{αν } y \neq 0, \\ \dfrac{z}{w}, & \text{αν } w \neq 0. \end{cases}$$

Αυτή είναι καλά ορισμένη στο U, αφού

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \forall\, (x, y, z, w) \in X \text{ με } y \neq 0 \text{ και } w \neq 0,$$

και συνεπώς είναι regular. Όμως δεν μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα κλάσμα f/g σε όλο το U.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω U ένα ανοιχτό ενός affine variety X, και έστω $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$. Τότε το*

$$V(\varphi) = \{a \in U : \varphi(a) = 0\}$$

είναι κλειστό στο U.

Απόδειξη. Για $a \in U$ υπάρχει ανοιχτό $U_a \subseteq U$ με $a \in U_a$ ώστε

$$\varphi = \frac{f_a}{g_a}, \quad \text{για κάποια } f_a, g_a \in A(X) \text{ με } g_a(x) \neq 0 \forall x \in U_a.$$

Έχουμε

$$U_a \setminus V(\varphi) = \{x \in U_a : \varphi(x) \neq 0\} = U_a \setminus V(f_a),$$

το οποίο είναι ανοιχτό στο X, και συνεπώς

$$U \setminus V(\varphi) = \bigcup_{a \in U} \big(U_a \setminus V(f_a)\big),$$

το οποίο είναι επίσης ανοιχτό. Έπεται ότι το $V(\varphi)$ είναι κλειστό στο U. □

Πρόταση 4.1.4. *Έστω U ανοιχτό ενός irreducible affine variety X, και $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_X(U)$. Αν υπάρχει ανοιχτό $\emptyset \neq V \subseteq U$ με $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, τότε $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $V(\varphi_1 - \varphi_2)$ περιέχει το V προφανώς και είναι κλειστό στο U, από το προηγούμενο λήμμα. Άρα το $V(\varphi_1 - \varphi_2)$ περιέχει την κλειστή θήκη του V στο U.

Κάθε ανοιχτό $U \neq \emptyset$ ενός irreducible χώρου είναι irreducible. Πράγματι αν δεν ήταν irreducible θα είχαμε $U = (U \cap F_1) \cup (U \cap F_2)$ με F_1, F_2 κλειστά του X και

$$X = F_1 \cup F_2 \cup (X \setminus U),$$

το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος από την Παρατήρηση 3.4.7 το V είναι πυκνό στο U και έχουμε

$$V(\varphi_1 - \varphi_2) \supseteq \overline{V} = U.$$

□

4.2 Regular συναρτήσεις στα βασικά ανοιχτά

Ορισμός 4.2.1. *Έστω affine variety X και $f \in A(X)$. Ορίζουμε*

$$D(f) := X \setminus V(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Άσκηση 4.2.2. *Δείξτε ότι τα $D(f)$ αποτελούν βάση της τοπολογίας Zariski.*

Παρατήρηση 4.2.3. *Αν $f, g \in A(X)$, έχουμε $D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g)$.*

Πρόταση 4.2.4. *Έστω X ένα affine variety και $g \in A(X)$. Τότε*

$$\mathcal{O}_X(D(g)) = \left\{ \frac{f}{g^n} \;\middle|\; f \in A(X),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ειδικότερα, για $g = 1$ έχουμε

$$\mathcal{O}_X(X) = A(X).$$

Επιπλέον, πάνω σε τέτοια ανοιχτά έχουμε μια ολική αναπαράσταση.

Απόδειξη. Προφανώς

$$\mathcal{O}_X(D(g)) \supseteq \left\{ \frac{f}{g^n} \;\middle|\; f \in A(X),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Έστω μια $\varphi \in \mathcal{O}_X(D(g))$. Για κάθε $a \in D(g)$ υπάρχουν f_a, g_a στο $A(X)$ ώστε $\varphi(x) = (\frac{f_a}{g_a})(x)$ σε κάποια περιοχή U_a του a. Μπορούμε να υποθέσουμε (μικραίνοντας αν χρειαστεί) ότι $U_a = D(h_a)$ για κάποιο $h_a \in A(X)$. Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε τα f_a και g_a με τα $f'_a = f_a h_a$ και $g'_a = g_a h_a$, αφού

$$\varphi(x) = \left(\frac{f_a}{g_a}\right)(x) = \left(\frac{f_a h_a}{g_a h_a}\right)(x) \quad \forall\, x \in D(h_a).$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής της φ μηδενίζονται στο $V(h_a)$. Το g'_a λοιπόν μηδενίζεται στο $V(h_a)$ και δεν μηδενίζεται στο $D(h_a)$, δηλαδή τα h_a και g'_a έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία μηδενισμού. Συνεπώς μπορούμε εξ αρχής αντί για το $D(h_a)$ να επιλέξουμε το $D(g_a)$.

Έχουμε αποδείξει λοιπόν το εξής: για κάθε $a \in D(g)$ υπάρχουν $f_a, g_a \in A(X)$ ώστε

$$\varphi(x) = \frac{f_a}{g_a} \qquad \forall\, x \in D(g_a),$$

και επιπλέον $f_a = g_a = 0$ στο $V(g_a)$.

Τώρα έχουμε ότι στον $A(X)$

$$f_a g_b = f_b g_a \qquad \forall\, a, b \in D(g). \tag{$*$}$$

Πράγματι, στο $D(g_a) \cap D(g_b)$ ισχύει $\varphi = \frac{f_a}{g_a} = \frac{f_b}{g_b}$, και στα $V(g_a)$ και $V(g_b)$ και τα δύο μέλη είναι μηδέν.

Γράφουμε $D(g) = \bigcup_{a \in D(g)} D(g_a)$ και

$$V(g) = \bigcap_{a \in D(g)} V(g_a) = V\big(\{g_a \mid a \in D(g)\}\big).$$

Από το σχετικό Nullstellensatz (Παρατήρηση 3.1.3)

$$g \in I(V(g)) = I\Big(V\big(\{g_a \mid a \in D(g)\}\big)\Big) = \sqrt{\big(g_a \mid a \in D(g)\big)}.$$

Δηλαδή υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $s_a \in A(X)$ ώστε

$$g^n = \sum_a s_a g_a \qquad (\text{για κάποια πεπερασμένα } a \in D(g)).$$

Θέτουμε $f = \sum_a s_a f_a$. Για $b \in D(g)$ έχουμε $\varphi = f_b/g_b$ στο $D(g_b)$. Όμως

$$f g_b = \sum_a s_a f_a g_b \overset{(*)}{=} \sum_a s_a f_b g_a = f_b g^n.$$

Οπότε τελικά σε κάθε $D(g_b)$ έχουμε $\varphi = f_b/g_b = f/g^n$, και τα $D(g_b)$ καλύπτουν όλο το $D(g)$. □

Παράδειγμα 4.2.5. *Έστω $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^2$. Θα δούμε ότι $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) = k[x, y]$. Έστω μια $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U)$. Παρατηρούμε ότι η φ είναι regular στα*

$$D(x) = (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^1 \qquad \textit{και} \qquad D(y) = \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$$

και $U = D(x) \cup D(y)$. Από την τελευταία πρόταση

$$\varphi = \frac{f}{x^n} \ \textit{στο } D(x) \qquad \textit{και} \qquad \varphi = \frac{g}{y^m} \ \textit{στο } D(y),$$

με $x \nmid f$, $y \nmid g$. Στην τομή $D(x) \cap D(y)$ έχουμε

$$\frac{f}{x^n} = \frac{g}{y^m} \iff f \cdot y^m = g \cdot x^n.$$

Η ίδια σχέση ισχύει σε όλο το $V(fy^m - gx^n)$, το οποίο είναι κλειστό και περιέχει το $D(x) \cap D(y)$, συνεπώς

$$V(fy^m - gx^n) \supseteq \overline{D(x) \cap D(y)} = \overline{D(x \cdot y)} = \mathbb{A}^2,$$

δηλαδή $fy^m - gx^n \in I(\mathbb{A}^2) = (0)$, οπότε $fy^m = gx^n$ στον $k[x, y]$.

