ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ και ΟΜΑΔΕΣ LIE

Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

Οκτώβριος 2025

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Τοπολογίας

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο καταγράφουμε τις βασικές έννοιες και τα συμπεράσματα της Γενικής Τοπολογίας που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα. Για τις αποδείξεις ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί οποιοδήποτε βιβλίο Γενικής Τοπολογίας.

1.1. Υπενθύμιση

1.1.1 Ορισμός. Έστω σύνολο $M \neq \emptyset$ και $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ απεικόνιση. Λέμε ότι η ρ είναι **μετρική** και το ζεύγος (M, ρ) **μετρικός χώρος**, αν η ρ έχει τις επόμενες ιδιότητες:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in M$, και

$$\rho(x, y) = 0 \iff x = y.$$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, για κάθε $x, y \in M$.

(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, για κάθε $x, y, z \in M$.

1.1.2 Παραδείγματα. (1) Η **ευκλείδεια μετρική**

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} :$$
$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

Ιδιαιτέρως, στο $\mathbb{R}$, η ευκλείδεια μετρική συμπίπτει με την απόλυτη τιμή.

(2) Η **διακριτή μετρική** $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(3) Αν $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρική, τότε και οι απεικονίσεις $\lambda\rho$, με $\lambda > 0$, και $\frac{\rho}{1+\rho}$ είναι μετρικές.

1.1.3 Ορισμός. Έστω (M,ρ) μετρικός χώρος, $x \in M$ και $\varepsilon > 0$. Ονομάζουμε **ανοιχτή μπάλλα** με κέντρο x και ακτίνα ε, το σύνολο

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in M \ : \ \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

και **κλειστή μπάλλα** με κέντρο x και ακτίνα ε, το σύνολο

$$\hat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in M \ : \ \rho(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

1.1.4 Παραδείγματα. (1) Στο $\mathbb{R}$, η $B(x,\varepsilon)$ συμπίπτει με το ανοιχτό διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ και η $\hat{B}(x,\varepsilon)$ με το αντίστοιχο κλειστό διάστημα. Στο $\mathbb{R}^2$ συμπίπτει με το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο x και ακτίνα ε και στο $\mathbb{R}^3$ με το εσωτερικό της αντίστοιχης σφαίρας.

(2) Αν ρ είναι η διακριτή μετρική στο M και $0 < \varepsilon \leq 1 < \eta$, τότε για κάθε $x \in M$, είναι

$$B(x,\varepsilon) = \{x\} \ \text{ και } \ B(x,\eta) = M,$$

ενώ για $0 < \varepsilon < 1 \leq \eta$, είναι

$$\hat{B}(x,\varepsilon) = \{x\} \ \text{ και } \ \hat{B}(x,\eta) = M.$$

Μέσω των ανοιχτών μπαλλών μπορούμε να προσεγγίσουμε τις έννοιες των ανοιχτών και των κλειστών συνόλων:

1.1.5 Ορισμός. Έστω (M,ρ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ λέγεται **ανοιχτό**, αν είναι ένωση ανοιχτών μπαλλών, ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε

$$B(x,\varepsilon) \subseteq M.$$

Ένα σύνολο $F \subseteq M$ λέγεται **κλειστό**, αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.

1.1.6 Παραδείγματα. Κάθε ανοιχτή μπάλλα είναι ανοιχτό σύνολο, ενώ κάθε κλειστή μπάλλα είναι κλειστό σύνολο.

Προσοχή! Ένα σύνολο δεν είναι κατ' ανάγκη ή ανοιχτό ή κλειστό. Μπορεί να είναι και ανοιχτό και κλειστό, ή να μην είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι για την οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου ισχύει η επόμενη

1.1.7 Πρόταση. *Έστω (M, ρ) ένας μετρικός χώρος και τ η οικογένεια όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του. Τότε:*
(i) $\emptyset \in \tau$ και $M \in \tau$.
(ii) Αν $A_i \in \tau$ για κάθε $i \in I$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
(iii) Αν A_1, $A_2 \in \tau$, τότε $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Σημείωση: Η (iii) *δεν* ισχύει για άπειρη οιογένεια υποσυνόλων. Π.χ., στο $\mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική (απόλυτη τιμή), η οικογένεια $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, έχει τομή το μονοσύνολο $\{0\}$.

