ΟΜΑΔΕΣ LIE

Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

Οκτώβριος 2026

Κεφάλαιο 1

Πολλαπλότητες

Στα τρία πρώτα κεφάλαια των Σημειώσεων καταγράφουμε τις βασικές έννοιες και τα συμπεράσματα της Διαφορικής Γεωμετρίας των Πολλαπλοτήτων που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα. Για τις αποδείξεις ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί οποιοδήποτε βιβλίο Διαφορικής Γεωμερίας από την σχετική βιβλιογραφία.

1.1. Χάρτες

1.1.1 Ορισμός. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Ένας (n–**διάστατος**) **χάρτης επί του** M είναι ένα ζεύγος (U, ϕ), όπου $U \subseteq M$, $\phi : U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ απεικόνιση, και ισχύουν οι συνθήκες:

(X1) η ϕ είναι 1–1 (και επί του $\phi(U)$), και

(X2) $\phi(U)$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$.

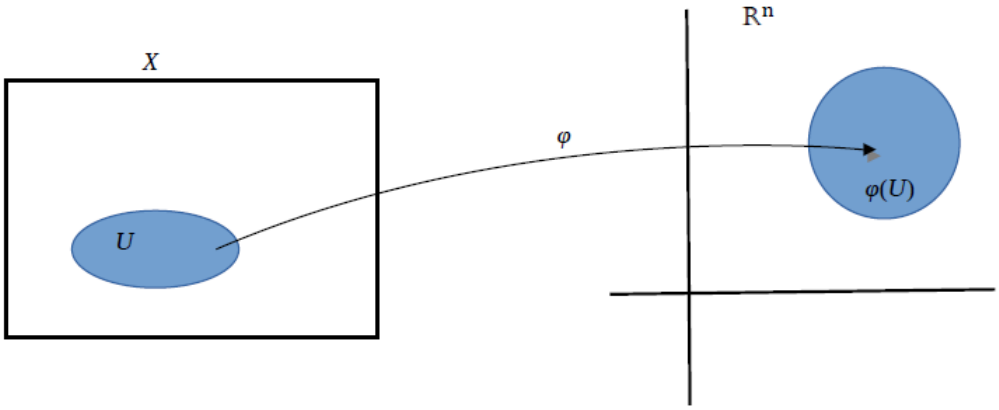
Αν U είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του M, το ζεύγος (U, ϕ) ονομάζεται **τοπικός** χάρτης, ενώ, αν $U = M$, ονομάζεται **ολικός** χάρτης.

Αν υπάρχει ένας ολικός χάρτης (M, ϕ), τότε το M μπορεί να θεωρηθεί ότι ταυτίζεται, μέσω της ϕ, με το υποσύνολο $\phi(M)$ του $\mathbb{R}^n$. Στην γενική περίπτωση, ολικοί χάρτες δεν υπάρχουν. Συνήθως, ένας χάρτης θα είναι ένας τοπικός χάρτης.

Συχνά λέμε ότι ένας τοπικός χάρτης (U, ϕ) ορίζει ένα **τοπικό σύστημα συντεταγμένων**, αφού, για κάθε $x \in U$, μπορούμε να ορίσουμε τις **συντεταγμένες** (που γενικεύουν τις συνήθεις συντεταγμένες της Αναλυτικής Γεωμετρίας)

$$x_i(x) := pr_i(\phi(x)), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

όπου $pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην i–συνταταγμένη.



1.1.2 Παραδείγματα. (Α) Τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα ανοιχτό $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ και το ζεύγος (A, id_A), και παρατηρούμε ότι η ταυτοτική $\mathrm{id}_A : A \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι 1–1 και η εικόνα της $\mathrm{id}_A(A) = A$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή το ζεύγος (A, id_A) είναι ένας n–διάστατος ολικός χάρτης του A.

(Β) Οι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι. Έστω V ένας n–διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Τότε, υπάρχει ένας γραμμικός ισομορφισμός $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. Το ζεύγος (V, ψ) είναι προφανώς ένας n–διάστατος ολικός χάρτης του V. Τα ανωτέρω ισχύουν ιδιαιτέρως για το χώρο $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ των $m \times n$ πραγματικών πινάκων.

(Γ) Οι κανονικές επιφάνειες στο $\mathbb{R}^3$. Στη Διαφορική Γεωμετρία των Επιφανειών συναντούμε τις έννοιες της κανονικής παραμέτρησης και της κανονικής επιφάνειας. Για διευκόλυνση του αναγνώστη υπενθυμίζουμε αυτές τις έννοιες εδώ: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο, έστω $r : U \to \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και έστω $W := r(U)$. Η τριάδα (U, r, W) ονομάζεται **κανονική παραμέτρηση**, αν ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:

(i) Αν $W \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία, $r : U \to W$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

(ii) Για κάθε $q \in U$, το διαφορικό $Dr(q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι 1–1.

Ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **κανονική επιφάνεια**, αν υπάρχει μια οικογένεια $\mathcal{A} = \{(U_i, r_i, W_i)\}_{i\in I}$ από κανονικές παραμετρήσεις, έτσι ώστε $\{W_i\}_{i\in I}$ να είναι μια ανοιχτή κάλυψη του S.

Κάθε κανονική παραμέτρηση (U, r, W) μιας κανονικής επιφάνειας S ορίζει ένα 2–διάστατο χάρτη της S, τον (W, r^{-1}).

(Δ) Ο μοναδιαίος κύκλος. Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή το σύνολο

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Επάνω στον κύκλο θα ορίσουμε χάρτες με τρεις τρόπους:

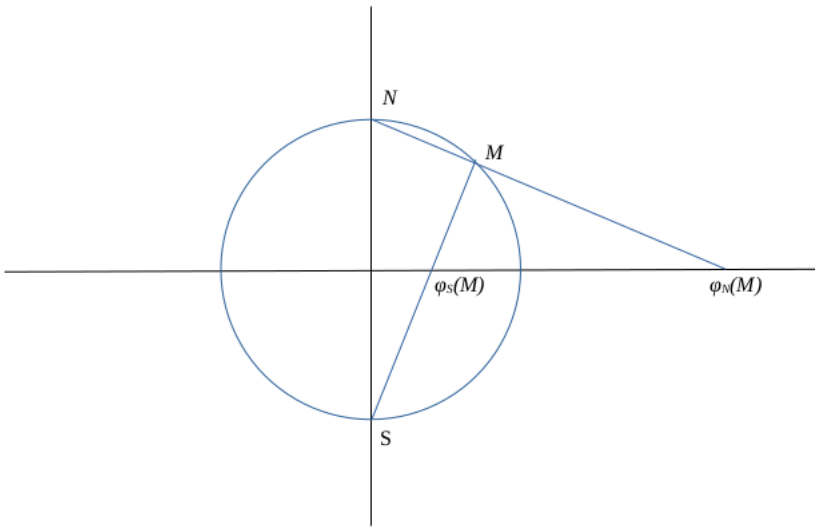
(Δ1) Οι στερεογραφικές προβολές. Σταθεροποιούμε τα σημεία του κύκλου $N = (0, 1)$ και $S = (0, -1)$ και θεωρούμε τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S), όπου $U_N = S^1 \setminus \{N\}$, $U_S = S^1 \setminus \{S\}$, και

$$\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \phi_N(x, y) := \frac{x}{1 - y},$$
$$\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \phi_S(x, y) := \frac{x}{1 + y},$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις ϕ_N και ϕ_S είναι 1–1 και επί του $\mathbb{R}$, με αντίστροφες τις απεικονίσεις

$$\phi_N^{-1}(a) = \left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right),$$
$$\phi_S^{-1}(a) = \left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{1 - a^2}{a^2 + 1}\right).$$

Άρα τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S) είναι 1–διάστατοι χάρτες του S^1.



(Δ2) Τα ημικύκλια. Ορίζουμε το σύνολα

$$U_y^+ := \{(x,y) \in S^1 : y > 0\},$$
$$U_y^- := \{(x,y) \in S^1 : y < 0\}.$$

Δηλαδή, U_y^+ (αντίστ. U_y^-) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημικύκλιο πάνω (αντίστ. κάτω) από τον άξονα $x'Ox$. Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\phi_y^+ : U_y^+ \longrightarrow (-1,1) : (x,y) \mapsto x,$$
$$\phi_y^- : U_y^- \longrightarrow (-1,1) : (x,y) \mapsto x,$$

δηλαδή, ϕ_y^+, ϕ_y^- είναι οι προβολές των προηγούμενων ημικυκλίων στη διάμετρο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη (U_y^+, ϕ_y^+), (U_y^-, ϕ_y^-) είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις ϕ_y^+, ϕ_y^- είναι 1–1. Ακόμη είναι επί του $(-1,1)$ με

$$(\phi_y^+)^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$
$$(\phi_y^-)^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$$

για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα οι εικόνες $\phi_y^+(U_y^+) := \phi_y^-(U_y^-) = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτές.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε τέσσερεις 1–διάστατους χάρτες $(U_i^\alpha\ \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y$ και $\alpha = +, -$ στο S^1.

(Δ3) **Το όρισμα.** Θεωρούμε πάλι τα υποσύνολα U_N και U_S του S^1 και ορίζουμε τις απεικονίσεις $\theta_i : U_i \to \mathbb{R},\ i = N, S$, που στέλνουν κάθε σημείο $A = (x,y) \in U_i$ στη γωνία $\theta_i(x,y)$ που σχηματίζεται μεταξύ OA και Ox και με την υπόθεση $\theta_N(x,y) \in (\pi/2, 5\pi/2)$ και $\theta_S(x,y) \in (-\pi/2, 3\pi/2)$.

Είναι γνωστό ότι οι απεικονίσεις $\theta_i,\ i = N, S,$ είναι 1–1 και επί των αντίστοιχων διαστημάτων, που είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, επομένως τα ζεύγη $(U_N, \theta_N),\ (U_S, \theta_S)$ είναι 1–διάστατοι χάρτες του S^1.

(Ε) Η επιφάνεια της σφαίρας. Επάνω στην σφαίρα

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Θα ορίσουμε χάρτες με δύο τρόπους, ανάλογους των (Δ1) και (Δ2):

(Ε1) Η στερεογραφική προβολή. Θεωρούμε τα σημεία $N = (0,0,1)$ (βόρειος πόλος) και $S = (0,0,-1)$ (νότιος πόλος) της σφαίρας, και θεωρούμε τα ζεύγη (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S), όπου $U_N = S^2 \setminus \{N\}$, $U_S = S^2 \setminus \{S\}$, και

$$\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \to \phi_N(x,y,z) := \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$
$$\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \to \phi_S(x,y,z) := \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right),$$

(στερεογραφικές προβολές). Ελέγχουμε ότι η απεικόνιση ϕ_N είναι 1–1: Αν (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in U_N$ με

$$\phi_N(x_1, y_1, z_1) = \phi_N(x_2, y_2, z_2),$$

δηλαδή,

$$\left(\frac{x_1}{1-z_1}, \frac{y_1}{1-z_1}\right) = \left(\frac{x_2}{1-z_2}, \frac{y_2}{1-z_2}\right)$$

τότε προσθέτοντας τα τετράγωνα των συντεταγμένων και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, έχουμε ότι $z_1 = z_2$, απ' όπου αμέσως συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$. Ανάλογα, δείχνουμε ότι και η ϕ_S είναι 1–1. Επίσης, παρατηρούμε ότι ϕ_N είναι επί του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αν $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$\phi_N^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\right).$$

Άρα $\phi_N(U_N) = \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Με ανάλογο τρόπο, επαληθεύουμε ότι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi_S^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2}\right),$$

δηλαδή, ϕ_S είναι επί του $\mathbb{R}^2$ και $\phi_S(U_S) = \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό.

Έτσι έχουμε δείξει ότι (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S) είναι 2–διάστατοι χάρτες της S^2.

(Ε2) Τα ημισφαίρια. Ορίζουμε το σύνολα

$$\begin{aligned} U_z^+ &:= \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, \\ U_z^- &:= \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}, \\ D_z &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, U_z^+ (αντίστ. U_z^-) είναι το θετικό (αντίστ. το αρνητικό) ημισφαίριο πάνω (αντίστ. κάτω) από το επίπεδο των x, y, χωρίς τον ισημερινό, ενώ D_z είναι ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 1 στο επίπεδο των x, y. Ακόμη, ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} \phi_z^+ &: U_z^+ \to D_z : (x, y, z) \to (x, y), \\ \phi_z^- &: U_z^- \to D_z : (x, y, z) \to (x, y), \end{aligned}$$

δηλαδή, ϕ_z^+, ϕ_z^- είναι οι προβολές των προηγούμενων ημισφαιρίων στο δίσκο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη (U_z^+, ϕ_z^+), (U_z^-, ϕ_z^-) είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απεικονίσεις ϕ_z^+, ϕ_z^- είναι 1–1. Ακόμη είναι επί του D_z με

$$(\phi_z^+)^{-1}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$
$$(\phi_z^-)^{-1}(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

για κάθε $(x,y) \in D_z$. Άρα $\phi_z^+(U_z^+) := \phi_z^-(U_z^-) = D_z \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτά.