Τέλος, αν $n \neq 0$, τότε $x^n \mid f \cdot y^m \Rightarrow x \mid f$, το οποίο έχουμε υποθέσει ότι δεν ισχύει. Τελικά λοιπόν $n = 0$ και $\varphi = f$, δηλαδή η φ είναι πολυώνυμο.

4.3 Κατηγορίες και συναρτητές (functors)

Στην ενότητα αυτή θα ακολουθήσουμε το *The Rising Sea* του Ravi Vakil [5].

Ορισμός 4.3.1. *Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ αποτελείται από:*

- *μια κλάση* $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$*, τα **αντικείμενα** της* $\mathcal{C}$*·*
- *μια κλάση* $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$*, τους **μορφισμούς** της* $\mathcal{C}$*. Για* $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *οι μορφισμοί από το* A *στο* B *αποτελούν ένα σύνολο*[1] *και συμβολίζεται με* $\mathrm{mor}(A, B)$*, ένα* $f \in \mathrm{mor}(A, B)$ *συμβολίζεται* $f \colon A \to B$*·*
- *μια σύνθεση*
$$\mathrm{mor}(B, C) \times \mathrm{mor}(A, B) \longrightarrow \mathrm{mor}(A, C), \qquad (g, f) \longmapsto g \circ f,$$
με $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*·*
- *για κάθε* $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *υπάρχει ένας μορφισμός* $\mathrm{id}_B \in \mathrm{mor}(B, B)$*, ο οποίος είναι ο μοναδικός με την ιδιότητα: για κάθε* $f \colon A \to B$ *και* $g \colon B \to C$*,*
$$\mathrm{id}_B \circ f = f \qquad \textit{και} \qquad g \circ \mathrm{id}_B = g.$$

Ορισμός 4.3.2. *Ένας μορφισμός* $f \colon A \to B$ *λέγεται **ισομορφισμός** αν υπάρχει μοναδικός μορφισμός* $g \colon B \to A$ *τέτοιος ώστε*
$$f \circ g = \mathrm{id}_B \qquad \textit{και} \qquad g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Παρατήρηση 4.3.3. *Η μοναδικότητα στους δύο παραπάνω ορισμούς προκύπτει από τα υπόλοιπα αξιώματα. Πράγματι, αν* $\mathrm{id}_B, \mathrm{id}'_B$ *έχουν και οι δύο την ιδιότητα της ταυτοτικής, τότε* $\mathrm{id}_B = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}'_B = \mathrm{id}'_B$*. Αντίστοιχα, αν* g, g' *είναι δύο αντίστροφοι του* f*, τότε* $g = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = g'$*.*

Παράδειγμα 4.3.4. *Το βασικό παράδειγμα κατηγορίας είναι η* Sets *με αντικείμενα τα σύνολα και μορφισμούς τις απεικονίσεις. Η κλάση των συνόλων δεν είναι σύνολο.*

Άσκηση 4.3.5. *Μια κατηγορία της οποίας κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός λέγεται **groupoid**. Δείξτε ότι ένα groupoid με ένα μόνο αντικείμενο αποτελεί μια ομάδα.*

Παραδείγματα 4.3.6. *(i) Έστω ένας δακτύλιος* R*. Τα* R*-πρότυπα με τους ομομορφισμούς προτύπων αποτελούν μια κατηγορία και τη συμβολίζουμε με* Mod_R*.*

- *Για* $R = k$ *σώμα, η* Mod_k *είναι η κατηγορία των διανυσματικών χώρων.*
- *Για* $R = \mathbb{Z}$*, η* $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ *είναι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων.*

(ii) Η κατηγορία Alg_k *των* k*-αλγεβρών, με μορφισμούς τους ομομορφισμούς* k*-αλγεβρών.*

(iii) Η κατηγορία Rings *των (μεταθετικών) δακτυλίων με μονάδα, με μορφισμούς τους ομομορφισμούς δακτυλίων.*

Παράδειγμα 4.3.7. *Έστω ένας τοπολογικός χώρος* X*. Ορίζουμε την κατηγορία* $\mathrm{Open}(X)$ *με αντικείμενα τα ανοιχτά υποσύνολα του* X *με μορφισμούς τις ενθέσεις, δηλαδή αν* $V \subseteq U$ *έχουμε ακριβώς έναν μορφισμό* $V \to U$ *και κανέναν διαφορετικά.*

Ορισμός 4.3.8. *Ένας **covariant συναρτητής** από μια κατηγορία* $\mathcal{A}$ *σε μια κατηγορία* $\mathcal{B}$*,*
$$F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B},$$
είναι: για κάθε $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ *ένα αντικείμενο* $F(A) \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$*, και για κάθε μορφισμό* $m \colon A_1 \to A_2$ *ένας μορφισμός* $F(m) \colon F(A_1) \to F(A_2)$*, ώστε*

- $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$*,*
- $F(m_2 \circ m_1) = F(m_2) \circ F(m_1)$*, όπου* $m_1 \colon A_1 \to A_2$ *και* $m_2 \colon A_2 \to A_3$*.*

Παράδειγμα 4.3.9. *Ο **forgetful functor** είναι ένας functor που «ξεχνάει δομή». Για παράδειγμα,*
$$F \colon \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
που στέλνει ένα R*-πρότυπο* M *στο σύνολο* M *(χωρίς την αλγεβρική δομή), και όμοια έναν ομομορφισμό στη «σκέτη» απεικόνιση.*

[1] Η υπόθεση ότι το $\mathrm{mor}(A, B)$ είναι σύνολο δεν είναι απαραίτητη, κατηγορίες με αυτή την ιδιότητα λέγονται *locally small*.

Μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση δύο συναρτητών με τον προφανή τρόπο: αν $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, τότε $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ και $(G \circ F)(m) = G(F(m))$.

Ορισμός 4.3.10. *Ένας **contravariant συναρτητής** F ορίζεται με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε έναν covariant συναρτητή, με τη διαφορά ότι αντιστρέφει τα βέλη, δηλαδή*

$$F(A \to B) \in \mathrm{mor}\,(F(B), F(A)) \quad (\text{είναι } F(B) \to F(A))\,.$$

Κατά αναλογία έχουμε $F(m_2 \circ m_1) = F(m_1) \circ F(m_2)$.