Επειδή τα κλειστά σύνολα είναι τα συμπληρώματα των ανοιχτών, χρησιμοποιώντας τους νόμους de Morgan, αποδεικνύουμε ότι η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου έχει τις επόμενες ιδιότητες:

1.1.8 Πρόταση. *Έστω (M, ρ) ένας μετρικός χώρος και $\mathcal{F}$ η οικογένεια όλων των κλειστών υποσυνόλων του. Τότε:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ και $M \in \mathcal{F}$.
(ii) Αν $F_i \in \mathcal{F}$ για κάθε $i \in I$, τότε $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.
(iii) Αν F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, τότε $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Σημείωση: Πάλι η (iii) *δεν* ισχύει για άπειρη οιογένεια κλειστών υποσυνόλων. Π.χ., η οικογένεια $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$, έχει ένωση το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$.

1.2. Τοπολογία και βάση τοπολογίας

Σε χώρους που δεν έχουν μετρική, μπορούμε να βρούμε οικογένειες υποσυνόλων που συμπεριφέρονται σαν ανοιχτά σύνολα (δηλ. ικανοποιούν τις συνθήκες (i-iii) της Πρότασης 1.1.7). Γενικεύοντας την έννοια των ανοιχτών ενός μετρικού χώρου, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

1.2.1 Ορισμός. Έστω X ένα μη–κενό σύνολο. Μιά **τοπολογία** επί του X είναι ένα υποσύνολο τ του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$, τέτοιο ώστε
(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Γιά κάθε οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ στοιχείων της τ, η ένωση $\bigcup_{i\in I} A_i$ ανήκει στην τ.

(iii) Για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ στοιχείων της τ, η τομή $\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i$ ανήκει στην τ.

Το ζεύγος (X,τ) λέγεται **τοπολογικός χώρος**. Τα στοιχεία της τ λέγονται **ανοικτά σύνολα** και τα συμπληρώματα τους **κλειστά**.

1.2.2 Παραδείγματα. (1) Για κάθε τοπολογία τ ενός χώρου X ισχύει

$$\{\emptyset, X\} \subseteq \tau \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Επομένως, η ελάχιστη δυνατή τοπολογία σε ένα σύνολο X είναι η $\tau = \{\emptyset, X\}$ (: **τετριμμένη τοπολογία**) και η μέγιστη δυνατή είναι η $\tau = \mathcal{P}(X)$ (: **διακριτή τοπολογία**).

(2) Τα ανοιχτά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου προφανώς αποτελούν μια τοπολογία (: **μετρική τοπολογία**).

(3) Έστω $X \neq \emptyset$ και $x_o \in X$. Η **τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου** είναι η οικογένεια

$$\tau = \{A \subseteq X \mid x_o \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

και η **τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου** είναι η

$$\tau = \{A \subseteq X \mid x_o \notin A\} \cup \{X\}.$$

(4) Έστω $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Τότε η τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου a και η τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου b συμπίπτουν με το σύνολο

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\},$$

που λέγεται **τοπολογία Sierpinsky**.

(5) Έστω σύνολο $X \neq \emptyset$. Η **συμπεπερασμένη τοπολογία** είναι η

$$\tau = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$

και η **συναριθμήσιμη τοπολογία** η

$$\tau = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}.$$

(6) Έστω $X \neq \emptyset$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του X με $A_1 = X$. Τότε

$$\tau = \{A_1, A_2, \dots\} \cup \{\emptyset\}$$

είναι τοπολογία.

