

Μάθημα 17 - 11/04/2024

Έφαρμοςή 2: Ισοκαταννομή ακοθουθιών

Ορ: Έδω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ οω $[0, 1)$

Λέμε ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένη οω $[0, 1)$:
 $\forall I \subseteq [0, 1)$ διαστήμα, $\# \{m \in \{1, \dots, n\} : x_m \in I\} \approx n \lambda(I)$

Ορ: Έδω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική,
με $f|_{[0, 1]}$ Riemann ολοκληρώσιμη

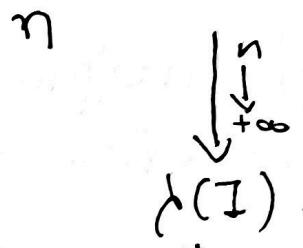
Έδω $(x_n)_n$ ακοθουθία οω $[0, 1)$
Λέμε ότι η $(x_n)_n$ είναι
ισοκατανεμημένη ωσ πρoς την f
όταν:

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

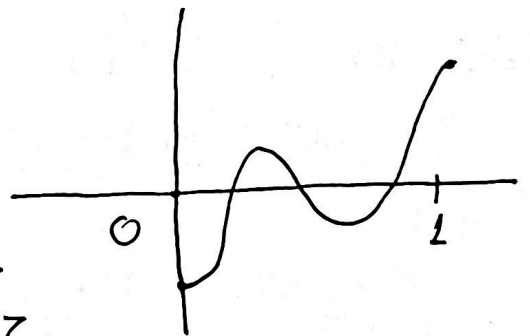
⚠ Αν η $(x_n)_n$ είναι ισοκατ.
οω $[0, 1) \iff$ η $(x_n)_n$ ισοκατ.
ωσ πρoς κάθε $\chi_I, \forall I \subseteq [0, 1)$ διαστήμα.

Πράγματι: $\forall I \subseteq [0, 1)$ διαστήμα

$$\frac{\chi_I(x_1) + \chi_I(x_2) + \dots + \chi_I(x_n)}{n} \rightarrow \int_0^1 \chi_I d\lambda.$$



το ποσοστό του
 $[0, 1)$ που καλύπτεται
από το I .



① $H(X_n)_n$ είναι 160Kαζα νετητηένη

② ————— // ————— ως προς κάθε
1-περιοδική $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f|_{[0,1)} \mathbb{R}$ -ολοκλή.

③ Κριτήριο Weyl: Η (χ, η) είναι 160 κατ. ως
προς κάθε $\phi_k = e^{2\pi i k \cdot}$, $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\text{Ans: } \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \frac{e^{2\pi i k x_1} + \dots + e^{2\pi i k x_n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{2\pi i k x} dx$$

Άσκηση: $\forall$ αριθμο α, n $(n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$
είναι 160 κατανεμημένη στο $[0, 1)$. (2π)

Woh: $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

Είναι 160 κατανέμηση στο $[0, 1]$.

Λύση: $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n e^{2\pi i k \underbrace{(m\alpha - Lm\alpha)}_{x_m}} \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n e^{2\pi i k m \alpha} \right| = \frac{e^{2\pi i k \alpha}}{e^{2\pi i k \alpha}} = 1$$

$$= \left| \frac{1}{n} \left(\frac{(e^{2\pi i k \alpha})^{n+1} - 1}{e^{2\pi i k \alpha} - 1} - e^{2\pi i k \cdot 0 \cdot \alpha} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n} \frac{(e^{2\pi i k \alpha})^{n+1} - 1}{e^{2\pi i k \alpha} - 1} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{e^{2\pi i k \alpha} - 1} + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Απόδειξη θεωρ:

$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}: \forall l$ κριμακωτή $l = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{I_i}$, για κάποια $c_i \in \mathbb{R}$,

Ξέρω: $\forall i=1, \dots, m:$

$$\frac{\chi_{I_i}(x_1) + \dots + \chi_{I_i}(x_n)}{n} \rightarrow \int_0^1 \chi_{I_i} d\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{l(x_1) + \dots + l(x_n)}{n} = \sum_{i=1}^m c_i \left(\frac{\chi_{J_i}(x_1) + \dots + \chi_{J_i}(x_n)}{n} \right)$$

n

$\downarrow$

$+\infty$

$$\downarrow \int_0^1 \chi_{I_i} d\mu$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^1 \chi_{I_i} d\lambda = \int_0^1 f d\lambda.$$

Εύρω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-περ ηε $f|_{[0,1]}$ R-ολοκλ.