Παράδειγμα 4.3.11. *Αν $\mathcal{C}$ μια κατηγορία, ορίζουμε μια νέα κατηγορία, την $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$, η οποία έχει τα ίδια αντικείμενα αλλά ανεστραμμένα βέλη (δηλαδή $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(A,B) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$, με σύνθεση $f \circ_{\mathrm{opp}} g = g \circ f$). Ένας contravariant συναρτητής $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ είναι ένας covariant συναρτητής $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}$.*

Παράδειγμα 4.3.12. *Έστω X ένα affine variety και $\mathrm{Open}(X)$ η κατηγορία των ανοιχτών υποσυνόλων του. Ορίζουμε*

$$\mathcal{O}_X\colon \mathrm{Open}(X) \longrightarrow \mathrm{Alg}_k, \qquad U \longmapsto \mathcal{O}_X(U),$$

και για $V \hookrightarrow U$ παίρνουμε

$$\rho_{UV}\colon \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V), \qquad \varphi \longmapsto \varphi|_V.$$

Ο $\mathcal{O}_X$ είναι ένας contravariant συναρτητής. Πράγματι:

- *Η ρ_{UV} είναι καλά ορισμένη (ο περιορισμός regular είναι regular). Πράγματι, αν $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ και $a \in V$, υπάρχουν ανοιχτό $U_a \subseteq U$ με $a \in U_a$ και $f, g \in A(X)$ με $g(x) \neq 0$ και $\varphi(x) = f(x)/g(x)$ για κάθε $x \in U_a$. Τότε στο ανοιχτό $U_a \cap V$ ισχύει $\varphi|_V = f/g$ και $a \in U_a \cap V$.*
- *Η ρ_{UV} είναι ομομορφισμός k-αλγεβρών, δηλαδή ο περιορισμός στο πεδίο ορισμού σέβεται όλη τη δομή, αφού οι πράξεις γίνονται κατά σημείο.*
- *Για $U \hookrightarrow U$ έχουμε $\varphi|_U = \varphi$, άρα $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(U)}$.*
- *Αν $W \hookrightarrow V$ και $V \hookrightarrow U$, με σύνθεση $W \hookrightarrow U$, τότε*

$$(\rho_{VW} \circ \rho_{UV})(\varphi) = (\varphi|_V)|_W = \varphi|_W = \rho_{UW}(\varphi).$$

4.4 Presheaves και sheaves

Ορισμός 4.4.1. *Ένα **presheaf** (δακτυλίων) σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι ένας contravariant συναρτητής*

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}(X) \longrightarrow \mathrm{Rings}.$$

Παρατήρηση 4.4.2. *Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται presheaves σε οποιαδήποτε κατηγορία, π.χ. presheaves συνόλων (*Sets*), αβελιανών ομάδων ή k-αλγεβρών (Alg_k). Το $\mathcal{O}_X$ είναι λοιπόν ένα presheaf k-αλγεβρών. Τα στοιχεία του $\mathcal{F}(U)$ λέγονται* sections *του $\mathcal{F}$ πάνω από το U, και για $V \subseteq U$ και $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ γράφουμε $\varphi|_V := \mathcal{F}(V \hookrightarrow U)(\varphi)$.*

Ορισμός 4.4.3. *Ένα **sheaf** (δακτυλίων) είναι ένα presheaf $\mathcal{F}$ με την εξής ιδιότητα: Αν U, U_i ανοιχτά του X με $U = \bigcup_i U_i$ και $\varphi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ με*

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j} \quad \forall\, i, j,$$

τότε υπάρχει μοναδική $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ ώστε $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$.

Παρατήρηση 4.4.4. *Η επιπλέον ιδιότητα που έχει ένα sheaf ισοδύναμα δίνει ότι η απεικόνιση*

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \left\{ (\varphi_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \;\middle|\; \varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}\ \forall\, i, j \right\}, \quad \varphi \longmapsto (\varphi|_{U_i})_{i \in I},$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Παράδειγμα 4.4.5. *Το $\mathcal{O}_X$ είναι sheaf. Έστω $U = \bigcup_i U_i$ και $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ με $\varphi_i = \varphi_j$ στο $U_i \cap U_j$. Ορίζουμε $\varphi\colon U \to k$ με $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ αν $x \in U_i$. Η φ είναι καλά ορισμένη αφού οι φ_i συμφωνούν στις τομές. Η φ είναι regular, αφού ο περιορισμός της στα U_i είναι regular. Τέλος $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$, και η φ είναι μοναδική, αφού μια συνάρτηση στο U καθορίζεται από τους περιορισμούς της στα U_i.*

Άσκηση 4.4.6. *Έστω $X = \mathbb{R}^n$ με τη συνήθη τοπολογία. Ορίζουμε*

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Open}(X) \longrightarrow \mathrm{Sets}, \quad \mathcal{F}(U) = \{\varphi\colon U \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ συνεχής}\},$$

και $\mathcal{F}(V \hookrightarrow U) = \rho_{UV}$ με $\rho_{UV}(\varphi) = \varphi|_V$. Δείξτε ότι ο $\mathcal{F}$ είναι sheaf.

Άσκηση 4.4.7. *Έστω $X = \mathbb{R}^n$ με τη συνήθη τοπολογία. Ορίζουμε*

$$F\colon \mathrm{Open}(X) \longrightarrow \mathrm{Sets}, \quad F(U) = \{\varphi\colon U \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ σταθερή}\},$$

και $F(V \hookrightarrow U) = \rho_{UV}$ με $\rho_{UV}(\varphi) = \varphi|_V$. Δείξτε ότι ο F δεν είναι sheaf.

Αν έχουμε ένα sheaf $\mathcal{F}$ στον X και U ανοιχτό του X, μπορούμε να ορίσουμε τον περιορισμό

$$\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$$

για κάθε V ανοιχτό υποσύνολο του U. Αν το $\mathcal{F}$ είναι sheaf, τότε και το $\mathcal{F}|_U$ είναι sheaf.

4.5 Τοπικοποίηση (localization)

Στην ενότητα αυτή θα ακολουθήσουμε το βιβλίο των Atiyah–Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra* [6].

Μιμούμενοι την κατασκευή των ρητών αριθμών από τους ακεραίους μπορούμε να γενικεύσουμε σε οποιαδήποτε ακέραια περιοχή.

Παράδειγμα 4.5.1. *Έστω R ακέραια περιοχή. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στα ζεύγη $(a, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$:*

$$(a, s) \sim (b, t) \iff at - bs = 0.$$

Η σχέση είναι άμεσα ανακλαστική και συμμετρική. Για τη μεταβατικότητα, έστω $(a, s) \sim (b, t)$ και $(b, t) \sim (c, u)$, δηλαδή

$$at - bs = 0 \qquad \text{και} \qquad bu - ct = 0.$$

Τότε

$$atu = bsu = cst \Longrightarrow t(au - cs) = 0 \overset{R \text{ ακ. περ.}}{\Longrightarrow} au - cs = 0 \Longrightarrow (a, s) \sim (c, u).$$

Για τυχόντα δακτύλιο λοιπόν η σχέση αυτή δεν είναι γενικά σχέση ισοδυναμίας (οι μηδενοδιαιρέτες δημιουργούν πρόβλημα).

Γενικεύουμε λοιπόν αυτή την ιδέα ως εξής. Έστω μεταθετικός δακτύλιος R με μονάδα.

- Έστω $S \subseteq R$ με
  - $1 \in S$,
  - αν $a, b \in S$, τότε $a \cdot b \in S$.

  Ένα τέτοιο S λέγεται **πολλαπλασιαστικό σύνολο**.
- Ορίζουμε στα ζεύγη $(a, s) \in R \times S$ τη σχέση

$$(a, s) \sim (b, t) \iff (at - bs)q = 0 \quad \text{για κάποιο } q \in S. \tag{4.5.1}$$

Η σχέση είναι πάλι ανακλαστική και συμμετρική με προφανή τρόπο. Αν $(a, s) \sim (b, t)$ και $(b, t) \sim (c, u)$, υπάρχουν $q, r \in S$ με

$$(at - bs)q = 0 \qquad \text{και} \qquad (bu - ct)r = 0,$$

δηλαδή $atq = bsq$ και $bur = ctr$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με ru και τη δεύτερη με qs παίρνουμε $atqru = bsqru$ και $burqs = ctrqs$. Άρα

$$0 = atqru - ctrqs \Longrightarrow (au - cs)(tqr) = 0$$

και αφού $tqr \in S$, έχουμε $(a, s) \sim (c, u)$.

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης συμβολίζεται $S^{-1}R$, και την κλάση του (a, s) τη συμβολίζουμε ως κλάσμα a/s. Ορίζουμε

- $\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} = \dfrac{at + bs}{st}$,

- $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$.