Όπως είδαμε, τα ανοιχτά σύνολα μιας τοπολογίας ικανοποιούν τις συνθήκες (i-iii) της Πρότασης 1.1.7) *εξ ορισμού*. Επειδή, όπως και στους μετρικούς χώρους, τα κλειστά σύνολα είναι τα συμπληρώματα των ανοιχτών, πάλι χρησιμοποιώντας τους κανόνες de Morgan βρίσκουμε ότι η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου ικανοποιεί τις συνθήκες (i-iii) της Πρότασης 1.1.8).

1.2.3 Ορισμός. Έστω (X,τ) ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ονομάζουμε **εσωτερικό** του A και συμβολίζουμε με A^o την ένωση όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του A, δηλ.

$$A^o = \bigcup_{\tau \ni U \subseteq A} U.$$

Επίσης ονομάζουμε **(κλειστή) θήκη** του A και συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την τομή όλων των κλειστών υπερσυνόλων του A, δηλ.

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq K,\, K^C \in \tau} K$$

Το εσωτερικό ενός συνόλου είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολό του, ενώ η κλειστή θήκη είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολό του.

Για την κλειστή θήκη ισχύουν οι επόμενες δύο προτάσεις:

1.2.4 Πρόταση. *Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*

$$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \forall\, U \in \tau \;\; \mu\varepsilon \;\; x \in U \;:\; U \cap A \neq \emptyset.$$

1.2.5 Πρόταση. *Έστω (X,τ_X), (Y,τ_Y) τοπολογικοί χώροι. Τότε:*
(i) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$, για κάθε $A_1, A_2 \subseteq X$.
(ii) Αν $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, τότε $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Έστω (M,ρ) ένας μετρικός χώρος, τ_ρ η μετρική τοπολογία, και $\mathcal{B}$ το σύνολο των ανοιχτών μπαλλών του M. Τότε $\mathcal{B} \subseteq \tau_\rho$ και ικανοποιούνται οι δύο (ισοδύναμες) συνθήκες:
(1) $\forall\, A \in \tau_\rho \;\; \forall\, x \in A \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;:\; B(x,\varepsilon) \subseteq A$.
(2) $\forall\, A \in \tau_\rho \;\; \exists\, (B(x_i,\varepsilon_i))_{i\in I} \;:\; A = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Δηλ. οι ανοιχτές μπάλλες είναι μια οικογένεια από ¨εύχρηστα¨ ανοιχτά, που ¨παράγουν¨ όλα τα ανοιχτά. Γενικεύοντας αυτή την κατάσταση σε ένα τοπολογικό χώρο, έχουμε τον επόμενο ορισμό:

1.2.6 Ορισμός. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Η $\mathcal{B}$ λέγεται **βάση της** τ, αν για κάθε $A \in \tau$ και κάθε $x \in A$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subseteq A$. Τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{B}$ λέγονται **βασικά**.

Προφανώς και στην περίπτωση των τοπολογικών χώρων, όπως και στους μετρικούς, η συνθήκη του ορισμού ισοδυναμεί με την απαίτηση *κάθε ανοιχτό σύνολο γράφεται σαν ένωση βασικών συνόλων.*

1.2.7 Θεώρημα. *Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Το $\mathcal{B}$ είναι βάση για μια (μοναδική) τοπολογία επί του X, αν και μόνον αν το $\mathcal{B}$ έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:*
(i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
(ii) Γιά κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και κάθε $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ με $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Σε ένα μετρικό χώρο, οι ανοιχτές μπάλλες ικανποιούν τις συνθήκες του ανωτέρω θεωρήματος, επομένως αποτελούν βάση μιας μοναδικής τοπολογίας, της μετρικής τοπολογίας.

1.3. Περιοχές και Βάσεις Περιοχών

1.3.1 Ορισμός. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια **περιοχή του** x είναι ένα σύνολο $U \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει $A \in \tau$ με $x \in A \subseteq U$. Το σύνολο των περιοχών του x θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(x)$.