Συνολικά μπορούμε να ορίσουμε έξι 2-διάστατους χάρτες $(U_i^\alpha\, \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y, z$ και $\alpha = +, -$ στο S^2.

(Ζ) Καρτεσιανό γινόμενο χαρτών. Έστω (U, ϕ) ένας m-διάστατος χάρτης του M και (V, ψ) ένας n-διάστατος χάρτης του N. Τότε το ζεύγος $(U \times V,\, \phi \times \psi)$, όπου

$$\phi \times \psi : U \times V \longrightarrow \phi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$
$$(\phi \times \psi)(x,y) = (\phi(x), \psi(y))$$

είναι ένας $(m+n)$–διάστατος χάρτης του $M \times N$.

Πράγματι, η απεικόνιση $\phi \times \psi$ είναι 1–1 σαν καρτεσιανό γινόμενο 1–1 απεικονίσεων και η εικόνα της $\phi(U) \times \psi(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών συνόλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1.1. Αν $U = (0,1) \times (0, \pi/2) \subseteq \mathbb{R}^2$ και

$$\phi : U \to \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

αποδείξτε ότι (U, ϕ) είναι ένας χάρτης του $\mathbb{R}^2$.

1.1.2. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x^2 + 2y^2, 3xy)$$

ορίζει σε κατάλληλα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ (ποιά;) χάρτες του $\mathbb{R}^2$.

1.1.3. Ανάλογα προς το Παράδειγμα (Γ) να ορίσετε στην n–σφαίρα

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\ \}$$

δύο οικογένειες n–διάστατων χαρτών: μια μέσω των στερεογραφικών προβολών και μια μέσω των ημικσφαιρίων.

1.1.4. Βρείτε δύο χάρτες για την επιφάνεια του κυλίνδρου $S^1 \times \mathbb{R}$.

1.1.5. Βρείτε δύο χάρτες για την n–διάστατη σαμπρέλλα

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1.$$

1.1.6. Έστω $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$. Αποδείξτε ότι το μονοσύνολο $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ είναι χάρτης του $\mathbb{R}$.

1.2. Συμβιβαστότητα Χαρτών

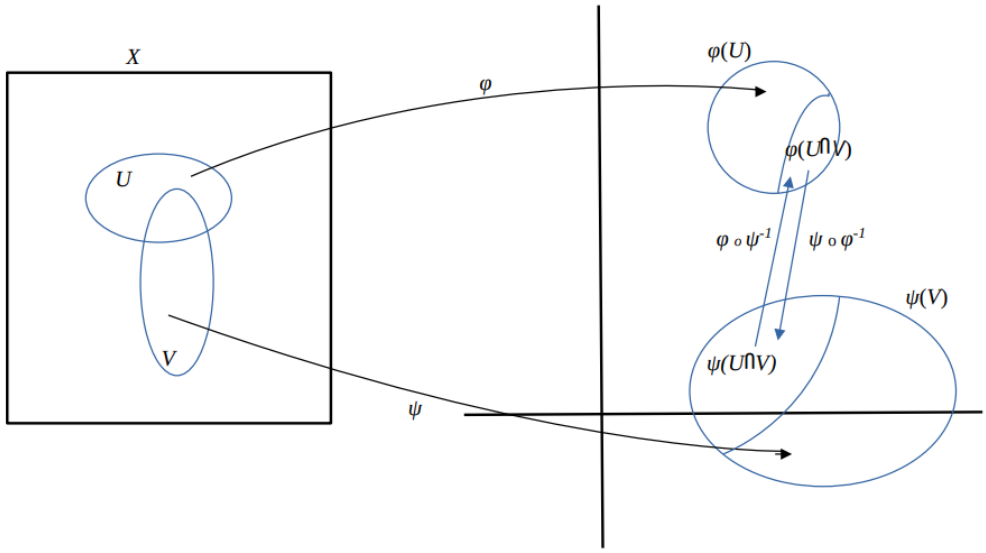
1.2.1 Ορισμός. Έστω (U,ϕ) και (V,ψ) χάρτες του M. Λέμε ότι (U,ϕ) και (V,ψ) είναι $\mathcal{C}^k$**–συμβιβαστοί** ($k=0,1,\ldots,\infty$) σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις:

(Σ1) $U\cap V=\emptyset$.

(Σ2) $U\cap V\neq\emptyset$, $\phi(U\cap V)$ και $\psi(U\cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$ και οι **απεικονίσεις μεταφοράς** ή **αλλαγής των συντεταγμένων**

$$\begin{aligned}\psi\circ\phi^{-1}&:\ \phi(U\cap V)\longrightarrow\psi(U\cap V),\\ \phi\circ\psi^{-1}&:\ \psi(U\cap V)\longrightarrow\phi(U\cap V),\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

είναι $\mathcal{C}^k$-διαφορίσιμες (σε κάθε σημείο των πεδίων ορισμού τους).



Επειδή οι απεικονίσεις (1.2.1) είναι αντίστροφες η μια της άλλης, η προηγούμενη συνθήκη διαφορισιμότητας συνεπάγεται ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι $\mathcal{C}^k$-αμφιδιαφορίσεις.

Για $k=0$, οι απεικονίσεις $\psi\circ\phi^{-1}$ και $\phi\circ\psi^{-1}$ είναι μόνον συνεχείς (επομένως ομοιομορφισμοί).

Στην τελευταία περίπτωση, οι χάρτες (U,ϕ) και (V,ψ) λέγονται **τοπολογικά συμβιβαστοί**. Αν $k=\infty$, οι χάρτες λέγονται **διαφορικά συμβιβαστοί**.

Προφανώς, η διαφορική συμβιβαστότητα των χαρτών συνεπάγεται την $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητά τους, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, και η τελευταία, με τη σειρά της, συνεπάγεται την τοπολογική τους συμβιβαστότητα.

1.2.2 Παρατήρηση. Η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα δύο τεμνόμενων χαρτών συνεπάγεται ότι οι χάρτες έχουν την *ίδια διάσταση*. Πράγματι, έστω ότι (U, ϕ) και (V, ψ) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί χάρτες διάστασης m και n, αντίστοιχα, με $U \cap V \neq \emptyset$. Αν $k \geq 1$, η απεικόνιση μεταφοράς $\psi \circ \phi^{-1}$ είναι μια $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφόριση, έτσι, για κάθε $x \in U \cap V$, το διαφορικό

$$D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

υπάρχει και είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, επομένως $m = n$. Αν $k = 0$, τα ανοιχτά σύνολα $\phi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ στους χώρους $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικά και η ισότητα των διαστάσεων είναι ένα αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Brawer (Invariance of domain) της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Μη τεμνόμενοι χάρτες (του ίδιου χώρου M), δεν είναι κατ' ανάγκη της ίδιας διάστασης.

1.2.3 Παραδείγματα. Παρακάτω αναφερόμαστε στους χάρτες των Παραδειγμάτων 1.1.2.

(Α-Β) Στα Παραδείγματα (Α) και (Β) ο χώρος M έχει ολικό χάρτη. Εν προκειμένω, ισχύει ότι *κάθε χάρτης είναι διαφορικά συμβιβαστός με τον εαυτό του*. Πράγματι: Έστω (U, ϕ) ένας n-διάστατος χάρτης ενός συνόλου M. Τότε

$$\phi(U \cap U) = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτό, από τον ορισμό του χάρτη, και

$$\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U)$$

είναι $\mathcal{C}^\infty$-αμφιδιαφόριση.

(Γ) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια, τότε κάθε ζεύγος κανονικών παραμετρήσεων (U_i, r_i, W_i) και (U_j, r_j, W_j) ορίζει ζεύγος χαρτών (W_i, r_i^{-1}) και (W_j, r_j^{-1}) που είναι διαφορικά συμβιβαστοί: αν $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, τότε $r_i^{-1}(W_i \cap W_j)$ και $r_j^{-1}(W_i \cap W_j)$ είναι ανοιχτά στο $\mathbb{R}^2$, διότι $W_i \cap W_j$ είναι η τομή δύο ανοιχτών υποσυνόλων του S και r_i, r_j είναι ομοιομορφισμοί. Η διαφορισιμότητα της απεικόνισης μεταφοράς $r_j^{-1} \circ (r_i^{-1})^{-1} = r_j^{-1} \circ r_i$ είναι συνέπεια της τοπικής σύμπτωσης κάθε κανονικής παραμέτρησης με ένα γράφημα (παραμέτρηση Monge).

(Δ1–Δ2) Για την απόδειξη ότι οι χάρτες του Παραδείγματος 1.2(Δ1) (αντ. (Δ2)) είναι διαφορικά συμβιβαστοί παραπέμπουμε στην απόδειξη της διαφορικής συμβιβαστότητας των αντίστοιχων χαρτών της μοναδιαίας σφαίρας.

(Δ3) Για την συμβιβαστότητα των χαρτών (U_N, θ_N) και (U_S, θ_S) παρατηρούμε ότι $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$ και

$$\theta_N(U_N \cap U_S) = (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2),$$
$$\theta_S(U_N \cap U_S) = (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2),$$

δηλαδή είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ενώ η απεικόνιση μεταφοράς

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1} : \theta_N(U_N \cap U_S) \longrightarrow \theta_S(U_N \cap U_S)$$

δίνεται από τον τύπο

$$\theta_N \circ \theta_S^{-1}(t) = \begin{cases} t, & t \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ t + 2\pi, & t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases}$$

είναι επομένως $\mathcal{C}^\infty$–αμφιδιαφόριση και οι εν λόγω χάρτες είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(Ε1) Θεωρούμε τους δύο χάρτες των στερεογραφικών προβολών (U_N, ϕ_N), (U_S, ϕ_S). Παρατηρούμε ότι πάλι $U_N \cap U_S = U_N \setminus \{S\} = U_S \setminus \{N\}$, επομένως

$$\begin{aligned} \phi_N(U_N \cap U_S) &= \phi_N(U_N \setminus \{S\}) = \phi_N(U_N) \setminus \{\phi_N(S)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ \phi_S(U_N \cap U_S) &= \phi_S(U_S \setminus \{N\}) = \phi_S(U_S) \setminus \{\phi_S(N)\} \\ &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνες

$$\phi_N(U_N \cap U_N) = \phi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτές. Ακόμη, οι απεικονίσεις

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1},\ \phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

δίνονται από τον τύπο

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1}(a,b) = \phi_N \circ \phi_S^{-1}(a,b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right),$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, δηλαδή είναι $\mathcal{C}^\infty$–απεικονίσεις. Άρα, οι χάρτες (U_N, ϕ_N) και (U_S, ϕ_S) είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

(Ε2) Θεωρούμε τους έξι χάρτες $(U_i^\alpha\, \phi_i^\alpha)$, με $i = x, y, z$ και $\alpha = +, -$ και τους τρεις δίσκους $D_i,\ i = x, y, z$. Αποδεικνύουμε τη συμβιβαστότητα των $(U_x^+\, \phi_x^+)$ και $(U_y^-\, \phi_y^-)$. Έχουμε

$$U_x^+ \cap U_y^- = \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0,\ y < 0\},$$

επομένως

$$U_x^+ \cap U_y^- \ni (x, y, z) \longmapsto \phi_x^+(x, y, z) = (y, z) \in D_x,$$

με $y < 0$, δηλαδή

$$\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = D_x \cap \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Άρα, $\phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$ είναι το εσωτερικό του μισού του δίσκου D_x και είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Όμοια,

$$\phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-) = D_y \cap \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι ανοιχτό.

Για τη διαφορισιμότητα των απεικονίσεων μεταφοράς, παρατηρούμε ότι, για κάθε $(y, z) \in \phi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλαδή για κάθε $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ με $y^2 + z^2 < 1$ και $y < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1})(y, z) &= \phi_y^-(\sqrt{1 - y^2 - z^2},\, y,\, z)\\ &= (\sqrt{1 - y^2 - z^2},\, z),\end{aligned}$$

επομένως η απεικόνιση $\phi_y^- \circ (\phi_x^+)^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της, και, για κάθε $(x, z) \in \phi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλαδή, για κάθε $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2 + z^2 < 1$ και $x > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1})(x, z) &= \phi_x^+(x,\, -\sqrt{1 - x^2 - z^2},\, z)\\ &= (-\sqrt{1 - x^2 - z^2},\, z),\end{aligned}$$

σαν αποτέλεσμα, $\phi_x^+ \circ (\phi_y^-)^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^\infty$–διαφορίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε τη συμβιβαστότητα κάθε άλλου ζεύγους από τους ανωτέρω χάρτες.

(Ζ) Αν (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί m–διάστατοι χάρτες του M και (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2) είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί n–διάστατοι χάρτες του N, τότε οι χάρτες $(U_1 \times V_1, \phi_1 \times \psi_1)$ και $(U_2 \times V_2, \phi_2 \times \psi_2)$ του $M \times N$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί.

Πράγματι, αν $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$, τότε $U_1 \cap U_2,\ V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ και

$$(\phi_1 \times \psi_1)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \\ = \phi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2) \tag{1.2.2}$$

$$(\phi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \\ = \phi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2) \tag{1.2.2$'$}$$

είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, σαν καρτεσιανά γινόμενα ανοιχτών συνόλων και η απεικόνιση μεταφοράς

$$(\phi_2 \times \psi_2) \circ (\phi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \ \times \ (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$$

που στέλνει το σύνολο (1.2.2) στο σύνολο (1.2.2$'$) είναι $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφόριση, σαν καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{C}^k$–αμφιδιαφορίσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.2.1. Αποδείξτε ότι κάθε χάρτης (U, ϕ) είναι διαφορικά συμβιβαστός με τον εαυτό του.