Το $S^{-1}R$ με τις παραπάνω πράξεις γίνεται δακτύλιος και λέγεται η **τοπικοποίηση** του R πάνω από το S.

Άσκηση 4.5.2. *Αποδείξτε ότι ο $S^{-1}R$ είναι πράγματι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.*

Παρατήρηση 4.5.3.
- *Με την διαδικασία αυτή λοιπόν κατασκευάζουμε έναν καινούργιο δακτύλιο στον οποίο τα στοιχεία που ανήκαν στο S έχουν πλέον αντίστροφο.*
- *Γενικεύσαμε λοιπόν το αρχικό παράδειγμα προς δύο κατευθύνσεις: πρώτον, με τρόπο που δουλεύει και για δακτύλιο που δεν είναι ακέραια περιοχή· δεύτερον, και για διαφορετικά σύνολα από το $R \setminus \{0\}$.*

Παράδειγμα 4.5.4. *Αν $0 \in S$, τότε ο $S^{-1}R$ είναι ο μηδενικός δακτύλιος, αφού $(at - bs) \cdot 0 = 0$ για οποιαδήποτε ζεύγη (a, s) και (b, t). Αν δηλαδή προσπαθήσουμε να αντιστρέψουμε το μηδέν, τότε απλώς καταστρέφουμε τον δακτύλιο.*

Όταν ο R είναι ακέραια περιοχή και $0 \notin S$ η απεικόνιση

$$R \to S^{-1}R, \quad r \mapsto r/1,$$

είναι ένας μονομορφισμός δακτυλίων. Πράγματι, αν $r/1 = 0$ τότε υπάρχει ένα $s \in S$ ώστε $rs = 0 \Rightarrow r = 0$. Ουσιαστικά δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση, ο $S^{-1}R$ είναι ένας μεγαλύτερος δακτύλιος μέσα στον οποίο ζει ο R. Όταν το σύνολο S περιέχει μηδενοδιαιρέτες η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει.

Παρατήρηση 4.5.5. *Το πρώτο παράδειγμα ήταν η τοπικοποίηση μιας ακέραιας περιοχής R πάνω από το $R \setminus \{0\}$, οπότε $S^{-1}R = \mathrm{Frac}(R)$. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση η σχέση* (4.5.1) *συμπίπτει με αυτή του Παραδείγματος 4.5.1, αφού το $q \neq 0$ μπορεί να διαγραφεί.*

Αν έχουμε ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p} \subseteq R$, τότε το $S = R \setminus \mathfrak{p}$ είναι πολλαπλασιαστικό σύνολο ($a, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$). Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $R_{\mathfrak{p}}$ αντί για $S^{-1}R$.

Τα στοιχεία $a/s \in R_{\mathfrak{p}}$ με $a \in \mathfrak{p}$ αποτελούν ένα ιδεώδες $\mathfrak{m}$ του $R_{\mathfrak{p}}$. Αν $b/t \notin \mathfrak{m}$, τότε $b \notin \mathfrak{p}$, άρα $b \in S$ και

$$\frac{b}{t} \cdot \frac{t}{b} = 1,$$

δηλαδή το b/t είναι αντιστρέψιμο. Δηλαδή το $\mathfrak{m} = \{a/s \in R_{\mathfrak{p}} \mid a \in \mathfrak{p}\}$ είναι μέγιστο ιδεώδες και ο $R_{\mathfrak{p}}$ είναι **τοπικός** δακτύλιος.

Παράδειγμα 4.5.6. *Έστω $R = \mathbb{Z}$ και (p) ένα μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες. Ο δακτύλιος $R_{(p)}$ αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς m/n όπου ο n είναι πρώτος προς τον p. Η πλήρωση αυτού του δακτυλίου είναι οι ακέραιοι p-αδικοί.*

Αν επιλέξουμε ένα στοιχείο $f \in R$, μπορούμε να φτιάξουμε το πολλαπλασιαστικό σύνολο $S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε τον $S^{-1}R$ με R_f.

Προσοχή στον συμβολισμό: για έναν πρώτο αριθμό p, ο $\mathbb{Z}_{(p)}$ (τοπικοποίηση στο πρώτο ιδεώδες (p)) είναι διαφορετικός από τον $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[1/p]$ (τοπικοποίηση στο στοιχείο p).

Παράδειγμα 4.5.7. (i) *Για $R = \mathbb{Z}$ και $0 \neq f \in \mathbb{Z}$. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_f$ αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς m/f^n, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Επίσης $\mathbb{Z}_f \cong \mathbb{Z}[1/f]$.*

(ii) *Αν X ένα affine variety και $0 \neq g \in A(X)$, τότε ο δακτύλιος $\mathcal{O}_X(D(g))$ είναι η τοπικοποίηση του δακτυλίου $A(X)$ πάνω από το $\{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Πράγματι, η απεικόνιση*

$$A(X)_g \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(g)), \quad f/g^n \longmapsto (x \mapsto (f/g^n)(x))$$

είναι επί από την Πρόταση 4.2.4 και 1-1 αφού, αν

$$(f_1/g^n)(x) = (f_2/g^m)(x) \quad \text{στο } D(g)$$

τότε $(f_1 g^m - f_2 g^n)g = 0$ στο $A(X)$ και τελικά $f_1/g^n = f_2/g^m$ στο $A(X)_g$.

4.6 Τοπικές ιδιότητες

Η ίδια κατασκευή δουλεύει και για πρότυπα. Έστω R δακτύλιος, $S \subseteq R$ πολλαπλασιαστικό σύνολο και M ένα R-πρότυπο. Η σχέση

$$(m,s) \sim (m',s') \iff q(s'm - sm') = 0 \quad \text{για κάποιο } q \in S$$

στο $M \times S$ είναι σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο $S^{-1}M$ των κλάσεων m/s, με πράξεις

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}, \qquad \frac{a}{t} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{ts},$$

είναι $S^{-1}R$-πρότυπο. Κάθε ομομορφισμός R-προτύπων $\varphi\colon M \to N$ επάγει ομομορφισμό $S^{-1}R$-προτύπων

$$S^{-1}\varphi\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N, \qquad m/s \longmapsto \varphi(m)/s.$$

Παρατήρηση 4.6.1. *Έχουμε ουσιαστικά ορίσει ένα συναρτητή*

$$\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}R}$$

που στέλνει το R-πρότυπο M στο $S^{-1}R$-πρότυπο $S^{-1}M$ και έναν ομομορφισμό R-προτύπων φ στον ομομορφισμό $S^{-1}R$-προτύπων $S^{-1}\varphi$.

Για ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ και $S = R \setminus \mathfrak{p}$ γράφουμε $M_\mathfrak{p}$ και $\varphi_\mathfrak{p}$ αντί για $S^{-1}M$ και $S^{-1}\varphi$. Το $M_\mathfrak{p}$ είναι $R_\mathfrak{p}$-πρότυπο.

Πρόταση 4.6.2. *Αν η ακολουθία $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ είναι ακριβής στο M, τότε και η*

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

είναι ακριβής στο $S^{-1}M$.

Απόδειξη. Αφού $g \circ f = 0$, έχουμε $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$, δηλαδή $\operatorname{Im} S^{-1}f \subseteq \operatorname{Ker} S^{-1}g$. Αντίστροφα, αν $g(m)/s = 0$, τότε υπάρχει $t \in S$ με $g(tm) = tg(m) = 0$. Άρα $tm = f(m')$ για κάποιο $m' \in M'$ και

$$\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{f(m')}{ts} = S^{-1}f\Big(\frac{m'}{ts}\Big).$$

□

Μια ιδιότητα P ενός R-προτύπου M λέγεται **τοπική** αν: το M έχει την P αν και μόνο αν το $M_\mathfrak{p}$ έχει την P για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του R.