1.3.2 Ορισμός. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια **βάση περιοχών του** x είναι ένα (μη–κενό) σύνολο $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}(x)$, με την ιδιότητα: για κάθε $U \in \mathcal{N}(x)$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ με $x \in B \subseteq U$.

Κάθε σύνολο της οικογένειας $\mathcal{B}_x$ λέγεται **βασική περιοχή** του x.

Παρατηρούμε ότι οι περιοχές και οι βασικές περιοχές ενός σημείου δεν είναι κατ' ανάγκη ανοιχτές (ούτε κλειστές). Σε ένα μετρικό χώρο (M, ρ), μια περιοχή του x είναι οποιοδήποτε σύνολο περιέχει μια μπάλλα $B(x, \varepsilon)$. Οι ανοιχτές και οι κλειστές μπάλλες με κέντρο x είναι περιοχές του x. Επίσης, η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

είναι μια *βάση ανοιχτών περιοχών* του x, ενώ η

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{\hat{B}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

είναι μια *βάση κλειστών περιοχών* του x.

Ισχύει η επόμενη

1.3.3 Πρόταση. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και για κάθε $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ το σύστημα περιοχών του x. Τότε:*
(i) Αν $U \in \mathcal{N}(x)$, τότε $x \in U$ (άρα $U \neq \emptyset$).
(ii) Αν $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(x)$, τότε $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}(x)$.
(iii) Αν $U \in \mathcal{N}(x)$ και $U \subseteq V \subseteq X$, τότε $V \in \mathcal{N}(x)$.
(iv) $A \in \tau$ αν και μόνον αν $A \in \mathcal{N}(x)$, για κάθε $x \in A$.

1.3.4 Πρόταση. *Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και, γιά κάθε $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ μια βάση ανοιχτών περιοχών του x. Τότε*
(i) Ένα $A \subseteq X$ είναι ανοιχτό, αν και μόνον αν, γιά κάθε $x \in A$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ με $B \subseteq A$.
(ii) Η ένωση

$$\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$$

είναι βάση της τοπολογίας του X.

1.4. Συνεχείς απεικονίσεις

1.4.1 Ορισμός. Έστω (X, τ_X) και (Y, τ_Y) τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ και $x \in X$. Η f λέγεται **συνεχής στο** x, αν για κάθε περιοχή V του $f(x)$ υπάρχει περιοχή U του x με $f(U) \subseteq V$. Η f λέγεται **συνεχής**, αν είναι συνεχής στο x, για κάθε $x \in X$.

Επίσης, η f λέγεται **ανοιχτή**, αν $f(A)$ είναι ανοιχτό, για κάθε ανοιχτό $A \subseteq X$, ενώ λέγεται **κλειστή**, αν $f(S)$ είναι κλειστό, για κάθε κλειστό $S \subseteq X$.

Τέλος, μια συνεχής f λέγεται **ομοιομορφισμός**, αν είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι συνεχής.

Παρατηρούμε ότι σε μετρικούς χώρους, η συνθήκη της συνέχειας σε ένα σημείο, όπως διατυπώνεται στον ανωτέρω ορισμό, είναι ισοδύναμη με τον συνήθη ορισμό που δίνεται μέσω ανοιχτών μπαλλών.

1.4.2 Πρόταση. *Έστω (X, τ_X) και (Y, τ_Y) τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Η f είναι συνεχής.
(ii) $f^{-1}(V) \in \tau_X$, για κάθε $V \in \tau_Y$.
(iii) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, για κάθε $A \subseteq X$.

1.5. Υπόχωροι–Γινόμενα–Πηλίκα

1.5.1 Ορισμός. Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ονομάζουμε **σχετική τοπολογία** επί του A το σύνολο

$$\tau|_A := \{U \cap A \ : \ U \in \tau\}.$$

και το ζεύγος $(A, \tau|_A)$ **τοπολογικό υπόχωρο** του (X, τ).