1.2.2. Να εξετάσετε αν ο χάρτης (U, ϕ) της Άσκησης 1.1.1 είναι διαφορικά συμβιβαστός με τον ταυτοτικό χάρτη $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ του $\mathbb{R}^2$.

1.2.3. Αποδείξτε ότι οι χάρτες $(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)$ του S^2 (Παράδειγμα 1.1.2(Γ1)) είναι συμβιβαστοί με τους χάρτες $(U_i^\alpha, \phi_i^\alpha)$ (Παράδειγμα 1.1.2(Γ2)).

1.2.4. Εξετάστε αν ο χάρτης $(\mathbb{R}, \psi)$ της Άσκησης 1.1.6 είναι τοπολογικά ή διαφορικά συμβιβαστός με το χάρτη $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$.

1.2.5. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστότητα των χαρτών *δεν είναι* σχέση ισοδυναμίας.

1.2.6. Έστω (U, ϕ) ένας m–διάστατος χάρτης του M, έστω $y \in \mathbb{R}^m$ και έστω

$$\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m : x \to x + y$$

η αντίστοιχη μεταφορά. Αποδείξτε ότι οι χάρτες (U, ϕ) και $(U, \mu \circ \phi)$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί.

1.2.7. Αποδείξτε ότι κάθε χάρτης (U, ϕ) ενός συνόλου M είναι διαφορικά συμβιβαστός με ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος χαρτών.

1.3. Άτλαντες

1.3.1 Ορισμός. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$$

μια οικογένεια από χάρτες του M. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται $\mathcal{C}^k$–**άτλαντας του** M, αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(Α1) $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μια κάλυψη του M, και

(Α2) γιά κάθε $i, j \in I$, οι χάρτες $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ είναι $\mathcal{C}^k$–συμβιβαστοί.

Ένας $\mathcal{C}^0$–άτλαντας του M θα λέγεται **τοπολογικός άτλαντας**, ενώ ένας $\mathcal{C}^\infty$–άτλαντας θα λέγεται **διαφορικός άτλαντας**. Αν όλοι οι χάρτες ενός άτλαντα $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση $m \in \mathbb{N}$, ο $\mathcal{A}$ ονομάζεται m–**διάστατος**.

1.3.2 Παραδείγματα. Αναφερόμαστε πάλι στα Παραδείγματα 1.1.2:

(Α) Για κάθε ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}^m$, το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} = \{(A, \mathrm{id}_A)\}$$

είναι ένας m–διάστατος διαφορικός άτλαντας του A.

(Β) Έστω V ένας n–διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Το μονοσύνολο

$$\mathcal{A} := \{(V, \psi)\}$$

είναι ένας n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του V.

(Γ) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μια κανονική επιφάνεια και $\{(U_i, r_i, W_i) : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κανονικές παραμετρήσεις της S, έτσι ώστε $\{W_i\}_{i\in I}$ να είναι μια ανοιχτή κάλυψη της S, τότε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{(W_i, r_i^{-1}) \ : \ i \in I\}$$

είναι ένας 2–διάστατος διαφορικός άτλαντας της S.

(Δ) Οι οικογένειες

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},\\
\mathcal{B} &:= \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y\},\\
\mathcal{C} &:= \{(U_N, \theta_N),\ (U_S, \theta_S)\}
\end{aligned}$$

είναι 1–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες του μοναδιαίου κύκλου.

(Ε) Αντίστοιχα με τον κύκλο, οι οικογένειες

$$\mathcal{A} := \{(U_N, \phi_N),\ (U_S, \phi_S)\},$$
$$\mathcal{B} := \{(U_i^a, \phi_i^a) \mid a = +, - \text{ και } i = x, y, z\}$$

είναι 2–διάστατοι διαφορικοί άτλαντες της μοναδιαίας σφαίρας.

(Ζ) Αν $\mathcal{A}$ είναι ένας m–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του M και $\mathcal{B}$ ένας n–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του N, τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{\{(U \times V,\ \phi \times \psi) : (U, \phi) \in \mathcal{A},\ (V, \psi) \in \mathcal{B}\}.$$

είναι ένας $(m+n)$–διάστατος $\mathcal{C}^k$–άτλαντας του $M \times N$.

Παρακάτω οι άτλαντες που εμφανίζονται θα θεωρούνται διαφορικοί, εκτός κι αν ρητά αναφέρεται άλλη τάξη διαφορισιμότητας. Συμβολίζουμε με $\mathfrak{A}_m(M)$ το σύνολο όλων των m–διάστατων διαφορικών ατλάντων επί ενός συνόλου $M \neq \emptyset$.

Στο σύνολο $\mathfrak{A}_m(M)$ ορίζονται δύο σχέσεις:

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \tag{1.3.1}$$

και

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m(M). \tag{1.3.2}$$

Είναι φανερό ότι η (1.3.1) είναι *σχέση μερικής διάταξης*. Αποδεικνύεται ότι η (1.3.2) είναι *σχέση ισοδυναμίας*.

1.3.3 Ορισμός. Θα λέμε ότι οι άτλαντες $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m(M)$ είναι **διαφορικά συμβιβαστοί** αν είναι ισοδύναμοι ως προς την (1.3.2).

Η ένωση δύο ατλάντων είναι πάντοτε μια κάλυψη του M. Από την άλλη μεριά, αν $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, τότε είτε οι δύο χάρτες ανήκουν στον ίδιο άτλαντα, ή ο ένας ανήκει στον $\mathcal{A}$ και ο άλλος ανήκει στον $\mathcal{B}$. Στην πρώτη περίπτωση, η συμβιβαστότητά τους εξασφαλίζεται από τον Ορισμό 1.3.1, επομένως αρκεί να ελέγξουμε την συμβιβαστότητα στην δεύτερη περίπτωση. Άρα,

> *$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, αν και μόνον αν, κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι διαφορικά συμβιβαστός με κάθε χάρτη του $\mathcal{B}$.*

Ακόμη σημειώνουμε ότι αν $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, τότε $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_m(M)$, δηλαδή,

η σχέση διάταξης (1.3.1) *συνεπάγεται την σχέση συμβιβαστότητας* (1.3.2).

1.3.4 Ορισμός. Ένας (m–διάστατος) διαφορικός άτλαντας $\mathcal{A}$ επί του M ονομάζεται **μέγιστος**, αν είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathfrak{A}_m(M)$, ως προς την διάταξη (1.3.1), δηλαδή, αν

$$\mathcal{B} \in \mathfrak{A}^k_m(M),\ \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} = \mathcal{B}.$$

Ισχύει το επόμενο

1.3.5 Θεώρημα. *Για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_m(M)$, υπάρχει ένα μοναδικός μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A}^* \in \mathfrak{A}_m(M)$, με $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.* □

Έστω τώρα ένας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_m(M)$ και η κλάση $[\mathcal{A}]$ ως προς την σχέση ισοδυναμίας (1.3.2). Ο μοναδικός μέγιστος διαφορικός άτλαντας που περιέχει τον $\mathcal{A}$ είναι η ένωση $\mathcal{A}^*$ όλων των ατλάντων $\mathcal{B}$ που είναι ισοδύναμοι (: διαφορικά συμβιβαστοί) με τον $\mathcal{A}$, δηλ.

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B}. \tag{1.3.5}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}'$ το σύνολο όλων των m–διάστατων χαρτών του M, που είναι διαφορικά συμβιβαστοί με όλους τους χάρτες του $\mathcal{A}$. Εύκολα δείχνει κανείς ότι ο $\mathcal{A}'$ είναι ένας μέγιστος διαφορικός άτλαντας που περιέχει τον $\mathcal{A}$, δηλ.

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}^*. \tag{1.3.6}$$

1.3.6 Ορισμός. Λέμε ότι ένας μέγιστος άτλαντας $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_m(M)$ ορίζει μια **διαφορική δομή επί του** M, και ότι το ζεύγος $(M, \mathcal{A})$ είναι μια διαφορική **πολλαπλότητα**. Αν όλοι οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση m, λέμε ότι η m είναι **η διάσταση της πολλαπλότητας** και ότι ο χώρος $\mathbb{R}^m$ είναι το **μοντέλο της πολλαπλότητας**.

1.3.7 Παράδειγμα. Γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ είναι n–διάστατος ολικός χάρτης του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ είναι n–διάστατος διαφορικός άτλαντας του $\mathbb{R}^n$. Άρα θεωρώντας τον αντίστοιχο μέγιστο $\mathcal{A}^*$ παίρνουμε μια διαφορική πολλαπλότητα $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}^*)$. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν ως την *συνήθη διαφορική δομή του* $\mathbb{R}^n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3.1. Στο Παράδειγμα 1.3.7, βρείτε τους χάρτες του μέγιστου άτλαντα.

1.3.2. Αποδείξτε ότι κάθε χάρτης (U, ϕ) ενός συνόλου M είναι διαφορικά συμβιβαστός με ένα άπειρο (μη αριθμήσιμο) πλήθος χαρτών.

1.4. Διαφορίσιμες απεικονίσεις

Η διαφορισιμότητα των απεικονίσεων ορίζεται για απεικονίσεις με πεδίο ορισμού *ανοιχτό* υποσύνολο ευκλείδειου χώρου. Γι' αυτό, για να ορίσουμε διαφορισιμότητα απεικονίσεων πάνω σε πολλαπλότητες, γενικεύουμε πρώτα την έννοια του ανοιχτού συνόλου, σε κατάλληλα υποσύνολα των πολλαπλοτήτων.

1.4.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ ένας m-διάστατος διαφορικός άτλαντας επί του M (όχι κατ' ανάγκη μέγιστος). Ένα υποσύνολο A του M θα λέγεται **ανοιχτό** αν, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\phi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Αν $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του M που ορίζονται από τον $\mathcal{A}$, ως ανωτέρω, τότε η $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι μια τοπολογία επί του M. Δηλαδή:

(*i*) $\emptyset, M \in \tau_{\mathcal{A}}$.

(*ii*) Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια με $A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$, για κάθε $i \in I$, τότε $A := \cup_{i\in I} A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$.

(*iii*) Αν $A, B \in \tau_{\mathcal{A}}$, τότε $A \cap B \in \tau_{\mathcal{A}}$.

1.4.2 Παραδείγματα. (1) Αν θεωρήσουμε τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ που ορίζει την συνήθη διαφορική δομή στον $\mathbb{R}^n$, τότε $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ αν και μόνον αν το A ανήκει στην συνήθη (μετρική) τοπολογία του $\mathbb{R}^n$.

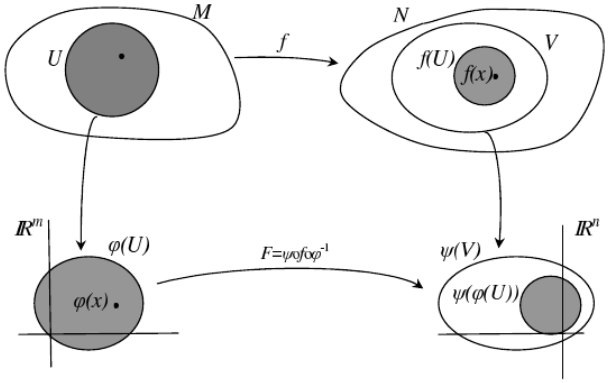
(2) Αν $\mathcal{A}$ είναι άτλαντας επί του M και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, τότε $U \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες με αντίστοιχες διαστάσεις m και n.

1.4.3 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : M \to N$ ονομάζεται **διαφορίσιμη στο** $x \in M$, αν υπάρχουν $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ τέτοιοι ώστε : $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ και η απεικόνιση

$$F := \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$ (σύμφωνα με τη συνήθη έννοια της διαφορισιμότητας σε ευκλείδειους χώρους). Ονομάζουμε την απεικόνιση F **τοπική παράσταση** της f μέσω των χαρτών (U, ϕ) και (V, ψ).



Μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ θα ονομάζεται $\mathcal{C}^r$**–διαφορίσιμη**, αν είναι $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμη, σε κάθε $x \in M$.

Σε όλα τα επόμενα, *διαφορίσιμη* απεικόνιση, σημαίνει $\mathcal{C}^\infty$*–διαφορίσιμη* απεικόνιση.

1.4.4 Παραδείγματα. (1) Για κάθε πολλαπλότητα $(M, \mathcal{A})$, η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id_M} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ είναι διαφορίσιμη.

(2) Έστω $(M, \mathcal{A})$ διαφορική πολλαπλότητα και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το σύνολο $\phi(U) \in \mathbb{R}^m$ σαν διαφορική πολλαπλότητα με δομή που ορίζεται από τον ολικό χάρτη $(\phi(U), \mathrm{id}_{\phi(\mathrm{U})})$. Τότε η $\phi : U \to \phi(U)$ είναι αμφιδιαφόριση.