Πρόταση 4.6.3. *Έστω M ένα R-πρότυπο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $M = 0$.

(ii) $M_\mathfrak{p} = 0$ *για κάθε πρώτο ιδεώδες* $\mathfrak{p}$ *του* R.

(iii) $M_\mathfrak{m} = 0$ *για κάθε μέγιστο ιδεώδες* $\mathfrak{m}$ *του* R.

Απόδειξη. Τα (i)⇒(ii)⇒(iii) είναι προφανή.

(iii)⇒(i). Έστω ότι $M \neq 0$ και $0 \neq x \in M$. Το $I = \{a \in R \mid ax = 0\}$ είναι ιδεώδες με $I \neq R$, άρα υπάρχει μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τέτοιο ώστε $I \subseteq \mathfrak{m}$. Αφού $M_\mathfrak{m} = 0$, έχουμε $x/1 = 0$, δηλαδή $tx = 0$ για κάποιο $t \in R \setminus \mathfrak{m}$. Τότε όμως $t \in I \subseteq \mathfrak{m}$, άτοπο. □

Πρόταση 4.6.4. *Έστω $\varphi\colon M \to N$ ομομορφισμός R-προτύπων. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η φ είναι 1-1.*

(ii) *Η $\varphi_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ είναι 1-1 για κάθε πρώτο ιδεώδες* $\mathfrak{p}$.

(iii) *Η $\varphi_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ είναι 1-1 για κάθε μέγιστο ιδεώδες* $\mathfrak{m}$.

Το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε παντού το «1-1» με «επί».

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Η $0 \to M \to N$ είναι ακριβής, άρα και η $0 \to M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ από την Πρόταση 4.6.2.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Άμεσο αφού κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω $M' = \operatorname{Ker}\varphi$. Η $0 \to M' \to M \xrightarrow{\varphi} N$ είναι ακριβής, άρα και η $0 \to M'_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m}$. Όμως $M'_\mathfrak{m} \cong \operatorname{Ker}\varphi_\mathfrak{m} = 0$, και από την Πρόταση 4.6.3 έπεται ότι $M' = 0$. □

Άσκηση 4.6.5. *Αποδείξτε την παραπάνω πρόταση αντικαθιστώντας το 1-1 με επί.*

4.7 Stalks

Ορισμός 4.7.1. *Έστω ένα presheaf $\mathcal{F}$ σε ένα τοπολογικό χώρο X, και $a \in X$. Το **stalk** του $\mathcal{F}$ στο a είναι*

$$\mathcal{F}_a := \big\{(U,\varphi) : U \text{ ανοιχτό του } X,\ a \in U \text{ και } \varphi \in \mathcal{F}(U)\big\}\,/_\sim$$

όπου $(U,\varphi) \sim (U',\varphi')$ αν υπάρχει ανοιχτό $V \subseteq U \cap U'$ με $a \in V$: $\varphi|_V = \varphi'|_V$.

Παρατήρηση 4.7.2. *$H\ \sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Οι κλάσεις συμβολίζονται με $\overline{(U,\varphi)}$ και λέγονται* germs *του $\mathcal{F}$ στο a. Ο $\mathcal{F}_a$ είναι δακτύλιος με πρόσθεση*

$$\overline{(U,\varphi)} + \overline{(U',\varphi')} = \overline{(U \cap U', \varphi|_{U\cap U'} + \varphi'|_{U\cap U'})},$$

και όμοια για το γινόμενο.

Ιδιαιτέρως για το $\mathcal{O}_X$ θα συμβολίζουμε τα stalks με $\mathcal{O}_{X,a}$.

Παρατήρηση 4.7.3.

- *Για το sheaf των διαφορίσιμων απεικονίσεων στην πραγματική ευθεία ένα germ σε ένα σημείο μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο στο σημείο αυτό, αλλά καμία πληροφορία για άλλα σημεία.*
- *Μια ολόμορφη απεικόνιση σε ένα συνεκτικό ανοιχτό του $\mathbb{C}^n$ καθορίζεται πλήρως από οποιοδήποτε (μη κενό) μικρότερο ανοιχτό. Συνεπώς τα germs των ολόμορφων απεικονίσεων έχουν πολύ περισσότερη πληροφορία.*

Λήμμα 4.7.4. *Έστω X affine variety και $a \in X$. Αν $I = I(a) \subseteq A(X)$ το ιδεώδες του a, τότε*

$$\mathcal{O}_{X,a} \cong A(X)_I \cong \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f,g \in A(X) \text{ με } g(a) \neq 0 \right\}.$$

Ειδικότερα ο $\mathcal{O}_{X,a}$ είναι τοπικός δακτύλιος με μέγιστο ιδεώδες το

$$\mathfrak{m}_a := \left\{ \overline{(U,\varphi)} \in \mathcal{O}_{X,a} \;\middle|\; \varphi(a) = 0 \right\} \cong \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f,g \in A(X) \text{ με } f(a) = 0,\ g(a) \neq 0 \right\}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση

$$A(X)_I \longrightarrow \mathcal{O}_{X,a}, \qquad f/g \longmapsto \overline{(D(g), f/g)}.$$

- *Καλά ορισμένη:* Αν $f/g = f'/g'$ στο $A(X)_I$, τότε υπάρχει $h \in A(X) \setminus I$: $h(fg' - f'g) = 0$. Συνεπώς οι f/g και f'/g' συμφωνούν στο $D(h) \cap D(g) \cap D(g')$.
- *Επί:* Είναι άμεσο αφού οι regular συναρτήσεις σε αρκούντως μικρά ανοιχτά έχουν ρητή αναπαράσταση.
- *1-1:* Έστω ότι η f/g αντιστοιχεί στο $0 \in \mathcal{O}_{X,a}$, υπάρχει δηλαδή ανοιχτό U με $a \in U$:

  $$(f/g)(x) = 0 \quad \forall x \in U.$$

  Υποθέτοντας ότι $U = D(h)$ για κάποια $h \in A(X) \setminus I$ ($h(a) \neq 0$), έχουμε

  $$h \cdot (f \cdot 1 - 0 \cdot g) = 0 \quad \text{σε όλο το } X$$

  (η f μηδενίζεται στο $D(h)$, αφού $g \neq 0$ εκεί, και η h στο $V(h)$) και συνεπώς στο $A(X)$. Τελικά

  $$f/g = 0/1 \quad \text{στο } A(X)_I.$$

□

Άσκηση 4.7.5. *Έστω $X \subseteq \mathbb{A}^n$ affine variety και $a \in X$. Δείξτε ότι*

$$\mathcal{O}_{X,a} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a} \Big/ I(X)\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,a}.$$

Άσκηση 4.7.6. *Έστω $\mathcal{F}$ sheaf σε ένα τοπολογικό χώρο X, U ένα ανοιχτό και $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(U)$. Αν για κάθε $a \in U$ οι φ και ψ συμφωνούν στο $\mathcal{F}_a$ (αν δηλαδή $\overline{(U,\varphi)} = \overline{(U,\psi)}$), τότε $\varphi = \psi$.*

Άσκηση 4.7.7. *Έστω X irreducible affine variety και $U \neq \emptyset$ ανοιχτό. Δύο $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_X(U)$ είναι ίσες αν και μόνο αν υπάρχει $a \in U$: $\varphi = \psi$ στο $\mathcal{O}_{X,a}$.*

