

Ασκήσεις: Φυλλάδιο 2

Αρμονική Ανάλυση 2025-26

Προθεσμία παράδοσης: 21 Μαΐου 2026. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. a) Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = |x| \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Σας δίνεται ότι

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0 \\ 0, & k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{\pi^2 k^2}, & k \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε τις ποσότητες

$$(i) \sum_{k \in \mathbb{N}, k \text{ περιττός}} \frac{1}{k^4}, \quad (ii) \min_{p \in \mathcal{P}_4} \|f - p\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

(όπου ο $\mathcal{P}_4$ είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ 4).

- b) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1]} |f|^2 d\lambda < +\infty$. Σταθεροποιούμε $M \in \mathbb{N}$, και ορίζουμε $f_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_M(x) := f(Mx)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (i) Δείξτε ότι η f_M είναι 1-περιοδική, και ότι $\widehat{f_M}(Mk) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) Έστω ότι $f = f_M$. Δείξτε ότι $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του M .

2. a) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ και $g \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι, αν η $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στον $L^1(\mathbb{R})$ με $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$, τότε $\|f * g_n - f * g\|_\infty \rightarrow 0$.
b) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ και $g \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. (Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για $g \in C_c(\mathbb{R})$.)
c) Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$g(x) := \frac{1}{x^4} \chi_{[1,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Κατασκευάστε μία οικογένεια $(h_\delta)_{\delta>0}$ από ομοιόμορφα συνεχείς, φραγμένες συναρτήσεις $h_\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα ότι κάθε h_δ είναι μία συνέλιξη, και

$$\|h_\delta - g\|_2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

3. Εξηγήστε τα εξής:

a) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|\sigma_N(f, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}, \text{ για κάθε } f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ και } N \in \mathbb{N}.$$

(Επισημαίνουμε ότι η παραπάνω σταθερά πρέπει να είναι ανεξάρτητη της f και του N .)

b) Έστω $f \in L^3(\mathbb{T})$, με $f \geq 0$. Υπάρχει ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων, με $p_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\|p_n - f\|_{L^3(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

4. a) Έστω συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, με την ιδιότητα ότι $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. Δείξτε ότι και $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

b) Κατασκευάστε μία $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα ότι $\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < +\infty$, και

$$f(0) \neq \int_{x \in \mathbb{R}} f(x) d\lambda(x).$$

c) Έστω συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f(x) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Έστω επιπλέον ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \xi x} \operatorname{Re}(\widehat{f}(\xi)) d\lambda(\xi) = |x|e^{-x^2}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Βρείτε τον τύπο της f .

5. a) Έστω $f, g \in S(\mathbb{R})$.

(i) Εξηγήστε γιατί ορίζονται καλά οι συναρτήσεις $\widehat{f \cdot g}$ και $\widehat{f} * \widehat{g}$.

(ii) Δείξτε ότι

$$\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

(Μέχρι τώρα ξέραμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μετατρέπει συνελίξεις σε γινόμενα.

Τώρα βλέπουμε ότι μετατρέπει και γινόμενα σε συνελίξεις.)

(iii) Δείξτε ότι η συνέλιξη $f * g$ των συναρτήσεων Schwartz f και g είναι επίσης συνάρτηση Schwartz.

b) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in S(\mathbb{R})$.

(i) Δείξτε ότι $f * g \in C^\infty(\mathbb{R})$, και μάλιστα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}.$$

(Το σύμβολο $h^{(k)}$ υποδηλώνει την k -οστή παράγωγο της h .)

(ii) Έστω

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \quad \text{και} \quad g(x) = e^{-\pi|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$f * g(x) \geq \frac{C}{1 + |x|^2}, \quad \text{για κάθε } x > 2.$$

- (iii) Ισχύει ότι $f * g \in S(\mathbb{R})$, για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in S(\mathbb{R})$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

6. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a) Υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα ότι $\widehat{f} = \chi_{[0,2]}$.
b) Έστω συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$ και επιπλέον ο $\widehat{f}$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Τότε, $f(0) \in \mathbb{R}$.
c) Έστω $f \in S(\mathbb{R})$ με $|\widehat{f}(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\pi x^2} dx \right| \leq 2.$$

7. Έστω $f \in S(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση (της θερμότητας)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

στον $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Δείξτε ότι η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, με

$$u(x, t) := \int e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t} d\xi \quad \text{για κάθε } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

ικανοποιεί και τη διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη.

- b) Έστω $t > 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $K_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$K_t(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ικανοποιεί ότι

$$\widehat{K_t}(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}.$$

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε πρώτα ότι $K_t(x) = \frac{1}{\delta} G(\frac{x}{\delta})$, για κατάλληλο $\delta > 0$, όπου $G(x) = e^{-\pi x^2}$.)

- c) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$u(\cdot, t) = f * K_t.$$

- d) Δείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

(με άλλα λόγια, η συνολική ενέργεια (θερμότητα) σε όλο τον $\mathbb{R}$ δεν αλλάζει με το χρόνο).

- e) Δείξτε ότι, σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$, η θερμοκρασία τείνει στο 0 με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή

$$u(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

(Αυτό σημαίνει ότι η θερμότητα διαχέεται.)