Για την σχετική τοπολογία ισχύει το επόμενο

1.5.2 Θεώρημα. *Έστω (X, τ) ένας τοπολογικός χώρος και $(A, \tau|_A)$ ένας τοπολογικός υπόχωρος. Τότε:*

(i) Η $\tau|_A$ είναι τοπολογία επί του A. Ιδιαιτέρως, είναι η ελάχιστη τοπολογία επί του A που κάνει συνεχή την κανονική εμφύτευση $i : A \to X : a \mapsto a$.

(ii) Αν (Y, τ_Y) είναι τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής, τότε ο περιορισμός $f|_A : A \to Y$ είναι συνεχής.

(iii) Αν (Z, τ_Z) είναι τοπολογικός χώρος, μια απεικόνιση $g : Z \to A$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η $i \circ g : Z \to X$ είναι συνεχής.

1.5.3 Ορισμός. Έστω $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

και, για κάθε $i \in I$, συμβολίζουμε με $p_i : X \to X_i$ την κανονική προβολή. Παίρνουμε τις αντίστροφες εικόνες $p_i^{-1}(U_i)$, για κάθε $i \in I$ και $U_i \in \tau_i$, και τις πεπερασμένες τομές αυτών των συνόλων, δηλ. τα σύνολα της μορφής

$$U = \bigcap_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}), \tag{1.5.1}$$

όπου $i_1, \ldots, i_n \in I$ και $U_{i_k} \in \tau_{i_k}$. Το σύνολο των συνόλων της μορφής (1.5.1) είναι βάση μιας (μοναδικής) τοπολογίας επί του X, που ονομάζουμε **τοπολογία–γινόμενο** επί του X.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα σύνολα (1.5.1) είναι γινόμενα ανοιχτών συνόλων, με τους παράγοντες να είναι οι χώροι X_i, πλην ενός πεπερασμένου πλήθους δεικτών:

$$\bigcap_{1 \leq k \leq n} p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \prod_{i \in I} U_i$$

όπου

$$U_i = \begin{cases} U_{i_k}, \text{ αν } i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \\ X_i, \text{ αν } i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως, για πεπερασμένη οικογένεια τοπολογικών χώρων $\{(X_i, \tau_i)\}_{1\leq i\leq n}$, η βάση της τοπολογίας-γινόμενο στο $X_1 \times \cdots \times X_n$ συμπίπτει με το σύνολο

$$\mathbb{B} := \{A_1 \times \cdots \times A_n \ : \ A_i \in \tau_i\}. \tag{1.5.2}$$

1.5.4 Θεώρημα. *Έστω $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ τοπολογικοί χώροι, X το γινόμενό τους και τ_γ η τοπολογία-γινόμενο επί του X. Τότε*

(i) Η τ_γ είναι η ελάχιστη τοπολογία επί του X που κάνει συνεχείς τις κανονικές προβολές $p_i : X \to X_i$.

(ii) Οι προβολές p_i είναι ανοιχτές απεικονίσεις.

(iii) Αν (Z, τ_Z) είναι τοπολογικός χώρος, μια απεικόνιση $f : Z \to X$ είναι συνεχής αν και μόνον αν $p_i \circ f : Z \to X_i$ είναι συνεχής, για κάθε $i \in I$.

1.5.5 Πρόταση. *Έστω $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ τοπολογικοί χώροι, X το γινόμενό τους και τ_γ η τοπολογία-γινόμενο επί του X. Τότε, για κάθε $x_o = (x_i) \in X$, και κάθε $i_o \in I$, η εμφύτευση*

$$j : (X_{i_o}, \tau_{i_o}) \longrightarrow (X, \tau_\gamma) : z \longmapsto j(z) = (z_i)$$

όπου

$$z_i = \begin{cases} x_i, \text{ αν } i \neq i_o \\ z, \text{ αν } i = i_o \end{cases}$$

είναι ομοιομορφισμός του χώρου (X_{i_o}, τ_{i_o}) με την εικόνα $j(X_{i_o})$ εφοδιασμένη με την σχετική τοπολογία που ορίζεται στο $j(X_{i_o})$ από την τ_γ.