Παρατήρηση 4.7.8. *Η παραπάνω άσκηση είναι το ανάλογο της Παρατήρησης 4.7.3 για regular συναρτήσεις, όπου το irreducible παίζει τον ρόλο του συνεκτικού.*

Θα δώσουμε εδώ μια αλγεβρική λύση για την άσκηση αυτή. Αφού ο X είναι irreducible, ο $A(X)$ είναι ακέραια περιοχή. Έστω $F = \operatorname{Frac} A(X)$. Για κάθε πολλαπλασιαστικό σύνολο S με $0 \notin S$, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} S^{-1}A(X) &\to K, \\ f/s &\mapsto f/s, \end{aligned}$$

είναι καλά ορισμένη και 1-1. Βλέπουμε έτσι τον $S^{-1}A(X)$ ως υποδακτύλιο του F. Ειδικά, για $0 \neq g, h \in A(X)$ και $a \in D(g)$ έχουμε εγκλεισμούς

$$A(X)_h \subseteq A(X)_{gh} \subseteq F \quad \textit{και} \quad A(X)_g \subseteq A(X)_{I(a)} \subseteq F.$$

Έστω $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_X(U)$ με $\varphi = \psi$ στο $\mathcal{O}_{X,a}$. Αφού τα βασικά ανοιχτά αποτελούν βάση, υπάρχει $g \in A(X)$ με $a \in D(g) \subseteq U$, και από τον δεύτερο εγκλεισμό $\varphi|_{D(g)} = \psi|_{D(g)}$. Για τυχόν $b \in U$ παίρνουμε $h \in A(X)$ με $b \in D(h) \subseteq U$. Οι $\varphi|_{D(h)}$ και $\psi|_{D(h)}$ έχουν τον ίδιο περιορισμό στο $D(gh) = D(g) \cap D(h)$, άρα από τον πρώτο εγκλεισμό $\varphi|_{D(h)} = \psi|_{D(h)}$. Ειδικά $\varphi(b) = \psi(b)$ για κάθε $b \in U$, δηλαδή $\varphi = \psi$.

Κεφάλαιο 5

Μορφισμοί

5.1 Ringed spaces και μορφισμοί

Αφού ορίσαμε ποιες είναι οι συναρτήσεις μας από ένα affine variety X στο $\mathbb{A}^1$, μπορούμε εύκολα να ορίσουμε ποιοι είναι οι μορφισμοί μεταξύ των affine varieties.

Φυσιολογικά θέλουμε ένας μορφισμός $f : X \to Y$ να επάγει έναν ομομορφισμό μεταξύ των $\mathcal{O}_Y(-)$ και $\mathcal{O}_X(-)$. Αν λοιπόν $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$, θα θέλαμε η $\varphi \circ f$ να είναι regular συνάρτηση σε κάποιο ανοιχτό του X. Το αναμενόμενο σύνολο στο οποίο ορίζεται η $\varphi \circ f$ είναι το $f^{-1}(V)$. Η ιδέα αυτή μας οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω δύο affine varieties X και Y. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι **μορφισμός affine varieties** αν:*

- *Η f είναι συνεχής (ώστε το $f^{-1}(V)$ να είναι ανοιχτό για κάθε ανοιχτό $V \subseteq Y$).*
- *Αν $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$, τότε $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$, δηλαδή έχουμε μια απεικόνιση*

$$f^* : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)), \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ f.$$

Με κάποιον επιπλέον κόπο φαίνεται ότι μπορούμε να ορίσουμε μορφισμούς σε μια αρκετά μεγαλύτερη κλάση από αυτή των affine varieties με «ουσιαστικά» τον ίδιο τρόπο.

Ορισμός 5.1.2. *Ένας **ringed space** είναι ένας τοπολογικός χώρος X μαζί με ένα sheaf k-αλγεβρών το οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_X$. Το sheaf αυτό λέγεται **structure sheaf** του X, και θα συμβολίζουμε τον ringed space με $(X, \mathcal{O}_X)$.*

Παρατήρηση 5.1.3. *Αν U είναι ανοιχτό του X, τότε και το $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ είναι ringed space. Ειδικά, κάθε ανοιχτό υποσύνολο ενός affine variety είναι ringed space.*

Το βασικό χαρακτηριστικό που λείπει για να ορίσουμε μορφισμούς μεταξύ ringed spaces είναι η περιγραφή του structure sheaf ως συναρτήσεις, όπως φυσιολογικά είχαμε στην περίπτωση των affine varieties. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αυτό είναι πάντα δυνατό, με μια σημαντική διαφορά: η τιμή μιας τομής στο x ζει στο stalk $\mathcal{F}_x$, που αλλάζει από σημείο σε σημείο, και όχι σε ένα σταθερό σώμα k. Για αυτό η σύνθεση $\varphi \circ f$ δεν έχει πια νόημα, και στον ορισμό του μορφισμού (Ορισμός 5.1.8) θα χρειαστούμε επιπλέον δεδομένα.

Παρατήρηση 5.1.4. *Στο sheaf των regular συναρτήσεων η έννοια του περιορισμού μιας συνάρτησης είναι φυσιολογική. Σε ένα τυχόν sheaf όμως, τα στοιχεία δεν είναι απαραίτητα συναρτήσεις. Αν έχουμε δύο ανοιχτά $V \subseteq U$, η έννοια του περιορισμού ενός στοιχείου $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ στο V γενικεύεται φυσιολογικά ως το στοιχείο*

$$\varphi|_V := \mathcal{F}(V \hookrightarrow U)(\varphi).$$

Πρόταση 5.1.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ ένα sheaf στον X. Για ανοιχτό U του X ορίζουμε*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) = \left\{ s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \;\middle|\; s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ και για κάθε } x \; \exists V \text{ ανοιχτό} : x \in V \subseteq U, \; \exists\, t \in \mathcal{F}(V) : s(y) = t_y \; \forall y \in V \right\}$$

με πράξεις και περιορισμούς κατά σημείο. Για κάθε ανοιχτό U η απεικόνιση

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}(U), \quad \varphi \longmapsto (x \mapsto \varphi_x)$$

είναι ισομορφισμός k-αλγεβρών και επιπλέον σέβεται τους περιορισμούς, δηλαδή για $V \subseteq U$ το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}}(U) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(V \hookrightarrow U)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s \mapsto s|_V} \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{F}}(V) \end{array}$$

μετατίθεται.

Απόδειξη. Η απεικόνιση είναι

- Καλά ορισμένη: παίρνουμε απλώς $V = U$ και $t = \varphi$.
- 1-1: από την Άσκηση 4.7.6.
- Επί: έστω $s \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$.

  Για κάθε $x \in U$ υπάρχει V_x ανοιχτό με $x \in V_x \subseteq U$ και υπάρχει $t^{(x)} \in \mathcal{F}(V_x)$ με $s(y) = t_y^{(x)}$ για κάθε $y \in V_x$.

  Στο $V_x \cap V_y$ ισχύει $t_a^{(x)} = s(a) = t_a^{(y)}$ για κάθε $a \in V_x \cap V_y$. Συνεπώς $t^{(x)} = t^{(y)}$ στο $V_x \cap V_y$ από την Άσκηση 4.7.6. Τελικά από το αξίωμα του sheaf υπάρχει $\varphi \in \mathcal{F}(U)$ με $\varphi|_{V_x} = t^{(x)}$ και άρα $\varphi_y = s(y)$ για κάθε y.