(3) Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : U \to \mathbb{R}^m$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη σαν απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων $(U, \{(U, id_U)\}')$ και $(\mathbb{R}^n, \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}')$, αν και μόνον αν η f είναι διαφορίσιμη σαν (τοπικά ορισμένη) απεικόνιση μεταξύ ευκλείδειων χώρων.

(4) Αν $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ είναι πολλαπλότητες και το γινόμενο $M \times N$ εφοδιαστεί με τον άτλαντα $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (βλ. Παράδειγμα 1.3.2(Z)), τότε οι προβολές $p_M : M \times N \to M$ και $p_N : M \times N \to N$ είναι διαφορίσιμες.

(5) Αν $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, $(M \times N, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ είναι πολλαπλότητες, όπως προηγουμένως, και $x_o \in M$, $y_o \in N$, οι εμφυτεύσεις

$$i_{y_o} : M \longrightarrow M \times N : x \longmapsto (x, y_o),$$
$$i_{x_o} : N \longrightarrow M \times N : y \longmapsto (x_o, y)$$

είναι διαφορίσιμες.

Στην πρόταση που ακολουθεί, καταγράφονται οι βασικές ιδιότητες των διαφορίσιμων απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων.

1.4.5 Πρόταση. *(1) Μια απεικόνιση $f : M \to N$ που είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, είναι συνεχής στο x.*

(2) Η διαφορισιμότητα μιας $f : M \to N$ δεν εξαρτάται από το θεωρούμενο ζεύγος χαρτών.

(3) (Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος Ι) Υποθέτουμε ότι οι $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ και $(Z, \mathcal{C})$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες και ότι οι απεικονίσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ είναι διαφορίσιμες στα $x \in X$ και $f(x) \in Y$, αντίστοιχα. Τότε η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο x.

(4) Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Μια πραγματική απεικόνιση $f : M \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$, αν υπάρχει $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τέτοιος ώστε η σύνθεση

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$.

(5) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ πολλαπλότητες και έστω ότι το γινόμενο $M \times N$ εφοδιάζεται με τον άτλαντα $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Τότε μια $f : Z \to M \times N$ είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν οι

$$f_M := p_M \circ f : Z \longrightarrow M,$$
$$f_N := p_N \circ f : Z \longrightarrow N$$

είναι διαφορίσιμες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4.1. Έστω $\emptyset \neq M$, $\mathcal{A}$ άτλαντας επί του M και $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Να δείξετε ότι για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, το ζεύγος $(A \cap U, \phi|_{A \cap U})$ είναι χάρτης του M, που ανήκει στον μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}'$.

1.4.2. Αποδείξτε ότι κάθε σταθερή απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι διαφορίσιμη.

1.4.3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τους μέγιστους διαφορικούς άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ τους επαγόμενους από τον ταυτοτικό χάρτη (Παράδειγμα 1.1.2(Α)) και το χάρτη $(\mathbb{R}, \psi)$ (Ασκηση 1.1.6), αντίστοιχα, και θέτουμε

$$f(x) = x^{1/3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Να εξετάσετε την διαφορισιμότητα των απεικονίσεων:

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A})$$
$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$
$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A})$$
$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

1.4.4. Έστω M, N μη κενά σύνολα και $f : M \to N$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Αν ένα από τα σύνολα έχει διαφορική δομή, δείξτε ότι το άλλο δέχεται διαφορική δομή που κάνει την f αμφιδιαφόριση.

1.4.5. Έστω M_i, N_i διαφορικές πολλαπλότητες και $f_i : M_i \to N_i$, $i = 1, 2$. Αποδείξτε ότι

$$f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2 :$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

είναι διαφορίσιμη, αν και μόνον αν και οι δύο f_i είναι διαφορίσιμες.

1.4.6. Έστω M, N, P διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \times N \to P$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Για ένα σταθεροποιημένο $(x_o, y_o) \in M \times N$, να δείξετε ότι οι μερικές απεικονίσεις

$$f_{x_o} : N \longrightarrow P : y \longmapsto f(x_o, y)$$
$$f_{y_o} : M \longrightarrow P : x \longmapsto f(x, y_o)$$

είναι διαφορίσιμες.

1.4.7. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε, για κάθε $x \in M$, υπάρχει ένα χάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in V$ και $\psi(x) = 0$. Από την άλλη μεριά, υπάρχει ένας χάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $x \in W$ και $\chi(V) = \mathbb{R}^m$.

Κεφάλαιο 2

Εφαπτόμενη δέσμη και Διαφορικό

Σε όλο το παρόν κεφάλαιο $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

2.1. Ο εφαπτόμενος χώρος

2.1.1 Ορισμός. Μια **διαφορίσιμη καμπύλη** της πολλαπλότητας M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\alpha : J \to M$, όπου J είναι ένα ανοιχτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ με $0 \in J$. Λέμε ότι η καμπύλη α **περνά από το σημείο** $x \in M$, αν $\alpha(0) = x$.

Για ευκολία, μπορεί να θεωρούμε το J σαν συμμετρικό διάστημα της μορφής $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

2.1.2 Ορισμός. Έστω α, β διαφορίσιμες καμπύλες επί του M που περνούν από το $x \in M$. Λέμε ότι α, β **εφάπτονται στο** x, ή ότι **είναι ισοδύναμες στο** x, αν υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) επί του M με $x \in U$ και

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0). \tag{2.1.1}$$

Η επαφή των καμπυλών, που ορίστηκε ανωτέρω, είναι ανεξάρτητη του χάρτη (U, ϕ), όπως φαίνεται από την επόμενη

2.1.3 Πρόταση. *Αν α, β εφάπτονται στο $x \in M$, τότε, για κάθε χάρτη (V, ψ) του M με $x \in V$ ισχύει $(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0)$.*

Απόδειξη. Επειδή α, β εφάπτονται στο $x = \alpha(0) = \beta(0)$, υπάρχει ένας χάρτης (U, ϕ) με $x \in U$ και $(\phi\circ\alpha)'(0) = (\phi\circ\beta)'(0)$. Αν (V, ψ) είναι ένας άλλος χάρτης με $x \in V$, τότε

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) &= ((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))'(0) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \alpha)(0))]((\phi \circ \alpha)'(0)) \\ &= [D(\psi \circ \phi^{-1})((\phi \circ \beta)(0))]((\phi \circ \beta)'(0)) \\ &= ((\psi \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \beta))'(0) \\ &= (\psi \circ \beta)'(0).\end{aligned}$$

□

2.1.4 Πόρισμα. *Η επαφή των καμπυλών σε ένα $x \in M$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Λόγω του προηγούμενου πορίσματος, το σύνολο των διαφορίσιμων καμπυλών που περνούν από ένα $x \in M$ διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $[(\alpha, x)]$ την κλάση μιας τέτοιας καμπύλης α.

2.1.5 Ορισμός. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας όλων των διαφορίσιμων καμπυλών επί του M που περνούν από το x θα λέγεται **εφαπτόμενος χώρος του M στο x** και θα συμβολίζεται με T_xM. Τα στοιχεία του T_xM θα λέγονται **εφαπτόμενα διανύσματα στο x** και συνήθως θα συμβολίζονται με u, v, w, κλπ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο T_xM μπορεί να εφοδιαστεί με δομή διανυσματικού χώρου.

2.1.6 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Ακόμη, έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε η απεικόνιση*

$$\bar{\phi} : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^m : [(\alpha, x)] \longmapsto (\phi \circ \alpha)'(0)$$

είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

Απόδειξη. (i) Για να δείξουμε ότι η $\bar{\phi}$ είναι καλά ορισμένη, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης α που ορίζει την κλάση $[(\alpha, x)]$. Πράγματι, έστω $\beta \in [(\alpha, x)]$. Τότε η β εφάπτεται στην α, δηλαδή, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, που είναι η ζητούμενη ισότητα.

(ii) Η $\bar{\phi}$ είναι 1–1: Έστω $[(\alpha, x)], [(\beta, x)] \in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = \bar{\phi}([(\beta, x)])$. Τότε, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$, δηλαδή, α και β είναι εφαπτόμενες στο x και $[(\alpha, x)] = [(\beta, x)]$.

(iii) Τέλος δείχνουμε ότι $\bar{\phi}$ είναι επί: Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m : t \mapsto \phi(x) + th.$$

Τότε ε είναι διαφορίσιμη με $\varepsilon(0) = \phi(x)$ και $\varepsilon'(0) = h$. Επειδή η ε είναι συνεχής, και $\phi(U)$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $\phi(x) = \varepsilon(0)$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα J που περιέχει το 0, με $\varepsilon(J) \subseteq \phi(U)$, έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την σύνθεση $\alpha := \phi^{-1} \circ \varepsilon|_J : J \to U \subseteq M$. Τότε α είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη επί του M με $\alpha(0) = x$ και

$$\bar{\phi}([(\alpha, x)]) = (\phi \circ \alpha)'(0) = \varepsilon'(0) = h. \qquad \square$$

2.1.7 Πόρισμα. *Για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$, είναι $\bar{\phi}^{-1}(h) = [(\alpha, x)]$, όπου*

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(x) + th),$$

με t σε ένα κατάλληλο διάστημα J.

Η απεικόνιση $\bar{\phi}$ ταυτίζει τα σύνολα T_xM και $\mathbb{R}^m$. Επομένως, μπορούμε να μεταφέρουμε την αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^m$ στο T_xM, θέτοντας

$$\begin{aligned} u + v &:= \bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(u) + \bar{\phi}(v)) \\ \lambda u &:= \bar{\phi}^{-1}(\lambda \bar{\phi}(u)) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

για κάθε $u, v \in T_xM$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προφανώς έχουμε το επόμενο

2.1.8 Θεώρημα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε οι πράξεις (2.1.2) ορίζουν στον T_xM δομή διανυσματικού χώρου, έτσι ώστε η $\bar{\phi}$ να γίνεται γραμμικός ισομορφισμός.*

Αν $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \cap V$, τότε υπάρχουν δύο απεικονίσεις

$$\bar{\phi},\ \bar{\psi} : T_xM \to \mathbb{R}^m.$$

Γενικά, $\bar{\phi} \neq \bar{\psi}$. Όμως, ορίζουν την ίδια δομή διανυσματικού χώρου (: τις ίδιες πράξεις) επί του M: δηλαδή, αν

$$\begin{aligned} u \oplus v &:= \bar{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(u) + \bar{\psi}(v)) \\ \lambda \circ u &:= \bar{\psi}^{-1}(\lambda \bar{\psi}(u)) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

είναι οι πράξεις που ορίζονται από τον (V, ψ), τότε

$$\begin{aligned} u \oplus v &= u + v, \\ \lambda \circ u &= \lambda u \end{aligned}$$

η, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(u)+\bar{\psi}(v)) &= \bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(u)+\bar{\phi}(v)), \\ \bar{\psi}^{-1}(\lambda\bar{\psi}(u)) &= \bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Συνθέτοντας με την $\bar{\psi}$, δίνουμε στις ισότητες (2.1.4) την (επίσης ισοδύναμη) μορφή

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u)+\bar{\psi}(v) &= \bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(u)+\bar{\phi}(v)), \\ \lambda\bar{\psi}(u) &= \bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}(\lambda\bar{\phi}(u)). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Παρατηρούμε ότι οι τελευταίες ισότητες ισχύουν αν και μόνον αν η $\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1}$ είναι γραμμική. Ισχύει το επόμενο

2.1.9 Λήμμα. *Αν $(M,\mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x\in M$ και $(U,\phi),(V,\psi)\in\mathcal{A}$ με $x\in U\cap V$, τότε*

$$\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1} = D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(x))$$

Απόδειξη. Έστω $h\in\mathbb{R}^m$. Επειδή $\bar{\phi}$ είναι ισομορφισμός, υπάρχει ένα μοναδικό $[(\alpha,x)]\in T_xM$ με $\bar{\phi}([(\alpha,x)])=h$. Επομένως,

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\circ\bar{\phi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([(\alpha,x)]) = (\psi\circ\alpha)'(0) \\ &= (\psi\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha)'(0) \\ &= [D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi\circ\alpha(0))]((\phi\circ\alpha)'(0)) \\ &= [D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(x))]((\phi\circ\alpha)'(0)) \\ &= [D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(x))](h), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Έτσι έχει αποδειχθεί το επόμενο

2.1.10 Θεώρημα. *Η δομή διανυσματικού χώρου του T_xM δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη (U,ϕ) που την ορίζει.* □

Θεωρούμε ένα χάρτη (U,ϕ) και $x\in U$. Ο γραμμικός ισομορφισμός $\bar{\phi}$ αντιστρέφει την κανονική βάση $\{e_i\}_{i=1,\ldots,m}$ του $\mathbb{R}^m$, σε βάση του T_xM.