Η σχετική τοπολογία και η τοπολογία-γινόμενο είναι ειδικές περιπτώσεις αρχικής τοπολογίας:

1.5.6 Ορισμός. Έστω X σύνολο, (X_i, τ_i) οικογένεια τοπολογικών χώρων και συναρτήσεις $f_i : X \to X_i$, για κάθε $i \in I$. Θέτουμε

$$C = \{f_i^{-1}(G) \ : \ G \in \tau_i\,, \ i \in I\}.$$

Η τοπολογία τ που έχει βάση τις πεπερασμένες τομές από στοιχεία της C καλείται **ασθενής** ή **αρχική τοπολογία** ως προς την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που η οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ είναι ένα μονοσύνολο $\{f\}$, με $f : X \to (Y, \tau)$, η αρχική τοπολογία είναι η

$$f^{-1}(\tau) = \{f^{-1}(U) \ : \ U \in \tau\}.$$

1.5.7 Πρόταση. *Με τις υποθέσεις του ανωτέρω ορισμού, η αρχική τοπολογία είναι η μικρότερη τοπολογία του X που κάνει όλες τις f_i συνεχείς.*

1.5.8 Ορισμός. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος, $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του X, $\widetilde{X} \equiv X/_\sim$ ο χώρος–πηλίκο και $q : X \to \widetilde{X} : x \mapsto [x]$ η κανονική απεικόνιση. Ονομάζουμε **τοπολογία–πηλίκο** επί του $\widetilde{X}$ το σύνολο

$$\tau_q := \{U \subseteq \widetilde{X} \ : \ q^{-1}(U) \in \tau\}.$$

1.5.9 Θεώρημα. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. Τότε*

(i) Η τοπολογία-πηλίκο τ_q είναι η μέγιστη τοπολογία επί του $\widetilde{X}$ που κάνει συνεχή την $q : X \to \widetilde{X}$.

(ii) Αν (Z, τ_Z) είναι τοπολογικός χώρος, μια απεικόνιση $f : \widetilde{X} \to Z$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η $f \circ q : X \to Z$ είναι συνεχής.

Η τοπολογία-πηλίκο είναι ειδική περίπτωση τελικής τοπολογίας:

1.5.10 Ορισμός. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος, Y σύνολο και $f : X \to Y$ απεικόνιση επί. Ονομάζουμε **τελική τοπολογία** στο Y που ορίζεται από την f, την

$$\tau_f = \{U \subseteq Y \ : \ f^{-1}(U) \in \tau\}.$$

Η τ_f είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y που κάνει την f συνεχή.

1.6. Διαχωρισιμότητα

1.6.1 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται T_2–**χώρος** ή **χώρος Hausdorff**, αν για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχουν ανοιχτές περιοχές A του x και B του y με $A \cap B = \emptyset$.

Ο (X, τ) λέγεται T_1–**χώρος**, αν για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του x με $y \notin A$.

Ο (X, τ) λέγεται T_0–**χώρος**, αν για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή του ενός που δεν περιέχει το άλλο.

1.6.2 Παράδειγμα. Κάθε μετρικός χώρος είναι T_2.

Είναι προφανές ότι αν ένας χώρος είναι T_2 τότε είναι και T_1, και αν είναι T_1 τότε είναι και T_0. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

1.6.3 Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι T_1, αν και μόνον αν για κάθε $x \in X$, το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό.*

1.6.4 Πρόταση. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τότε κάθε τοπολογικός υπόχωρος είναι Hausdorff.*

1.6.5 Πρόταση. *Έστω $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ τοπολογικοί χώροι, και $X = \prod_{i \in I} X_i$ το γινόμενό τους, εφοδιασμένο με την τοπολογία-γινόμενο τ_γ. Τότε (X, τ_γ) είναι χώρος Hausdorff, αν και μόνον αν (X_i, τ_i) είναι Hausdorff, για κάθε $i \in I$.*

1.6.6 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται T_3–**χώρος** ή **κανονικός χώρος**, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_1, G_2 με $x \in G_1$, $F \subseteq G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

1.6.7 Παρατήρηση. Κάθε χώρος T_3 και T_1 είναι Hausdorff.

