

Σχόλια:

- Κάθε ασκηση πιάνει **2 μονάδες**.
 - Το σύνολο των μονάδων της εξέτασης είναι 10. Σε αυτόν θα προστεθεί ο βαθμός των εργασιών (με άριστα το 2) ώστε να υπολογιστεί ο τελικός βαθμός.
 - Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με $Sf(x)$ τη σειρά Fourier της f στο x , με $\sigma_N(f; x)$ το N -οστό Cesàro μέσο της Sf στο x , με $S(\mathbb{R})$ το χώρο των συναρτήσεων Schwartz ορισμένων στο $\mathbb{R}$, και με $C_c(\mathbb{R})$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα.
-

1. Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = |x| \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- a) Δείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ 0, & k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

- b) Υπολογίστε τα $Sf(1/3)$, $Sf(1/2)$ και $Sf(5)$ (δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας).

- c) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n \in \mathbb{N}, n \text{ περιττός}} \frac{1}{n^4}.$$

- d) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $f * g(x) = \cos(4\pi x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a) Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 1/\sqrt{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- b) Για κάθε 1-περιοδική $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_{[0,1]} |f| < +\infty$, οι κατά Cesàro μέσοι $\sigma_N(f; \cdot)$ της Sf είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις.

- c) Υπάρχει $g \in S(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $f * g = f$ για κάθε $f \in S(\mathbb{R})$.

3. Έστω 1-περιοδική $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty$. Έστω $x_0 \in [0, \frac{1}{2})$ και $\ell \in \mathbb{R}$, με την ιδιότητα ότι, για κάποιο $\delta > 0$,

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - 2\ell|}{y} d\lambda(y) < +\infty.$$

Δείξτε ότι $Sf(x_0) = \ell$.

(Υπενθυμίζουμε ότι ο πυρήνας D_N του Dirichlet ικανοποιεί:

$$D_N(y) = \frac{\sin((2N+1)\pi y)}{\sin(\pi y)}, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Επιπλέον, $\sin(\pi y) \geq y$ για κάθε $y \in [0, 1/2]$.)

4. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ και $g \in C_c(\mathbb{R})$.

a) Δείξτε ότι η $f * g$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής.

b) Έστω η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f = 1$ στο $[-1, 1]$ και $f = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Δώστε συγκεκριμένο παράδειγμα μίας οικογένειας $(g_\delta)_{\delta > 0}$ συναρτήσεων, ώστε οι $g_\delta * f$ να είναι ομοιόμορφα συνεχείς και $\|g_\delta * f - f\|_1 \rightarrow 0$ καθώς $\delta \rightarrow 0$ (και εξηγήστε γιατί το παράδειγμα λειτουργεί).

5. Έστω $f \in S(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in [-1, 1]$.

a) Δείξτε ότι $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2 \leq \|f''\|_2 \leq \|f^{(3)}\|_2 \leq \dots$

b) Δείξτε ότι υπάρχει $g \in S(\mathbb{R})$ ώστε $f = g''$. (Υπόδειξη: Πρώτα υπολογίστε τον $\widehat{g}$ για μία τέτοια g .)

Καλή επιτυχία!