2.1.11 Ορισμός. Η βάση $\{\bar{\phi}^{-1}(e_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ του T_xM, ονομάζεται **κανονική βάση του T_xM ως προς τον** (U,ϕ). Τα διανύσματα $\bar{\phi}^{-1}(e_i)$ λέγονται **κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του T_xM ως προς τον** (U,ϕ) και συμβολίζονται με

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := \bar{\phi}^{-1}(e_i)\,,\quad i=1,\ldots,m. \tag{2.1.6}$$

Στην ειδική περίπτωση της τετριμμένης 1–διάστατης πολλαπλότητας $\mathbb{R}$, το κανονικό βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα στον $T_t\mathbb{R}$, ως προς το χάρτη $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ συμβολίζεται με

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t := (\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}})^{-1}(1). \tag{2.1.7}$$

Επομένως, κάθε $u \in T_xM$ μπορεί να πάρει την μορφή

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x . \tag{2.1.8}$$

Εφαρμόζοντας την $\bar{\phi}$ στα δύο μέλη της ανωτέρω ισότητας, παίρνουμε

$$\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{\phi}\Big(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\bar{\phi}(u) = (\phi \circ \alpha)'(0) = ((x_1 \circ \alpha)'(0), \ldots, (x_m \circ \alpha)'(0)),$$

όπου $x_i = pr_i \circ \phi$ οι συντεταγμένες του χάρτη (U, ϕ), βρίσκουμε για τους συντελεστές λ_i ότι

$$\lambda_i = (x_i \circ \alpha)'(0), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2.1.9}$$

και για το διάνυσμα u ότι

$$u = \sum_{i=1}^{m} (x_i \circ \alpha)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x . \tag{2.1.10}$$

2.2. Σημειακό Διαφορικό

2.2.1 Ορισμός. Έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των διαφορικών πολλαπλοτήτων $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ και $x \in M$. Ονομάζουμε **(σημειακό) διαφορικό της f στο x** την απεικόνιση

$$T_xf : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N : [(\alpha, x)] \mapsto [(f \circ \alpha, f(x))].$$

Παρατηρούμε ότι το σημειακό διαφορικό της f στο x είναι καλά ορισμένο: $[(f\circ\alpha, f(x))]\in T_{f(x)}N$, αφού $f\circ\alpha$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη στην N που περνά από το $f(\alpha(0))=f(x)$, για κάθε $[(\alpha,x)]\in T_xM$, άρα υπάρχει η κλάση της καμπύλης $f\circ\alpha$ στον $T_{f(x)}N$. Αποδεικνύουμε ότι $[(f\circ\alpha,f(x))]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης α: αν β είναι άλλη διαφορίσιμη καμπύλη στην κλάση $[(\alpha,x)]$, τότε

$$(\phi\circ\alpha)'(0)=(\phi\circ\beta)'(0),$$

για κάθε χάρτη $(U,\phi)\in\mathcal{A}$, με $x\in U$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν χάρτες $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ και $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $x\in U$, $f(U)\subseteq V$, έτσι ώστε η αντίστοιχη τοπική παράσταση $\psi\circ f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη. Έτσι, για τις διαφορισιμες καμπύλες $f\circ\alpha$ και $f\circ\beta$, έχουμε

$$\begin{aligned}(\psi\circ(f\circ\alpha))'(0)&=((\psi\circ f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\alpha))'(0)\\&=[D(\psi\circ f\circ\phi^{-1})((\phi\circ\alpha)(0))]((\phi\circ\alpha)'(0))\\&=[D(\psi\circ f\circ\phi^{-1})((\phi\circ\beta)(0))]((\phi\circ\beta)'(0))\\&=((\psi\circ f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\beta))'(0)\\&=(\psi\circ(f\circ\beta))'(0),\end{aligned}$$

δηλαδή, $[(f\circ\alpha,f(x))]=[(f\circ\beta,f(x))]$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θα δείξουμε τώρα την επόμενη

2.2.2 Πρόταση. *Έστω $f:M\to N$ διαφορίσιμη στο $x\in M$. Τότε το διαφορικό $T_xf:T_xM\to T_{f(x)}N$ της f στο x είναι μια γραμμική απεικόνιση.*

Η πρόταση είναι άμεση συνέπεια του κατωτέρω λήμματος:

2.2.3 Λήμμα. *Έστω $f:M\to N$ διαφορίσιμη στο $x\in M$. Αν (U,ϕ), (V,ψ) είναι χάρτες επί των M, N, αντίστοιχα, με $x\in U$ και $f(U)\subseteq V$, και $F=\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ είναι η αντίστοιχη τοπική παράσταση της f, τότε*

$$\bar\psi\circ T_xf=DF(\phi(x))\circ\bar\phi, \tag{2.2.1}$$

δηλαδή, είναι μεταθετικό το επόμενο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{\;T_xf\;} & T_{f(x)}N \\ \downarrow{\scriptstyle\bar\phi} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\psi} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[D(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(x))]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Απόδειξη. Λόγω της διαφορισιμότητας της f στο x, η τοπική παράσταση F είναι διαφορίσιμη στο $\phi(x)$, έτσι το σύνηθες διαφορικό $DF(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ορίζεται. Θεωρούμε τους γραμμικούς ισομορφισμούς $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{\psi} : T_{f(x)}N \to \mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε ότι η (2.2.1) ισχύει: Έστω $[(\alpha, x)] \in T_xM$. Τότε

$$\begin{aligned}(DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi})([(\alpha, x)]) &= [D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha(0)))]((\phi \circ \alpha)'(0)) \\ &= ((\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \alpha))'(0) \\ &= (\psi \circ (f \circ \alpha))'(0) \\ &= \bar{\psi}([(f \circ \alpha, f(x))]) \\ &= (\bar{\psi} \circ T_x f)([(\alpha, x)])\end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί. □

Επειδή οι κατακόρυφες απεικονίσεις στο προηγούμενο διάγραμμα είναι γραμμικοί ισομορφισμοί, έχουμε

$$T_x f = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\phi(x)) \circ \bar{\phi},$$

δηλ. το $T_x f$ είναι σύνθεση τριών γραμμικών απεικονίσεων, πράγμα που αποδεικνύει την Πρόταση 2.2.2.

2.2.4 Παραδείγματα. (Α) Είναι άμεσο ότι

$$T_x \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_xM}, \tag{2.2.2}$$

για κάθε $x \in M$.

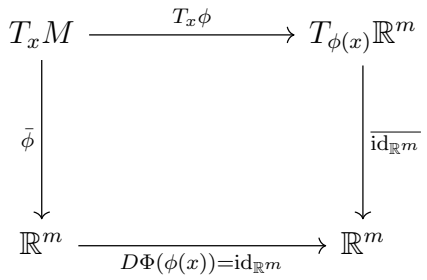
(Β) Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε η απεικόνιση $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη, άρα έχει διαφορικό

$$T_x\phi : T_xM \to T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m.$$

Θεωρώντας το ζεύγος των χαρτών (U, ϕ) του M και $(\mathbb{R}^m, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m})$ του $\mathbb{R}^m$, παίρνουμε την τοπική παράσταση της ϕ

$$\Phi := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\phi(U)} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}.$$

και (σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.3) το μεταθετικό διάγραμμα



απ' όπου προκύπτει ότι

$$\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}} \circ T_x\phi = \bar{\phi}. \tag{2.2.3}$$

2.2.5 Πρόταση. *(Κανόνας της Αλυσίδας, μέρος ΙΙ) Αν $f : (M, \mathcal{A}) \to (N, \mathcal{B})$ και $g : (N, \mathcal{B}) \to (P, \mathcal{C})$ είναι διαφορίσιμες στα σημεία $x \in M$ και $f(x) \in N$, αντίστοιχα, τότε*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f. \tag{2.2.4}$$

Απόδειξη. Έστω $[(\alpha, x)] \in T_xM$. Τότε

$$\begin{aligned}(T_x(g \circ f))([(\alpha, x)]) &= [((g \circ f) \circ \alpha, (g \circ f)(x))] \\ &= [(g \circ (f \circ \alpha), g(f(x)))] \\ &= T_{f(x)}g([(f \circ \alpha, f(x))]) \\ &= T_{f(x)}g(T_x f([(\alpha, x)])) \\ &= (T_{f(x)}g \circ T_x f)([(\alpha, x)])\end{aligned}$$ □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.2.1. Αν $f : M \to N$ είναι σταθερή, τότε $T_x f = 0$, για κάθε $x \in M$.

2.2.2. Αν $(x_1, \ldots, x_m)$ είναι οι συντεταγμένες ενός χάρτη (U, ϕ), δείξτε ότι

$$(\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \circ T_x x_i)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right) = \delta_{ij},$$

επομένως,

$$T_x x_i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x\right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i \neq j \\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{x_i(x)} \in T_{x_i(x)}\mathbb{R}, & i = j. \end{cases}$$

2.2.3. Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων m και n, αντίστοιχα, $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση και $x \in M$. Έστω

$(U,\phi)\in\mathcal{A}$ και $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ που οριζουν τοπική παράσταση $F=\psi\circ f\circ\phi^{-1}$. Συμβολίζουμε με $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\}_{1\le i\le m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_y\}_{1\le j\le n}$ τις κανονικές βάσεις των T_xM και $T_{f(x)}N$ ως προς τους χάρτες (U,ϕ) και (V,ψ). Να βρείτε τους πίνακες των γραμμικών απεικονίσεων

$$\begin{aligned}\bar{\phi}&: T_xM\longrightarrow\mathbb{R}^m,\\ \bar{\psi}&: T_{f(x)}N\longrightarrow\mathbb{R}^n,\\ T_xf&: T_xM\longrightarrow T_{f(x)}N,\\ DF(\phi(x))&: R^m\longrightarrow\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ και τις $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\}_{1\le i\le m}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_y\}_{1\le j\le n}$ των T_xM και $T_{f(x)}N$.

2.2.4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Να δείξετε ότι, για κάθε $s\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$T_sf\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right)=f'(s)\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{f(s)}.$$

2.2.5. Έστω $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f:M\to N$ αμφιδιαφόριση. Να δείξετε ότι για το σημειακό διαφορικό της αντίστροφης f^{-1} ισχύει

$$T_{f(x)}f^{-1}=(T_xf)^{-1},$$

για κάθε $x\in M$.

2.2.6. Στο πλαίσιο των διαφορικών πολλαπλοτήτων, να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης.

2.3. Διαφορικά σε χώρους - γινόμενα

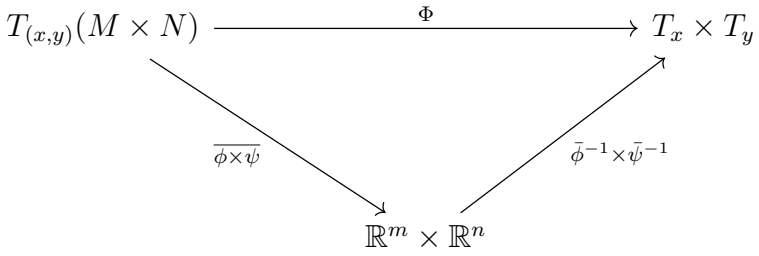
Θεωρούμε δύο πολλαπλότητες $(M,\mathcal{A})$ και $(N,\mathcal{B})$ διαστάσεων m, n, αντίστοιχα, και το γινόμενο $M\times N$ εφοδιασμένο με τον άτλαντα $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Είναι προφανές ότι, για κάθε $(x,y)\in M\times N$ οι χώροι $T_xM\times T_yN$ και $T_{(x,y)}(M\times N)$ έχουν διάσταση $m+n$, άρα είναι ισόμορφοι. Ιδιαιτέρως, αν θεωρήσουμε $(U,\phi)\in\mathcal{A}$ με $x\in U$, $(V,\psi)\in\mathcal{B}$ με $y\in V$, τον χάρτη $(U\times V,\phi\times\psi)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ και τους γραμμικούς ισομορφισμούς

$$\begin{aligned}\bar{\phi}\times\bar{\psi}&: T_xM\times T_yN\longrightarrow\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\\ \overline{\phi\times\psi}&: T_{(x,y)}(M\times N)\longrightarrow\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

τότε η

$$\Phi := (\bar{\psi}^{-1} \times \bar{\phi}^{-1}) \circ \overline{\phi \times \psi} : T_{(x,y)}(M \times N) \longrightarrow T_x M \times T_y N \tag{2.3.1}$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός.