1.6.8 Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) είναι κανονικός, αν και μόνον αν κάθε $x \in X$ έχει βάση περιοχών από κλειστά σύνολα.*

1.7. Συνεκτικοί χώροι

1.7.1 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται **συνεκτικός**, αν δεν υπάρχουν ανοιχτά (και κλειστά) $A, B \subseteq X$, με $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$.

Ισοδύναμα, ο (X, τ) λέγεται συνεκτικός, αν τα μόνα ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του X είναι τα X και $\emptyset$.

1.7.2 Παραδείγματα. (i) Αν ο (X, τ) είναι διακριτός χώρος, τότε δεν είναι συνεκτικός.

(ii) Το $\mathbb{R}$ και τα διαστήματα είναι συνεκτικοί χώροι. Ομοίως το $\mathbb{R}^n$.

(iii) Το $\mathbb{R}^*$ δεν είναι συνεκτικό. Αντίθετα, τα $\mathbb{C}^*$ και $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, είναι συνεκτικά.

(iv) Η $GL(n, \mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικό. Αντίθετα, η $GL(n, \mathbb{C})$ είναι.

1.7.3 Πρόταση. *(i) Αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής και X συνεκτικός, τότε $f(X)$ συνεκτικός.*

(ii) Ένας χώρος-γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$ είναι συνεκτικός, αν και μόνον αν κάθε παράγοντας X_i είναι συνεκτικός.

1.7.4 Ορισμός. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται **συνεκτικό**, αν ο τοπολογικός υπόχωρος $(A, \tau|_A)$ είναι συνεκτικός.

1.7.5 Πρόταση. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε και η κλειστή θήκη $\overline{A}$ είναι συνεκτικό.*

1.7.6 Πρόταση. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $A_i \subseteq X$, $i \in I$, με $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Αν A_i είναι συνεκτικό, για κάθε $i \in I$, τότε η ένωση $A = \cap_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό.*

1.7.7 Ορισμός. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ονομάζουμε **συνεκτική συνιστώσα** του x και συμβολίζουμε με C_x την ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x.

Κάθε C_x είναι σύνολο κλειστό, συνεκτικό και μη–κενό. Είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x. Οι συνεκτικές συνιστώσες του X αποτελούν διαμέριση του X.

Κεφάλαιο 2

Τοπολογικές Ομάδες

2.1. Βασικές έννοιες

2.1.1 Ορισμός. Έστω G μια ομάδα εφοδιασμένη με μια τοπολογία τ_G. Λέμε ότι η G είναι *τοπολογική ομάδα* αν η πράξη της ομάδας

$$\gamma : G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$$

και η αντιστροφή

$$\alpha : G \to G : x \mapsto x^{-1}$$

είναι συνεχείς απεικονίσεις, όπου το $G \times G$ θεωρείται εφοδιασμένο με την τοπολογία-γινόμενο.

2.1.2 Παραδείγματα. (1) Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ με την συνήθη τοπολογία και η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ με την σχετική τοπολογία.

(2) Ομοίως, η προσθετική ομάδα $(\mathbb{C}, +)$ με την συνήθη τοπολογία και η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ με την σχετική τοπολογία.

(3) Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$ με την συνήθη τοπολογία.

(4) Κάθε ομάδα G εφοδιασμένη με την διακριτή τοπολογία.

(5) Ο μοναδιαίος κύκλος S^1 με τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών και την σχετική τοπολογία από το $\mathbb{C}$.

