

Σχόλια:

- Το σύνολο των μονάδων της εξέτασης είναι 12. Αν x είναι το σύνολο των μονάδων που θα μαζέψετε, ο τελικός βαθμός της εξέτασης θα είναι x στα 10.
 - Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με $s_N(f; x)$ το N -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f στο x (για κάθε 1-περιοδική, ολοκληρώσιμη f), με $Sf(x)$ τη σειρά Fourier της f στο x , και με $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ το χώρο των συναρτήσεων Schwartz ορισμένων στο $\mathbb{R}$.
-

1. **(3 μονάδες)** Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in [-1/2, 1/2]$.

- Βρείτε τους συντελεστές Fourier της f .
- Βρείτε τις τιμές $Sf(0)$, $Sf(1/2)$ και $Sf(3)$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.
- Βρείτε σταθερές $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ που ελαχιστοποιούν την ποσότητα

$$\int_{[-1/2, 1/2]} \left| (c_1 + c_2 e^{2\pi i t} + c_3 e^{-2\pi i t}) - f(t) \right|^2 d\lambda(t),$$

και υπολογίστε αυτή την ελάχιστη ποσότητα.

- Βρείτε 1-περιοδική συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f * g(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. **(2 μονάδες)** Έστω $f \in C(\mathbb{T})$, με την ιδιότητα ότι $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ που **δεν** είναι της μορφής $\pm 2^n$ (για $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Επιπλέον, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $K_N := 2F_{2N} - F_N$, όπου ο F_N είναι ο πυρήνας του Fejér.

- Εξηγήστε γιατί η $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.
- Δείξτε ότι $K_{2^n} * f(x) = s_{2^n}(f; x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $x \in \mathbb{R}$.
- Δείξτε ότι η f ισούται με τη σειρά Fourier της σε όλο το $\mathbb{R}$.

3. **(2 μονάδες)** Αποδείξτε τους παρακάτω ισχυρισμούς.

- Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα ότι $\int_{[0,1]} f \cdot p d\lambda = 0$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p . Τότε $f = 0$ λ -σχεδόν παντού.
- Δεν υπάρχει πραγματική 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι $\hat{f}(0) = 2i$.
- Έστω $f \in C^1(\mathbb{T})$. Τότε, $k \cdot \hat{f}(k) \rightarrow 0$ καθώς $|k| \rightarrow +\infty$.
- Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, με $\hat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \notin [-1, 1]$. Τότε, $\|f'\|_2 \leq 10\|f\|_2$.

4. **(3 μονάδες)**

- Έστω συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \leq 0$ και $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$. Έστω επιπλέον ότι $\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \operatorname{Re}(\hat{f}(\xi)) d\lambda(\xi) = |x|e^{-x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τον τύπο της f .

b) Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\widehat{f \cdot g}(\xi) = \widehat{f} * \widehat{g}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

c) Έστω $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-μετρήσιμο σύνολο, με την ιδιότητα ότι $\chi_A * \chi_A(0) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη $(a_1, a_2) \in A \times A$ ώστε $a_1 + a_2 = 0$.

5. (2 μονάδες) Έστω $f \in S(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\pi i \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

στον $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, με

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(x\xi + t\xi^2)} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

ικανοποιεί και τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη.

b) Δείξτε ότι, για κάθε $t \geq 0$,

$$u(x, t) = \widehat{g_t}(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου $g_t(\xi) := e^{2\pi i t \xi^2} \widehat{f}(\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

c) Δείξτε ότι, για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $\|u(\cdot, t)\|_2 = \|f\|_2$.

Καλή επιτυχία!