Ο ισομορφισμός Φ *δεν* εξαρτάται από τους χάρτες που επιλέξαμε: Παρατηρούμε ότι κάθε καμπύλη

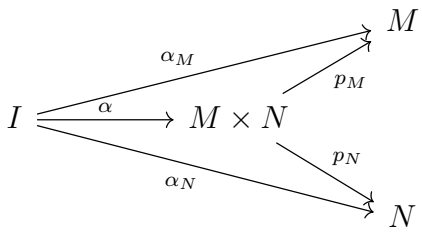
$$\alpha : I \longrightarrow M \times N$$

που περνά από το $\alpha(0) = (x, y) \in M \times N$ ορίζει δύο καμπύλες

$$\alpha_M := p_M \circ \alpha : I \longrightarrow M$$
$$\alpha_N := p_N \circ \alpha : I \longrightarrow N$$

που περνούν από τα $\alpha_M(0) = x$ και $\alpha_N(0) = y$, αντίστοιχα, και ορίζεται από αυτές:

$$\alpha = (\alpha_M, \alpha_N).$$



Έστω $w = [(\alpha, (x, y)] \in T_{(x,y)}(M \times N)$, και τα αντίστοιχα διανύσματα $[(\alpha_M, x)] \in T_x M$ και $v = [(\alpha_N, y)] \in T_y N$. Εφαρμόζοντας τις $\overline{\phi \times \psi}$ και

$\bar{\phi} \times \bar{\psi}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\phi \times \psi}(w) &= ((\phi \times \psi) \circ \alpha)'(0) \\ &= ((\phi \times \psi) \circ (\alpha_M, \alpha_N))'(0) \\ &= (\phi \circ \alpha_M, \psi \circ \alpha_N)'(0) \\ &= ((\phi \circ \alpha_M)'(0), (\psi \circ \alpha_N)'(0)) \\ &= (\bar{\phi}(u), \bar{\psi}(v)) \\ &= (\bar{\phi} \times \bar{\psi})(u, v),\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Phi(w) = (u, v). \tag{2.3.2}$$

Από το άλλο μέρος, οι προβολές p_M και p_N είναι διαφορίσιμες, με

$$\begin{aligned}T_{(x,y)}p_M(w) = T_{(x,y)}p_M([(\alpha, (x, y)]) = [(p_M \circ \alpha, p_M(x, y))] = [(\alpha_M, x)] = u, \\ T_{(x,y)}p_N(w) = T_{(x,y)}p_N([(\alpha, (x, y)]) = [(p_N \circ \alpha, p_N(x, y))] = [(\alpha_N, y)] = v.\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\Phi = (T_{(x,y)}p_M, T_{(x,y)}p_N), \tag{2.3.3}$$

και έχει αποδειχθεί η επόμενη

2.3.1 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Για κάθε $x \in M$ και $y \in N$, υπάρχει ένας φυσικός (: ανεξάρτητος από τους χάρτες) ισομορφισμός*

$$\Phi : T_{(x,y)}M \times N \longrightarrow T_xM \times T_yN. \tag{2.3.4}$$

Θεωρούμε τώρα μια απεικόνιση $f : M \times N \to P$. Αν η f είναι διαφορίσιμη, για κάθε σημείο $(x, y) \in M \times N$ οι μερικές απεικονίσεις

$$\begin{aligned}f_x : N \longrightarrow P : y \mapsto f(x, y), \\ f_y : M \longrightarrow P : x \mapsto f(x, y).\end{aligned}$$

είναι διαφορίσιμες. Ισχύει το επόμενο

2.3.2 Θεώρημα. *(Τύπος του Leibniz) Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ και $(P, \mathcal{C})$ διαφορικές πολλαπλότητες διαστάσεων $m, n, p \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα, και $f : M \times N \to P$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ταύτιση (2.3.2) έχουμε*

$$T_{(x,y)}f(w) = T_xf_y(u) + T_yf_x(v), \tag{2.3.5}$$

για κάθε $(x, y) \in M \times N$ και $w \equiv (u, v) \in T_xM \times T_yN$.

Απόδειξη. Έστω $(x,y) \in M \times N$ και $w \equiv (u,v) \in T_xM \times T_yN$. Θεωρούμε χάρτες $(U,\phi) \in \mathcal{A}$, $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ και $(W,\chi) \in \mathcal{C}$ με $(x,y) \in U \times V$ και $f(x,y) \in W$ και ορίζουμε την τοπική παράσταση

$$F = \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1} : \phi(U) \times \psi(V) \longrightarrow \chi(W),$$

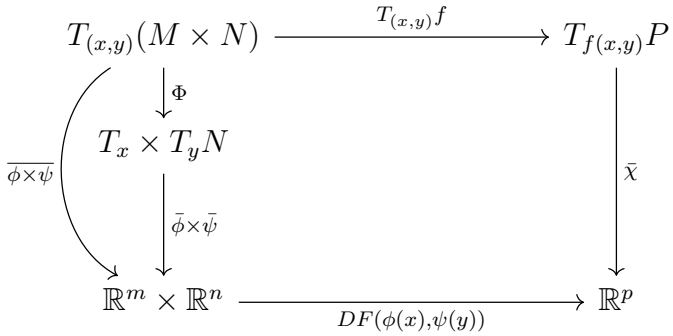
η οποία είναι διαφορίσιμ στο $(\phi(x), \psi(y))$. Θέτουμε $a = \phi(x)$, $b = \psi(y)$, $h = \bar{\phi}(u)$ και $v = \bar{\psi}(v)$. Για το διαφορικό της F στο (a,b)

$$DF(a,b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

σύμφωνα με τον τύπο του Leibniz σε ευκλείδειους χώρους, ισχύει

$$[DF(a,b)](h,k) = [DF_b(a)](h) + [DF_a(b)](k).$$

Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα



Τότε

$$\begin{aligned}
\bar{\chi} \circ T_{(x,y)}f(w \equiv (u,v)) &= [DF(\phi(x),\psi(y))] \circ \overline{\phi \times \psi}(w) = \\
&= [DF(\phi(x),\psi(y))] \circ (\bar{\phi} \times \bar{\psi})(u,v) = \\
&= [DF(a,b)](h,k) = \\
&= [DF_b(a))](h) + [DF_a(b)](k).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
F_b(h) &= \chi \circ f \circ (\phi \times \psi)^{-1}(h,b) \\
&= \chi \circ f(\phi^{-1}(h), y) \\
&= \chi \circ f_y \circ \phi^{-1}(h)
\end{aligned}$$

είναι η τοπική παράσταση της f_y μέσω των (U,ϕ) και (W,χ) και, παρόμοια,

$$F_a(k) = \chi \circ f_x \circ \psi^{-1}(k)$$

είναι η τοπική παράσταση της f_x μέσω των (V,ψ) και (W,χ). Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{T_xf_y} & T_{f(x,y)}P \\ \downarrow{\scriptstyle \bar\phi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\chi} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[D(\chi\circ f_y\circ\phi^{-1})(\phi(x))]{} & \mathbb{R}^p \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{ccc} T_yN & \xrightarrow{T_yf_x} & T_{f(x,y)}P \\ \downarrow{\scriptstyle \bar\psi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar\chi} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[D(\chi\circ f_x\circ\psi^{-1})(\psi(y))]{} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar\chi\circ T_{(x,y)}f(w) &= [D(\chi\circ f_y\circ\phi^{-1})(\phi(x))](\bar\phi(u)) \\ &\qquad + [D(\chi\circ f_x\circ\psi^{-1})(\psi(y))](\bar\psi(v)) \\ &= \bar\chi\circ T_xf_y(u) + \bar\chi\circ T_yf_x(v). \end{aligned}$$

Επειδή η $\bar\chi$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.3.1. Έστω $f : P \to M\times N$ διαφορίσιμη και $f_M := p_M\circ f$, $f_N := p_N\circ f$. Να εκφράσετε το διαφορικό

$$T_xf : T_xP \longrightarrow T_{f(x)}(M\times N)$$

συναρτήσει των διαφορικών

$$T_xf_M : T_xP \longrightarrow T_{f_M(x)}M, \quad T_xf_N : T_xP \longrightarrow T_{f_N(x)}N.$$

2.4. Παραγωγίσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια άποψη των εφαπτόμενων διανυσμάτων που εξηγεί γιατί χρησιμοποιείται το σύμβολο $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ για τα κανονικά βασικά διανύσματα ενός χάρτη.

Σε όλη την παράγραφο $(M,\mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ την άλγεβρα των διαφορίσιμων συναρτήσεων του M, δηλ.

$$\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) = \{f : M\to\mathbb{R} \ : \ f \ \text{ διαφορίσιμη}\}.$$

2.4.1 Ορισμός. Μια **σημειακή παραγώγιση** της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ στο $x \in M$ είναι μια απεικόνιση

$$\ell : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

η οποία

(i) είναι $\mathbb{R}$–γραμμική, δηλ.

$$\ell(af+bg) = a\ell(f) + b\ell(g)$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, και

(ii) ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz

$$\ell(fg) = f(x)\ell(g) + g(x)\ell(f),$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

Έστω $x \in M$ και $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$. Θέτουμε

$$\ell_u : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto \ell_u(f) := (f\circ\alpha)'(0). \tag{2.4.1}$$

Έχουμε την επόμενη

2.4.2 Πρόταση. *Η απεικόνιση ℓ_u είναι καλά ορισμένη (: ανεξάρτητη της καμπύλης α) παραγώγιση της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Η ℓ_u είναι καλά ορισμένη: Αν $[(\beta, x)] = [(\alpha, x)]$ και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, τότε

$$\begin{aligned}(f\circ\beta)'(0) &= (f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\beta)'(0)\\ &= [D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))]((\phi\circ\beta)'(0))\\ &= [D(f\circ\phi^{-1})(\phi(x))]((\phi\circ\alpha)'(0))\\ &= (f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha)'(0)\\ &= (f\circ\alpha)'(0)\end{aligned}$$

Σχετικά με τις άλλες ιδιότητες, αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(f+g)\circ\alpha &= (f\circ\alpha) + (g\circ\alpha)\\ (\lambda f)\circ\alpha &= \lambda(f\circ\alpha)\\ (fg)\circ\alpha &= (f\circ\alpha)(g\circ\alpha).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\ell_u(f+g) &= ((f+g)\circ\alpha)'(0) = (f\circ\alpha)'(0) + (g\circ\alpha)'(0)\\
&= \ell_u(f) + \ell_u(g),\\
\ell_u(\lambda f) &= ((\lambda f)\circ\alpha)'(0) = (\lambda(f\circ\alpha))'(0) = \lambda(f\circ\alpha)'(0)\\
&= \lambda\cdot\ell_u(f),\\
\ell_u(fg) &= ((fg)\circ\alpha)'(0) = ((f\circ\alpha)(g\circ\alpha))'(0)\\
&= (f\circ\alpha)'(0)\cdot(g\circ\alpha)(0) + (f\circ\alpha)(0)\cdot(g\circ\alpha)'(0)\\
&= \ell_u(f)\cdot g(x) + f(x)\cdot\ell_u(g)
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Συμβολίζουμε με D_xM το σύνολο των σημειακών παραγωγίσεων της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ στο $x\in M$.

Αν $d, d_1 \in D_xM$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, ορίζουμε τις κατά σημείο πράξεις

$$(d+d_1)(f) := d(f) + d_1(f) \tag{2.4.2}$$

$$(\lambda d)(f) := \lambda\cdot d(f) \tag{2.4.3}$$

για κάθε $f\in\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Είναι άμεσο ότι $d+d_1$ και λd είναι σημειακές παραγωγήσεις της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι επίσης φανερό.

2.4.3 Λήμμα. *Το σύνολο D_xM με πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίζονται κατά σημείο είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.* □

Αποδεικνύεται το επόμενο

2.4.4 Θεώρημα. *Η απεικόνιση*

$$L : T_xM \longrightarrow D_xM : u \longmapsto L(u) := \ell_u \tag{2.4.4}$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Υπενθυμίζουμε ότι μια *τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της M στο $x\in M$* είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : A\to\mathbb{R}$, όπου $A\subseteq M$ ανοιχτό με $x\in A$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ το σύνολο αυτών των συναρτήσεων. Παρατηρούμε τώρα ότι στο σύνολο $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ ορίζονται:

(1) Μια *πρόσθεση*: αν $f,g\in\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ τότε οι f και g ορίζονται σε ανοιχτές περιοχές A και B του x, αντίστοιχα. Θέτοντας

$$f+g : A\cap B\to\mathbb{R} : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

παίρνουμε $f+g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

(2) Ένα *βαθμωτό γινόμενο*: αν $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, θέτοντας

$$\lambda f : A \to \mathbb{R} : (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

παίρνουμε $\lambda f \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

(3) Ένα *γινόμενο*: αν $f, g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ όπως στο (1), θέτοντας

$$fg : A \cap B \to \mathbb{R} : (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

παίρνουμε $fg \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$.

Όμως το σύνολο $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ *δεν* είναι άλγεβρα (γιατί;). Εντούτοις, για $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$, έχει έννοια να γράψουμε

$$\ell_u(f) = (f \circ \alpha)'(0). \tag{2.4.5}$$

2.4.5 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα, $x \in M$ και $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$. Τότε, για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες*

$$\ell_u(f+g) = \ell_u(f) + \ell_u(g) \tag{2.4.6}$$

$$\ell_u(\lambda f) = \lambda \ell_u(f) \tag{2.4.7}$$

$$\ell_u(fg) = \ell_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \ell_u(g) \tag{2.4.8}$$

Όπως είδαμε προηγουμένως, το σύνολο $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ είναι εφοδιασμένο με τις τρεις πράξεις, οι οποίες όμως δεν ορίζουν κάποια αλγεβρική δομή. Παρατηρείστε για παράδειγμα, ότι η πρόσθεση έχει πολλά μηδενικά στοιχεία: για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό $A \subseteq M$, με $x \in A$, κάθε σταθερά μηδενική συνάρτηση $0_B : B \to \mathbb{R}$ με B ανοιχτό που περιέχει το A, μας δίνει $f + 0_B = f$. Μπορούμε όμως να πάρουμε μια δομή πραγματικής άλγεβρας ταυτίζοντας τα στοιχεία του $\mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$ που έχουν ίσους περιορισμούς σε κάποια υποπεριοχή των πεδίων ορισμού τους. Πιο συγκεκριμένα, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

2.4.6 Ορισμός. Έστω $f, g \in \mathcal{C}^\infty_x(M,\mathbb{R})$. Υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U, V του x με $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Λέμε ότι f και g είναι **ισοδύναμες** στο x, αν υπάρχει ένα ανοιχτό $A \subseteq U \cap V$ με $x \in A$ και $f|_A = g|_A$.