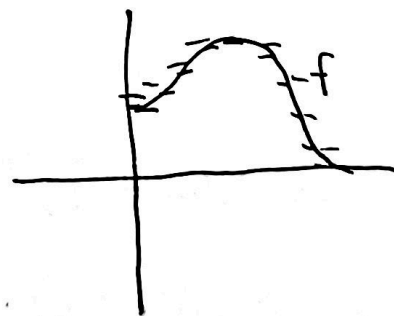
$$\exists u, l \text{ such that } \epsilon > 0$$

$$\mu \varepsilon \quad l \leq f \leq u$$

και $\int_0^1 u - \int_0^1 f < \varepsilon$

$$\Rightarrow \int_0^1 u - \int_0^1 f < \varepsilon,$$

$$\int_0^1 f - \int_0^1 g < \varepsilon)$$



Apd $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$

Αρα $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{l(x_1) + \dots + l(x_n)}{n} \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{u(x_1) + \dots + u(x_n)}{n}$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\int_0^1 l$$

$$\downarrow_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\int_0^1 u$$

$\Rightarrow$ για μερικά n ,

$$\int_0^1 l - \varepsilon \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \int_0^1 u + \varepsilon \leq \int_0^1 f + 2\varepsilon$$

$$\int_0^1 f$$

② $\Rightarrow$ ③ : $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \theta \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{e^{2\pi i k x_1} + \dots + e^{2\pi i k x_n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\cos(2\pi k \cdot), \sin(2\pi k \cdot)$ L -περ, R -ολοκλ στο $[0, 1]$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2\pi k x_1) + \dots + \cos(2\pi k x_n)}{n} \rightarrow \int_0^1 \cos(2\pi k x) dx$$

και ④

$$\frac{i \sin(2\pi k x_1) + \dots + i \sin(2\pi k x_n)}{n} \rightarrow \int_0^1 i \sin(2\pi k x) dx$$



③ $\rightarrow$ ①

Ξέρω: $(x_n)_n$ ισοκατ. ως προς κάθε $\phi_k, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

επιπλέον $\phi_0 = 1$

$$\underbrace{\phi_0(x_1) + \dots + \phi_0(x_n)}_n \rightarrow \int_0^1 \phi_0 = 1$$

• $H(x_n)_n$ είναι ισοκατ. ως προς κάθε τριγ. πολ.
 $P(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \phi_k$

• $H(x_n)_n$ είναι ισοκατ. ως προς κάθε $g \in C(\mathbb{T})$.
 Έστω $g \in C(\mathbb{T})$, τότε $\| \underbrace{\sigma_N(g, \cdot)}_{P_N \text{ τριγ. πολ.}} - g \|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Έστω $\varepsilon > 0, \exists N: \|g - P_N\|_\infty < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n} - \frac{P_N(x_1) + \dots + P_N(x_n)}{n} \right| \leq$$

$$\stackrel{\text{τριγ.}}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g(x_i) - P_N(x_i)| < \varepsilon$$

$$\text{και } \left| \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n} - \int_0^1 g \right| \leq \dots \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n} - \frac{P_N(x_1) + \dots + P_N(x_n)}{n} \right|}_{< \varepsilon} + \left| \frac{P_N(x_1) + \dots + P_N(x_n)}{n} - \int_0^1 P_N \right|$$

$$+ \left| \int_0^1 P_N - \int_0^1 g \right| \leq \int_0^1 |P_N - g| \leq \|P_N - g\|_\infty < \varepsilon.$$

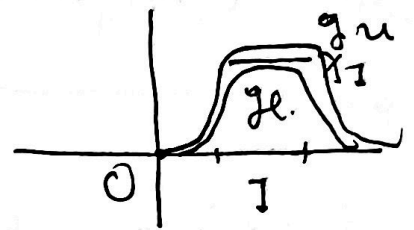
$< 3\varepsilon$ για μεγάλα n

• εἶναι $I \subseteq [0, 1]$ διατεταγμένα.

$\exists g_l, g_u \in C(\Pi)$ με:

$$g_l \leq \chi_I \leq g_u \text{ και } \int_0^1 g_u - \int_0^1 g_l < \varepsilon$$

$$(\Rightarrow \int_0^1 g_u - \int_0^1 f < \varepsilon, \int_0^1 f - \int_0^1 g_l < \varepsilon).$$



$$\text{Άρα, } \frac{g_l(x_1) + \dots + g_l(x_n)}{n} \leq \frac{\chi_I(x_1) + \dots + \chi_I(x_n)}{n} \leq \frac{g_u(x_1) + \dots + g_u(x_n)}{n}$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$\int_0^1 g_l$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$\int_0^1 g_u$$

$\Rightarrow$ για μεγάλα n :

$$-\varepsilon + \int_0^1 g_l \leq \frac{1}{n} \leq \int_0^1 g_u + \varepsilon < \int_0^1 f + 2\varepsilon$$

$$\int_0^1 f - 2\varepsilon$$