

Σχόλια:

- Το σύνολο των μονάδων της εξέτασης είναι 10. Σε αυτόν θα προστεθεί ο βαθμός των εργασιών (με άριστα το 2) ώστε να υπολογιστεί ο τελικός βαθμός.
- Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με $Sf(x)$ τη σειρά Fourier της f στο x , με $\sigma_N(f; x)$ το N -οστό Cesàro μέσο της Sf στο x , και με $S(\mathbb{R})$ το χώρο των συναρτήσεων Schwartz ορισμένων στο $\mathbb{R}$.

- (2 μονάδες)** Έστω n 1-περιοδική $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - x^2$ για κάθε $x \in [0, 1)$.
 - Χωρίς να υπολογίσετε τους συντελεστές Fourier της f , βρείτε τα $Sf(0)$, $Sf(1/2)$, $Sf(4/3)$ (ως απάντηση πρέπει να δοθούν συγκεκριμένοι αριθμοί και πλήρης δικαιολόγηση).
 - Βρείτε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού 0 ώστε $\|p - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \min_{g \in \mathcal{P}_0} \|g - f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ (όπου με $\mathcal{P}_0$ συμβολίζουμε το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού 0).
 - Εξηγήστε το εξής: Υπάρχει ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων, με $p_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\|p_n - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.
- (2 μονάδες)** Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda < +\infty$. Σταθεροποιούμε $M \in \mathbb{N}$, και ορίζουμε $f_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_M(x) := f(Mx)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Δείξτε ότι η f_M είναι 1-περιοδική, και ότι $\widehat{f_M}(Mk) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
 - Διατυπώστε το Θεώρημα Parseval για την τυχαία $g \in L^2(\mathbb{T})$.
 - Έστω ότι $f = f_M$. Δείξτε ότι $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του M .
- (3 μονάδες)** Εξηγήστε τα παρακάτω:
 - Έστω $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. Τότε, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^{100} |\widehat{f}(k)|^4 < +\infty$.
 - Έστω n 1-περιοδική $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f = 0$ στο $[0, 1/2)$ και $f = 5$ στο $[1/2, 1)$. Τότε, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| = +\infty$.
 - Υπάρχει σταθερά $C > 0$ (στο $\mathbb{R}$) ώστε: $\|\sigma_N(f, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $N \in \mathbb{N}$.
 - Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f * f = f$. Τότε, $f = 0$ λ -σ.π.
- (3 μονάδες)**
 - Έστω οι συναρτήσεις $\phi, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\phi := \chi_{[-1/2, 1/2]}$ και $g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \chi_{(0,1]}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $\phi_\delta(x) := \frac{1}{\delta} \cdot \phi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ για κάθε $\delta > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Εξηγήστε γιατί

$$\|\phi_\delta * g - g\|_{4/3} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad \delta \rightarrow 0.$$

- b) (i) Έστω $h \in S(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^x h'(u) du$.
(ii) Έστω $f, g \in S(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\operatorname{supp} \hat{f}, \operatorname{supp} \hat{g} \subseteq [-M, M]$$

(δηλαδή, ώστε $\hat{f} = \hat{g} = 0$ στο $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$). Δείξτε ότι

$$\|f \cdot g\|_{\infty} \leq 100 M \cdot \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Καλή επιτυχία!