Είναι προφανές ότι η ανωτέρω 'ισοδυναμία' είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση της f στο x λέγεται **σπέρμα της f στο x** και συμβολίζεται με $[f]_x$. Το σύνολο αυτών των κλάσεων λέγεται **άλγεβρα των διαφορίσιμων σπερμάτων του M στο x** και συμβολίζεται με $A^\infty_x(M)$.

2.4.7 Πρόταση. *Το σύνολο $A_x^\infty(M)$ είναι μια πραγματική άλγεβρα, και, για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$, απεικόνιση*

$$\ell_u : A_x^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R} : [f]_x \longmapsto \ell_u([f]_x) := (f \circ \alpha)'(0) \tag{2.4.9}$$

είναι μια καλά ορισμένη παραγώγιση της $A_x^\infty(M)$. □

Στα επόμενα, για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θα γράφουμε $u(f)$ αντί του $\ell_u(f)$.

2.4.8 Παρατήρηση. Από τον ορισμό της ℓ_u, για μια $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\ell_u(f) &= (f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)'(0)\\ &= [D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))]((\phi \circ \alpha)'(0))\\ &= [D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))]((\bar{\phi}(u)),\end{aligned}$$

δηλ. η $\ell_u(f)$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της τοπικής παράστασης $f \circ \phi^{-1}$ της f στο σημείο $\phi(x)$, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\bar{\phi}(u)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.4.1. Για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και κάθε $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$, ισχύει

$$u(f) = \overline{\mathrm{id}_\mathbb{R}} \circ T_x f(u).$$

2.4.2 Αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης και x_i, $i = 1, \ldots, m$ οι συντεταγμένες του, να δείξετε ότι

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x (x_j) = \delta_{ij}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

2.4.3 Αν (U, ϕ) είναι ένας χάρτης, x_i, $i = 1, \ldots, m$ οι συντεταγμένες του, $x \in U$ και $u \in T_xM$, να δείξετε ότι

$$u = \sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$

2.4.4 Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες, $f : M \to N$ διαφορίσιμη, $x \in M$, $u = [(\alpha, x)] \in T_xM$ και g μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της N στο $f(x)$. Αν $v = T_x f(u)$, να δείξετε ότι

$$v(g) = u(g \circ f).$$

2.4.5 Να δείξετε ότι κάθε σημειακή παραγώγιση μηδενίζεται στις σταθερές συναρτήσεις.

2.5. Εφαπτόμενη δέσμη

Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Θεωρούμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους T_xM, $x \in M$, την διακεκριμένη ένωση

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM \tag{2.5.1}$$

και την (επί) απεικόνιση

$$\pi(u) := x, \quad \text{αν } u \in T_xM. \tag{2.5.2}$$

2.5.1 Ορισμός. Το σύνολο TM ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** του M και η απεικόνιση π **προβολή** της TM επί του M.

2.5.2 Θεώρημα. *Αν $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα, τότε η TM εφοδιάζεται με δομή $2m$-διάστατης διαφορικής πολλαπλότητας, που κάνει την π διαφορίσιμη απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$, όπου η απεικόνιση

$$\Phi : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_xM \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

ορίζεται από την ισότητα

$$\Phi(u) := (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)). \tag{2.5.3}$$

(1) Ισχυριζόμαστε ότι *το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ είναι ένας $2m$-διάστατος χάρτης της TM.*

(1α) *Η απεικόνιση Φ είναι 1-1*: αν $u, v \in TM$ με $\Phi(u) = \Phi(v)$, τότε η (2.5.3) συνεπάγεται ότι $\phi(\pi(u)) = \phi(\pi(v))$. Επειδή ϕ είναι 1–1, $\pi(u) = \pi(v)$, δηλαδή, u και v ανήκουν στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο T_xM, με

$$x = \pi(u) = \pi(v).$$

Ακόμη, $\bar{\phi}(u) = \bar{\phi}(v)$ και $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$ είναι αμφιμονοσήμαντη, έτσι $u = v$.

(1β) *Η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$*: Θα δείξουμε ότι $\Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Επειδή, προφανώς, $\Phi(\pi^{-1}(U)) \subseteq \phi(U) \times \mathbb{R}^m$, αρκεί να αποδείξουμε ότι Φ είναι επί του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Έστω $(h, k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $x \in U$ με $\phi(x) = h$. Θεωρούμε τον επιμορφισμό $\bar{\phi} : T_xM \to \mathbb{R}^m$. Για το στοιχείο $k \in \mathbb{R}^m$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in T_xM$ με $\bar{\phi}(u) = k$. Επομένως,

$$\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (\phi(x), k) = (h, k),$$

και η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι το σύνολο $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, που είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, σαν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$.

(2) Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i) : (U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}\}$$

από όλους τους χάρτες στην TM της προηγούμενης μορφής, και ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathcal{B}$ *είναι ένας διαφορικός άτλαντας επί της* TM.

(2α) *Οι χάρτες του* $\mathcal{B}$ *καλύπτουν την* TM, διότι

$$\bigcup_i \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\bigcup_i U_i) = \pi^{-1}(M) = TM.$$

(2β) *Οι χάρτες του* $\mathcal{B}$ *είναι διαφορικά συμβιβαστοί*: Θεωρούμε δύο χάρτες (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j) του $\mathcal{A}$ με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, και τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i)$ και $(\pi^{-1}(U_j), \Phi_j)$ στον $\mathcal{B}$. Τότε

$$\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$$

και

$$\Phi_i(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, αφού $\phi_i(U_i \cap U_j)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^m$, από την συμβιβαστότητα των (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j). Όμοια, η εικόνα

$$\Phi_j(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς

$$\begin{aligned}
\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} &: \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m, \\
\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} &: \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι είναι διαφορίσιμες. Για την πρώτη, θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $(h, k) \in \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$. τότε $\Phi_i^{-1}(h, k) = u$, για ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ με $\phi_i(\pi(u)) = h$ και $\bar{\phi}(u) = k$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(h, k) &= \Phi_j(u) = (\phi_j(\pi(u)),\, \bar{\phi}_j(u)) \\
&= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(\phi_i(\pi(u))),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(\bar{\phi}_i(u))) \\
&= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, \bar{\phi}_j \circ \bar{\phi}_i^{-1}(k)) \\
&= (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(h),\, [D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(h)](k)).
\end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι η πρώτη συντεταγμένη στην ανωτέρω έκφραση είναι διαφορίσιμη από την διαφορική συμβιβαστότητα των χαρτών (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j) και η δεύτερη είναι διαφορίσιμη ως προς h σαν διαφορικό ιας $\mathcal{C}^\infty$–διαφορίσιμης και ως προς k είναι γραμμική. Το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφη $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$.

Σαν αποτέλεσμα, ο $\mathcal{B}$ είναι ένας $2m$-διάστατος διαφορικός άτλαντας της TM και ο αντίστοιχος μέγιστος άτλαντας $\mathcal{B}'$ ορίζει μια $2m$–διάστατη διαφορική δομή στην TM.

(3) *Η προβολή $\pi : TM \to M$ είναι διαφορίσιμη*: Έστω $u \in TM$. Θα δείξουμε ότι η π είναι διαφορίσιμη στο u. Το u είναι διάνυσμα ενός εφαπτόμενου χώρου, έστω του T_xM, οπότε $\pi(u) = x$. Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο χάρτη $(\pi^{-1}(U), \Phi) \in \mathcal{B}$. Τότε $u \in \pi^{-1}(U)$ και $\pi(\pi^{-1}(U)) \subseteq U$, δηλ. το ζεύγος των χαρτών $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ και (U, ϕ) μας δίνει τοπική παράσταση της π

$$\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \Phi(\pi^{-1}(U)) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \phi(U).$$

Έστω $(h, k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Υπάρχει ένα μοναδικό $u \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(\pi(u)), \bar{\phi}(u)) = (h, k)$. Τότε

$$(\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1})(h, k) = \phi(\pi(u)) = h = pr_1(h, k)$$

δηλαδή, $\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1} = pr_1$ είναι διαφορίσιμη, σαν περιορισμός γραμμικής σε ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. □

2.5.3 Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα, υποθέτοντας ότι M είναι διαφορική πολλαπλότητα, δείχνουμε ότι TM είναι επίσης διαφορική πολλαπλότητα. Αν M είναι $\mathcal{C}^r$–πολλαπλότητα, με r πεπερασμένο, τότε η απεικόνιση μεταφοράς $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^r$–διαφορίσιμη, αλλά η παράγωγός της

$$D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) : \phi(U_i \cap U_j) \longrightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

είναι $\mathcal{C}^{r-1}$–διαφορίσιμη και η τάξη διαφορισιμότητας επί της TM είναι περιορισμένη κατά μια μονάδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.5.1. Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια διαφορική πολλαπλότητα. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{R} \times TM \longrightarrow TM : (\lambda, u) \longmapsto \lambda \cdot u$$

είναι διαφορίσιμη.

2.5.2. Έστω $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενη δέσμη $T(M \times N)$ είναι αμφιδιαφορική με το γινόμενο $TM \times TN$.

2.6. Ολικό Διαφορικό

2.6.1 Ορισμός. Έστω M, N διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Ονομάζουμε **εφαπτόμενη απεικόνιση** ή **παράγωγο** ή **ολικό διαφορικό της** f την απεικόνιση $Tf : TM \to TN$, που δίνεται από την σχέση

$$Tf := \bigcup_{x \in M} T_x f$$

ή, ισοδύναμα,

$$Tf|_{T_x M} = T_x f.$$

Δηλαδή, για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$,

$$Tf(u) = T_x f(u).$$

2.6.2 Πρόταση. *Έστω $(M, \mathcal{A})$ και $(N, \mathcal{B})$ διαφορικές πολλαπλότητες και $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν π_M και π_N συμβολίζουν τις προβολές των εφαπτόμενων δεσμών TM και TN, αντίστοιχα, τότε $Tf : TM \to TN$ είναι διαφορίσιμη και το διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την μεταθετικότητα του διαγράμματος: για κάθε $u = [(\alpha, x)] \in TM$, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_N \circ Tf(u) = \pi_N \circ T_x f([(\alpha, x)]) = \pi_N([(f \circ \alpha, f(x))]) = \\ = f(x) = f \circ \pi_M([(\alpha, x)]) = f \circ \pi_M(u), \end{aligned}$$

δηλαδή, $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$ και το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι Tf είναι διαφορίσιμη σε ένα τυχαίο σημείο $u_o = [(\alpha, x_o)] \in TM$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x_o, υπάρχουν χάρτες $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, με $x_o \in U$ και $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(U)$. Θεωρούμε τους χάρτες $(\pi_M^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi_N^{-1}(V), \Psi)$, αντίστοιχα. Τότε, $x_o \in U$ συνεπάγεται ότι $u_o \in \pi_M^{-1}(U)$ και η μεταθετικότητα του διαγράμματος συνεπάγεται

ότι για κάθε $u \in \pi_M^{-1}(U)$, $\pi_N \circ Tf(u) = \circ\pi_M(u) \in f(U) \subseteq V$, δηλαδή, $Tf(u) \in \pi_N^{-1}(V)$. Εφαρμόζουμε την τοπική παράσταση

$$\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n$$

της Tf μέσω Φ και Ψ στο $(h,k) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$: υπάρχει ένα μοναδικό $u = [(\alpha, x)] \in \pi_M^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\phi(x), \bar{\phi}(u)) = (h,k)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k) = \Psi \circ Tf(u) &= (\psi \circ \pi_N \circ Tf(u), \bar{\psi} \circ Tf(u)) = \\
&= (\psi \circ f \circ \pi_M(u), \bar{\psi} \circ T_x f(\bar{\phi}^{-1}(k))) \\
&= (\psi \circ f(x), \bar{\psi} \circ T_x f \circ \bar{\phi}^{-1}(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(\phi(x)), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x))(k)) \\
&= (\psi \circ f \circ \phi^{-1}(h), D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(h)(k)).
\end{aligned}$$

Οι παράγοντες της $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}(h,k)$ είναι η τοπική παράσταση της f και η παράγωγός της, άρα είναι διαφορίσιμες. □

2.6.3 Παρατήρηση. Αν $f : M \to N$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, τότε $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$–διαφορίσιμη, αλλά $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη, δηλαδή, Tf είναι $\mathcal{C}^{k-1}$–διαφορίσιμη.

Κεφάλαιο 3

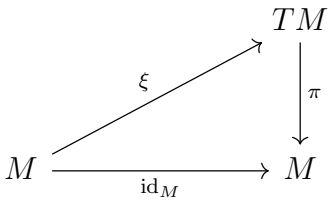
Διανυσματικά πεδία και ροές

3.1. Διανυσματικά Πεδία

Σε όλη αυτή την παράγραφο, $(M, \mathcal{A})$ είναι μια m–διάστατη διαφορική πολλαπλότητα.

3.1.1 Ορισμός. Ένα **διανυσματικό πεδίο επί της** M είναι μια απεικόνιση $\xi : M \to TM$, τέτοια ώστε $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$.