Για τη μεταθετικότητα του διαγράμματος: αν $x \in V$, τα $(V, \varphi|_V)$ και (U, φ) συμφωνούν στο V, άρα $(\varphi|_V)_x = \varphi_x$. □

Ορισμός 5.1.6 (Natural transformation)**.** *Αν έχουμε δύο covariant συναρτητές*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \qquad \textit{και} \qquad G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},$$

*ένας **natural transformation** είναι μια οικογένεια μορφισμών $(\eta_X)_{X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})}$,*

$$\eta_X : F(X) \longrightarrow G(X),$$

όπου για κάθε $f : X \to Y$ το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

*μετατίθεται. Ένας natural transformation λέγεται **natural isomorphism** αν επιπλέον κάθε η_X είναι ισομορφισμός.*

Για contravariant συναρτητές τα κάθετα βέλη αντιστρέφονται, δηλαδή

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \end{array}$$

Έτσι ένας μορφισμός sheaves $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ στον X είναι ένας natural transformation των αντίστοιχων συναρτητών $\mathrm{Open}(X) \to \mathrm{Alg}_k$, και η Πρόταση 5.1.5 λέει ότι η $\mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ είναι natural isomorphism.

Έστω δύο τοπολογικοί χώροι X, Y και $\mathcal{F}$ ένα sheaf στο X. Αν $f : X \to Y$ συνεχής, τότε ορίζουμε το **pushforward** του $\mathcal{F}$ μέσω της f ως εξής:

$$(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}\big(f^{-1}(U)\big),$$

και οι $\mathcal{F}\left(f^{-1}(V) \hookrightarrow f^{-1}(U)\right)$ (για $V \subseteq U$) είναι οι περιορισμοί. Δηλαδή το $f_*\mathcal{F}$ είναι ένας νέος συναρτητής.

Άσκηση 5.1.7. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν $\mathcal{F}$ ένα sheaf στον X δείξτε ότι ο συναρτητής $f_*\mathcal{F}$ είναι sheaf του Y.*

Ορισμός 5.1.8. *Ένας **μορφισμός ringed spaces** είναι ένα ζεύγος*

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

όπου:

- *η f είναι συνεχής,*

- *η $f^{\#}$ είναι ένας natural transformation $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$.*

Έστω $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ και $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$. Για να ορίσουμε τη σύνθεση σκεφτόμαστε ως εξής:

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^{\#}} g_*\mathcal{O}_Y \qquad\qquad \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^{\#}} f_*\mathcal{O}_X,$$

δεν μπορώ λοιπόν να πάρω κατευθείαν σύνθεση. Όμως

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^{\#}} g_*\mathcal{O}_Y \qquad\qquad g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*f^{\#}} g_*f_*\mathcal{O}_X.$$

Οπότε

$$(g, g^{\#}) \circ (f, f^{\#}) = \big(g \circ f,\ g_*f^{\#} \circ g^{\#}\big).$$

Ορισμός 5.1.9. *Ένας μορφισμός μεταξύ ringed spaces είναι **ισομορφισμός** αν έχει αντίστροφο.*

5.2 Μορφισμοί affine varieties

Η πρώτη πρόταση έρχεται να εξηγήσει ότι οι μορφισμοί των ringed spaces είναι πράγματι γενίκευση των μορφισμών των affine varieties όπως τους περιγράψαμε στην αρχή της προηγούμενης ενότητας.

Πρόταση 5.2.1. *Έστω U ανοιχτό ενός affine variety X, Y ένα affine variety και $(f, f^\#) : U \to Y$ ένας μορφισμός ringed spaces. Τότε αναγκαστικά $f^\#_V(\varphi) = \varphi \circ f$ για κάθε ανοιχτό V του Y και $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in f^{-1}(V)$ και

$$\psi = \mathrm{ev}_x \circ f^\#_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow k, \quad \mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{f^\#_x} \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} k,$$

όπου $\mathrm{ev}_x\big(\overline{(W,\phi)}\big) = \phi(x)$, που είναι καλά ορισμένη αφού δύο αντιπρόσωποι του ίδιου germ συμφωνούν σε μια περιοχή του x.

Προφανώς η ψ είναι επί (από τις σταθερές και μόνο, αφού η $f^\#_x$ είναι ομομορφισμός k-αλγεβρών), οπότε ο $\ker\psi$ είναι μέγιστο. Ο δακτύλιος $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ είναι τοπικός δακτύλιος με μοναδικό μέγιστο $\mathfrak{m} = \ker\psi$.

Αν λοιπόν $c = \varphi(f(x)) \in k$, τότε $\varphi - c \in \mathfrak{m} = \ker\psi$ και $\psi(\varphi) = c$, δηλαδή $(f^\#\varphi)(x) = \varphi(f(x))$. □

Λόγω της παραπάνω πρότασης, για (ανοιχτά υποσύνολα) affine varieties ένας μορφισμός ringed spaces καθορίζεται από τη συνεχή απεικόνιση f, και θα γράφουμε απλά f αντί για $(f, f^\#)$ και $f^* = f^\#$.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω X affine variety, U ανοιχτό του X και $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ ένα άλλο affine variety. Οι μορφισμοί $f : U \to Y$ είναι ακριβώς οι απεικονίσεις της μορφής*

$$f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \longrightarrow Y, \qquad x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

όπου $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{O}_X(U)$.

Απόδειξη. Έστω f ένας μορφισμός και

$$A(Y) = k[y_1, \ldots, y_n] \cong k[x_1, \ldots, x_n] \Big/ I(Y), \quad \text{όπου } y_i = x_i + I(Y)$$

Παρατηρήστε ότι η y_i ως απεικόνιση στέλνει το $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_i$, είναι δηλαδή η προβολή στην i-οστή συντεταγμένη. Οι y_i είναι προφανώς regular στον Y ($y_i \in \mathcal{O}_Y(Y)$) και συνεπώς

$$\varphi_i = f^* y_i = y_i \circ f \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(Y)\big) = \mathcal{O}_X(U).$$

Τελικά $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ και τελειώσαμε.

Αντίστροφα τώρα, έστω $f = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ με $\varphi_i \in \mathcal{O}_X(U)$ και $f(U) \subseteq Y$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Έστω Z κλειστό του Y. Υπάρχουν $g_1, \ldots, g_m \in A(Y)$ με $Z = V(g_1, \ldots, g_m)$, και

$$f^{-1}(Z) = \{x \in U \mid g_i \circ f(x) = 0\ \forall i\} = \{x \in U \mid g_i(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = 0\ \forall i\}.$$

Οι απεικονίσεις $x \mapsto g_i(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ είναι regular στο U (γιατί;). Από το Λήμμα 4.1.3 το $f^{-1}(Z)$ είναι κλειστό στο U.

Τέλος, αν $\psi \in \mathcal{O}_Y(W)$ για W ανοιχτό του Y, τότε η

$$f^*\psi = \psi \circ f : f^{-1}(W) \longrightarrow k, \qquad x \longmapsto \psi\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\big)$$

είναι επίσης regular. □

Πόρισμα 5.2.3. *Έστω X, Y affine varieties. Υπάρχει μια αντιστοιχία*

$$\{\text{ μορφισμοί } X \to Y\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{ομομορφισμοί } k\text{-αλγεβρών} \\ A(Y) \to A(X) \end{array} \right\},$$
$$f \quad \longleftrightarrow \quad f^*.$$

Επιπλέον η f είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν η f^* είναι ισομορφισμός k-αλγεβρών.

Απόδειξη. Είδαμε ήδη ότι ένας μορφισμός f επάγει έναν ομομορφισμό f^*, και ότι η f μπορεί να επανακτηθεί από την f^* ως $f = (f^*y_1, \dots, f^*y_n)$.

