

Σχόλια:

- Κάθε άσκηση πιάνει **2 μονάδες**. Δε χρειάζεται να κάνετε επιλογή 5 ασκήσεων από τις 6 - απαντήστε σε όποια ερωτήματα επιθυμείτε.
 - Αν x είναι το σύνολο των μονάδων που θα μαζέψετε, ο τελικός βαθμός της εξέτασης θα είναι x στα 10.
 - Συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με $s_N(f; x)$ το N -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f στο x (για κάθε 1-περιοδική, ολοκληρώσιμη f), και με $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ το χώρο των συναρτήσεων Schwartz ορισμένων στο $\mathbb{R}$.
-

1. Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, 1)$.

- Εξηγήστε πού συγκλίνει η σειρά Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ της f , για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Βρείτε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Έστω $\mathcal{P}_2$ το σύνολο των τριγωνομετρικών πολωνύμων βαθμού το πολύ 2. Βρείτε το $p \in \mathcal{P}_2$ με $\|p - f\|_2 = \min_{g \in \mathcal{P}_2} \|g - f\|_2$.

2. a) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

b) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ με

$$\hat{f}(7) = \hat{f}(-7) = 1, \quad \hat{f}(1) = \hat{f}(-1) = 2.$$

Βρείτε $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $f * g(x) = \cos(2\pi \cdot 3x) \sin(2\pi \cdot 4x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. a) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περιοδική συνάρτηση με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\hat{f}(k) = - \int_0^1 f\left(x + \frac{1}{2k}\right) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

- Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ Lipschitz-συνεχής. Χρησιμοποιώντας το (a), δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0, +\infty)$, που εξαρτάται μόνο από την f , ώστε $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- Έστω $f \in C^2(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι $k^2 \cdot \hat{f}(k) \rightarrow 0$ καθώς $k \rightarrow +\infty$.

4. a) Δείξτε ότι, αν $f \in C(\mathbb{T})$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη αρνητικών τριγωνομετρικών πολωνύμων (δηλαδή με $p_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$), ώστε $\|p_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

b) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει ότι

$$\|s_N(f; \cdot)\|_\infty \leq C \log N \|f\|_\infty \quad \text{για κάθε } f \in C(\mathbb{T}).$$

5. a) Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1$.
- b) Έστω $T > 0$, και $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (-T, T)$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{2\pi T} \cdot \|f'\|_2.$$

6. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases}$$

Σας δίνεται ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (δε χρειάζεται να το αποδείξετε).

- a) Δείξτε ότι $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- b) Δείξτε ότι υπάρχουν μη μηδενικές $h_1, h_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε η $h_1 * h_2$ να είναι η μηδενική συνάρτηση.

Καλή επιτυχία!