Ισοδύναμα, ένα διανυσματικό πεδίο ξ κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό:



3.1.2 Παρατηρήσεις. (1) Σύμφωνα με τον ορισμό 3.1.1, για ένα διανυσματικό πεδίο ξ έχουμε

$$\pi(\xi(x)) = (\pi \circ \xi)(x) = \mathrm{id}_M(x) = x,$$

για κάθε $x \in M$, δηλαδή, $\xi(x)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του χώρου T_xM.

(2) Σαν αποτέλεσμα του (1), τα διανυσματικά πεδία είναι 1–1 απεικονίσεις.

(3) Για ευκολία, για τις τιμές ενός διανυσματικού πεδίου, συνήθως γράφουμε ξ_x αντί του $\xi(x)$.

(4) Μπορούμε να ορίζουμε διανυσματικά πεδία πάνω από οποιοδήποτε υποσύνολο A του M.

(5) Επειδή το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ενός διανυσματικού πεδίου $\xi : M \to TM$ είναι διαφορικές πολλαπλότητες, μπορεί το ξ να είναι διαφορίσιμο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων επί του M. Όμοια, γράφουμε $\mathcal{X}(A)$, για το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων των ορισμένων σε ένα ανοιχτό $A \subseteq M$.

(6) Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο επί του M και $x_o \in M$. Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ με $x_o \in U$, ο (U, ϕ) και ο αντίστοιχος χάρτης $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ στην εφαπτόμενη δέσμη TM ορίζουν τοπική παράσταση του ξ στο x_o. Πράγματι, για κάθε $x \in U$,

$$\xi_x \in T_xM \subseteq \pi^{-1}(U)$$

επομένως η τοπική παράσταση

$$\Phi \circ \xi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$$

υπάρχει.

3.1.3 Παραδείγματα. (1) Η απεικόνιση

$$\Omega : M \longrightarrow TM : x \longmapsto \Omega(x) := 0_x \in T_xM,$$

όπου 0_x είναι το μηδενικό διάνυσμα στον T_xM, είναι ένα διανυσματικό πεδίο επί του M. Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ και $h = \phi(x) \in \phi(U)$, η τοπική παράσταση του Ω υπολογισμένη στο h είναι

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Omega \circ \phi^{-1}(h) = \Phi(\Omega_x) = (\phi(\pi(0_x)),\, \bar{\phi}(0_x)) = \\ = (\phi(x),\, 0) = (h, 0) \end{aligned}$$

δηλ. είναι διαφορίσιμη, έτσι $\Omega \in \mathcal{X}(M)$.

(2) Έστω $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Η απεικονίσεις

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \longrightarrow TU : x \longmapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \tag{3.1.1}$$

είναι διανυσματικά πεδία επί του U. Η τοπική παράσταση του $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ως προς τους χάρτες (U, ϕ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ υπολογισμένη στο $h = \phi(x) \in \phi(U)$ είναι

$$\begin{aligned} \Phi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \phi^{-1}(h) &= \Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right) = \\ &= \left(\phi\left(\pi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right),\, \bar{\phi}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)\right) = \\ &= (\phi(x),\, e_i) = (h, e_i) \end{aligned}$$

άρα είναι είναι διαφορίσιμη, δηλαδή, $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U)$. Η απεικονίσεις (3.1.1) λέγονται **βασικά διανυσματικά πεδία** ορισμένα από τον χάρτη (U, ϕ).

Επειδή κάθε τιμή ξ_x ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, μπορεί να θεωρείται σαν σημειακή παραγώγιση του $\mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. Έτσι, αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, με πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή A του x, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\xi(f) : A \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi(f)(x) := \xi_x(f). \tag{3.1.2}$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, εφαρμόζοντας το ξ στις συντεταγμένες x_i, $i = 1, \ldots, m$, παίρνουμε

$$\xi_i := \xi(x_i) : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi_x(x_i). \tag{3.1.3}$$

Η απεικονίσεις (3.1.3) λέγονται **συντεταγμένες του ξ ως προς τον χάρτη** (U, ϕ).

Από την άλλη μεριά (βλ. Άσκηση 2.4.3), κάθε ξ_x παίρνει την μορφή

$$\xi_x = \sum_i \xi_x(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x = (\sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})(x)$$

για κάθε $x \in U$, επομένως

$$\xi|_U = \sum_i \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.1.4}$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα, που μας δίνει δύο κριτήρια για τη διαφορισιμότητα ενός διανυσματικού πεδίου.

3.1.4 Θεώρημα. *Έστω $\xi : M \to TM$ ένα διανυσματικό πεδίο. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το ξ είναι διαφορίσιμο.

(ii) Για κάθε $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, οι συντεταγμένες ξ_i, $i = 1, \ldots, m$, είναι διαφορίσιμες.

(iii) Για κάθε $x \in M$ και $f \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$, έχουμε $\xi(f) \in \mathcal{C}^\infty_x(M, \mathbb{R})$. □

3.1.5 Παρατήρηση. Η συνθήκη (ii) του προηγούμενου θεωρήματος παρέχει έναν εύκολο τρόπο να αποδείξουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο είναι διαφορίσιμο: Για παράδειγμα, το μηδενικό διανυσματικό πεδίο

$$\Omega = \sum_i 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

είναι διαφορίσιμο, αφού οι συντεταγμένες του είναι σταθερά μηδενικές. Επίσης, για κάθε χάρτη (U, ϕ), το βασικό διανυσματικό πεδίο

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \cdots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_m}$$

έχει σταθερές συντεταγμένες.

Παρατηρούμε τώρα ότι στο $\mathcal{X}(M)$ ορίζονται κατά σημείο μια πρόσθεση

$$+ : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta :$$
$$(\xi + \eta)_x := \xi_x + \eta_x, \qquad \forall\, x \in M,$$

ένας αριθμητικός (βαθμωτός) πολλαπλασιασμός

$$\mathbb{R} \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\lambda, \xi) \longmapsto \lambda\xi :$$
$$(\lambda\xi)_x := \lambda\xi_x, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ x \in M$$

και ένας πολλαπλασιασμός με τις συναρτήσεις της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (f, \xi) \longmapsto f\xi :$$
$$(f\xi)_x := f(x) \cdot \xi_x, \qquad \forall\, x \in M.$$

Είναι άμεσο να αποδείξουμε την επόμενη

3.1.6 Πρόταση. *Ο χώρος $\mathcal{X}(M)$ με τις ανωτέρω πράξεις είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-πρότυπο.*

3.2. Τα διανυσματικά πεδία σαν παραγωγίσεις

Έστω $(M, \mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ η άλγεβρα των διαφορίσιμων συναρτήσεων επί του M.

3.2.1 Ορισμός. Μια **παραγώγιση** της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι μια $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση

$$\delta : \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

που ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz:

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g),$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(M)$ το σύνολο των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$. Απλοί υπολογισμοί μας δίνουν την επόμενη

3.2.2 Πρόταση. *Το σύνολο $\mathcal{D}(M)$ όλων των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ είναι ένα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-πρότυπο.*

Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, ορίζεται η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\xi(f) : M \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \xi(f)(x) := \xi_x(f).$$

Αφήνοντας την συνάρτηση f να διατρέχει την άλγεβρα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ παίρνουμε μια απεικόνιση

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : f \longmapsto \xi(f). \tag{3.2.1}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f+g)(x) &= \xi_x(\lambda f+g) = \lambda\xi_x(f)+\xi_x(g)\\ &= \lambda\xi(f)(x)+\xi(g)(x)\\ &= (\lambda\xi(f)+\xi(g))(x)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\xi(fg)(x) &= \xi_x(fg) = \xi_x(f)g(x)+f(x)\xi_x(g)\\ &= \xi(f)(x)g(x)+f(x)\xi(g)(x)\\ &= (\xi(f)g+f\xi(g))(x),\end{aligned}$$

για κάθε $x \in M$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f+g) &= \lambda\xi(f)+\xi(g)\\ \xi(fg) &= \xi(f)g+f\xi(g),\end{aligned}$$

για κάθε $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η (3.2.1) είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και ικανοποιεί την συνθήκη Leibniz. Επομένως, έχουμε την επόμενη

3.2.3 Πρόταση. *Κάθε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ ορίζει μια παραγώγιση της άλγεβρας $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.* □

Ανάλογα με την ταύτιση των σημειακών παραγωγίσεων με τα εφαπτόμενα διανύσματα, έχουμε και την ταύτιση των παραγωγίσεων της $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ με τα διανυσματικά πεδία. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο

3.2.4 Θεώρημα. *Έστω $(M,\mathcal{A})$ μια m-διάστατη διαφορική πολλαπλότητα. Τότε $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{D}(M)$ είναι ισόμορφα $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$-πρότυπα.* □

Κεφάλαιο 4

Ομάδες Lie

4.1. Ομάδες Lie και μορφισμοί ομάδων Lie

Σε ολόκληρο το κεφάλαιο αυτό, G είναι μια (πολλαπλασιαστική) ομάδα. Συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο της G με e, την **απεικόνιση πολλαπλασιασμού** ή **γινόμενο** με

$$\gamma\colon G \times G \longrightarrow G\colon (x, y) \mapsto \gamma(x, y) := xy,$$

και την **απεικόνιση αντιστροφής** με

$$\alpha\colon G \longrightarrow G\colon x \mapsto \alpha(x) := x^{-1}.$$

4.1.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ ένας (μέγιστος) διαφορικός άτλαντας επί μιας ομάδας G. Θεωρούμε το $G \times G$ εφοδιασμένο με τον άτλαντα $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Το ζεύγος $(G, \mathcal{A})$ λέγεται **ομάδα Lie**, αν οι απεικονίσεις γ και α είναι διαφορίσιμες.

Είναι πλεονασμός να ενσωματώνουμε την διαφορισιμότητα της α στον ορισμό της ομάδας Lie, επειδή αυτή είναι συνέπεια της διαφορισιμότητας της γ. Εντούτοις, για διευκόλυνση, χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 4.1.1, όπως γίνεται στην πλειονότητα των σχετικών πηγών.

4.1.2 Παραδείγματα. (Α) Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$ με την συνήθη διαφορική δομή είναι ομάδα Lie.

(Β) Η γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ορίζουσα

$$\det : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη, άρα συνεχής, και η γενική γραμμική ομάδα

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \text{ αντιστρέψιμος}\} = \det{}^{-1}(\mathbb{R}_*)$$

είναι ανοιχτό, σαν αντίστροφη εικόνα του ανοιχτού $\mathbb{R}_*$ μέσω συνεχούς. Επομένως, το ζεύγος $(GL(n,\mathbb{R}), \mathrm{id})$ είναι ολικος χάρτης που επάγεται ένα μέγιστο άτλαντα $\mathcal{A}$ και την αντίστοιχη δομή πολλαπλότητας στην $GL(n,\mathbb{R})$. Τότε η $GL(n,\mathbb{R})$ με τον πολλαπλασιασμό πινάκων είναι ομάδα Lie.

(Γ) Η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}_*$: προφανώς είναι ειδική περίπτωση του (Β).

(Δ) Η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}_*^+ = (0, +\infty)$.

Σε μια ομάδα G με πράξη γ, για κάθε $x \in G$ συμβολίζουμε L_x και R_x την αριστερή και την δεξιά μετατόπιση κατά x, αντίστοιχα:

$$L_x \colon G \longrightarrow G \colon g \longmapsto L_x(g) := xg,$$
$$R_x \colon G \longrightarrow G \colon g \longmapsto R_x(g) := gx.$$

4.1.3 Πρόταση. *Σε μια ομάδα Lie $(G, \mathcal{A})$, για κάθε $x \in G$, οι μετατοπίσεις L_x και R_x είναι αμφιδιαφορίσεις.*

Απόδειξη. Η L_x είναι μερική απεικόνιση της γ, άρα είναι διαφορίσιμη (Ασκ. 1.4.6). Επίσης, είναι αντιστρέψιμη με $L_x^{-1} = L_{x^{-1}}$, που είναι επίσης διαφορίσιμη, σαν αριστερή μεταφορά κατά x^{-1}. Άρα η L_x είναι αμφιδιαφόριση.

Παρόμοια και η R_x. □

4.1.4 Ορισμός. Έστω ότι $(G, \mathcal{A})$ και $(H, \mathcal{B})$ είναι ομάδες Lie. Μια απεικόνιση $f \colon G \to H$ λέγεται **μορφισμός ομάδων Lie**, αν είναι μορφισμός ομάδων και διαφορίσιμη.

4.1.5 Παρατήρηση. Σε κάθε ομάδα Lie $(G, \mathcal{A})$, η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id_G} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ είναι μορφισμός ομάδων Lie. Επίσης, αν $f : (G, \mathcal{A}) \to (H, \mathcal{B})$ και $g : (H, \mathcal{B}) \to (K, \mathcal{C})$ είναι μορφισμοί ομάδων Lie, τότε και η σύνθεση $g \circ f : (G, \mathcal{A}) \to (K, \mathcal{C})$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

4.1.6 Παραδείγματα. (Α) Η εκθετική απεικόνιση

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_*, \cdot).$$

(Β) Η ορίζουσα

$$\det \colon (GL(n,\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}_*, \cdot).$$