Για το αντίστροφο, έστω ένας ομομορφισμός k-αλγεβρών $g : A(Y) \to A(X)$. Υποθέτουμε ότι

$$A(Y) \cong k[y_1, \dots, y_n] \cong k[x_1, \dots, x_n] \Big/ I(Y).$$

Ορίζουμε $\varphi_i = g(y_i) \in A(X)$ και $f = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : X \longrightarrow \mathbb{A}^n$. Για κάθε $h \in A(\mathbb{A}^n) = k[x_1, \dots, x_n]$ έχουμε

$$(f^*h)(x) = h(f(x)) = h\big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big). \qquad (*)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f^*h = g(h\mid_Y)$. Έστω x στον X και

$$\begin{aligned} \alpha :& k[x_1, \dots, x_n] \to k, \\ & h \mapsto h\left(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right) \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} \beta :& k[x_1, \dots, x_n] \to k, \\ & h \mapsto g(h|_Y)(x). \end{aligned}$$

Οι α και β συμφωνούν σε όλα τα x_i, αφού

$$\alpha(x_i) = x_i\left(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right) = \varphi_i(x) = g(y_i)(x) = \beta(x_i).$$

Έπεται ότι $\alpha = \beta$, αφού είναι k-ομομορφισμοί. Από την $(*)$ έπεται ότι $f^*h = g(h|_Y)$. Συνεπώς για $h \in I(Y)$, έχουμε $f^*h = g(h|_Y) = 0$, άρα $f(x) \in V(I(Y)) = Y$, δηλαδή $f : X \to Y$. Από το λήμμα 5.2.2 η f είναι μορφισμός με $f^* = g$.

Τέλος αν $f_1 : X \to Y$ και $f_2 : Y \to X$ μορφισμοί,

$$(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*,$$

το οποίο δίνει το τελευταίο σκέλος του πορίσματος. □

Παρατήρηση 5.2.4. *Ένας μορφισμός affine varieties $f : X \to Y$ που είναι 1-1 και επί δεν είναι απαραίτητα ισομορφισμός. Πράγματι, αν $X = V(x^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}^2$, ορίζουμε τον μορφισμό $f : \mathbb{A}^1 \to X$ με $f(t) = (t^3, t^2)$. Ο επαγόμενος ομομορφισμός είναι*

$$f^* : A(X) \cong k[x, y] \Big/ (x^2 - y^3) \longrightarrow k[t], \qquad x \mapsto t^3,\ y \mapsto t^2.$$

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη, με αντίστροφη την

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} x/y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

η οποία δεν είναι μορφισμός. Πράγματι αν η f^{-1} ήταν μορφισμός, θα είχαμε $k[x, y]/(x^2 - y^3) \cong k[t]$, που δεν ισχύει.

Πλέον μπορούμε να βλέπουμε τα affine varieties ως ringed spaces που είναι ισόμορφα με κάποιο affine variety. Υπό αυτή την έννοια, ενώ ένα ανοιχτό υποσύνολο ενός affine variety δεν είναι (πάντα) affine variety, είναι πάντα ringed space.

Παράδειγμα 5.2.5. *Έστω $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^2$. Έχουμε δει ότι $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) \cong k[x, y]$ (Παράδειγμα 4.2.5). Έστω ότι υπάρχει affine variety Y και ισομορφισμός ringed spaces $f : Y \to U$. Τότε επάγεται ισομορφισμός k-αλγεβρών*

$$f^* : k[x, y] \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) = A(Y).$$

Το (x, y) είναι μέγιστο του $k[x, y]$, άρα το $f^*((x, y))$ είναι μέγιστο του $A(Y)$. Από το Nullstellensatz υπάρχει $q \in Y$: $f^*((x, y)) = \{g : g(q) = 0\}$. Συνεπώς

$$f^*(x)(q) = x \circ f(q) = 0 \qquad \textit{και} \qquad f^*(y)(q) = y \circ f(q) = 0,$$

και άρα $f(q) = 0$, όμως $0 \notin U$, άτοπο.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω X affine variety και $f \in A(X)$. Το ανοιχτό $D(f)$ είναι affine variety, και $A(D(f)) \cong A(X)_f$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε το affine variety

$$Y = \{(x, t) \in X \times \mathbb{A}^1 : tf(x) = 1\} \subseteq X \times \mathbb{A}^1.$$

Ορίζουμε

$$g : Y \longrightarrow D(f), \quad (x, t) \longmapsto x.$$

Η g είναι μορφισμός από το Λήμμα 5.2.2 και έχει αντίστροφο

$$g^{-1} : D(f) \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto \big(x, 1/f(x)\big),$$

η οποία επίσης είναι μορφισμός, αφού $1/f \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Για την τελευταία σχέση,

$$A(D(f)) \cong \mathcal{O}_X(D(f)) \cong A(X)_f.$$ □

Ορισμός 5.2.7. *Ένας δακτύλιος λέγεται **reduced** αν δεν έχει (μη μηδενικά) μηδενοδύναμα στοιχεία.*

Έστω R μια πεπερασμένα παραγόμενη k-άλγεβρα που είναι reduced. Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ γεννήτορες του R και

$$f : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R, \quad \varphi \longmapsto \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Το ιδεώδες $J = \ker f$ είναι ριζικό αφού

$$k[x_1, \ldots, x_n] \,/_J \cong R$$

και ο R είναι reduced. Το $X = V(J)$ είναι ένα affine variety στο $\mathbb{A}^n$ και $A(X) \cong R$.

Παρατήρηση 5.2.8. *Η παραπάνω κατασκευή μας δίνει μια αντιστοιχία*

$$\{\textit{affine varieties}\} \,/_{\textit{ισομορφισμό}} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{πεπερασμένα παραγόμενες} \\ \textit{reduced } k\textit{-άλγεβρες} \end{array} \right\} /_{\textit{ισομορφισμό}}.$$

Άσκηση 5.2.9. *Έστω $f : X \to Y$ μορφισμός affine varieties και $f^* : A(Y) \to A(X)$ ο αντίστοιχος ομομορφισμός των coordinate rings.*

(i) *Δείξτε ότι η f^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{f(X)} = Y$. Συμπεράνετε ότι αν η f είναι επί, τότε η f^* είναι 1-1, και δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.*

(ii) *Δείξτε ότι αν η f^* είναι επί, τότε η f είναι 1-1, και δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.*

(iii) *Δείξτε ότι κάθε ισομορφισμός $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ είναι της μορφής $f(x) = ax + b$ για κάποια $a \in k \setminus \{0\}$ και $b \in k$.*

Άσκηση 5.2.10. *Δείξτε ότι τα παρακάτω affine varieties είναι ισόμορφα πάνω από το $\mathbb{C}$*

$$V(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}^2, \quad V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Άσκηση 5.2.11. *Δείξτε ότι οι παρακάτω ringed spaces είναι ισόμορφοι πάνω από το $\mathbb{C}$*

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{1\}, \quad V(y - x^2, z - x^3) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^3, \quad V(x^2 - y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Άσκηση 5.2.12. *Δείξτε ότι οι παρακάτω ringed spaces δεν είναι ισόμορφοι πάνω από το $\mathbb{C}$*

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, \quad V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Βιβλιογραφία

[1] Α. Κοντογεώργης, Ι. Αντωνιάδης, *Αλγεβρικές καμπύλες: Μια εισαγωγή στην αλγεβρική γεωμετρία*, Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2021. ISBN 978-618-85370-1-9. https://doi.org/10.57713/kallipos-10

[2] A. Gathmann, *Algebraic Geometry*, Class notes, TU Kaiserslautern, 2021/22. https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/alggeom-2021/alggeom-2021.pdf

[3] J. P. May, *Munshi's proof of the Nullstellensatz*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), 133–140.

[4] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, 2nd expanded ed., Lecture Notes in Mathematics **1358**, Springer, Berlin, 1999.

[5] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/.

[6] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison–Wesley, 1969.