(6) Η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ με τον πολλαπλασιασμό πινάκων και την σχετική τοπολογία από την συνήθη τοπολογία του $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$.

2.1.3 Παρατήρηση. Σε μια ομάδα G εφοδιασμένη με μια τοπολογία τ_G, η συνέχεια της πράξης δεν συνεπάγεται την συνέχεια της αντιστροφής (βλ. Άσκηση 5). Άρα η συνέχεια της αντιστροφής είναι απαραίτητη συνθήκη στον ορισμό της τοπολογικής ομάδας. Αξίζει να σημειώσουμε ότι δεν συμβαίνει το ίδιο με την διαφορισιμότητα των πράξεων (βλ. ομάδες Lie).

2.1.4 Πρόταση. *Σε μια τοπολογική ομάδα (G, τ), η αντιστροφή $\alpha : G \to G$, και για κάθε $x \in G$, η αριστερή μεταφορά*

$$\ell_x : G \longrightarrow G : z \longmapsto xz$$

και η δεξιά μεταφορά

$$r_x : G \longrightarrow G : z \longmapsto zx$$

είναι ομοιομορφισμοί.

Απόδειξη. Η αντιστροφή $\alpha : G \to G$ είναι απεικόνιση 1-1 και επί με αντίστροφη τον εαυτό της, δηλ. $\alpha^{-1} = \alpha$. Άρα, αφού είναι συνεχής, είναι ομοιμορφισμός.

Επίσης, γιά κάθε $x \in G$ η αριστερή μεταφορά ℓ_x είναι μερική απεικόνιση του γινόμενου (με σταθεροποιημένη την πρώτη μεταβλητή), άρα περιορισμός της συνεχούς γ στον τοπολογικό υπόχωρο $\{x\} \times G \subseteq G \times G$, κι επομένως είναι συνεχής. Επιπλέον, είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, με αντίστροφη την $\ell_{x^{-1}}$, που είναι και αυτή συνεχής. Άρα κάθε ℓ_x είναι ομοιομορφισμός. Ομοίως η δεξιά μεταφορά r_x είναι ομοιομορφισμός. □

2.1.5 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται **ομογενής**, αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει ομοιμορφισμός $f : X \to X$ με $f(x) = y$.

2.1.6 Πρόταση. *Κάθε τοπολογική ομάδα είναι ομογενής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σε κάθε τοπολογική ομάδα G, Αν $x, y \in G$, οι ομοιομορφισμοί $\ell_{yx^{-1}}$ και $r_{x^{-1}y}$ μεταφέρουν το x στο y. □

2.1.7 Πρόταση. *Εστω G τοπολογική ομάδα, $A, B \subseteq G$ και $g \in G$.*

(i) Αν A είναι ανοιχτό, τότε gA και Ag είναι ανοιχτά.

(ii) Αν A είναι κλειστό, τότε gA και Ag είναι κλειστά.

(iii) Αν A είναι ανοιχτό, τότε AB και BA είναι ανοιχτά.

(iv) Αν A είναι κλειστό και B πεπερασμένο, τότε AB και BA είναι κλειστά.

Απόδειξη. (i) Τα $gA = \ell_g(A)$ και $Ag = r_g(A)$ είναι ανοιχτά, σαν εικόνες του ανοιχτού A μέσω των ομοιομορφισμών ℓ_g και r_g.

(ii) Τα gA και Ag είναι κλειστά, σαν εικόνες του κλειστού A μέσω των ίδιων ομοιομορφισμών.

(iii) Από το (i), τα $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ και $BA = \bigcup_{b \in B} bA$ είναι ανοιχτά, σαν ενώσεις ανοιχτών.

(iv) Από το (ii), τα $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ και $BA = \bigcup_{b \in B} bA$ είναι κλειστά, σαν πεπερασμένες ενώσεις κλειστών. □

2.1.8 Ορισμός. Εστω G, H τοπολογικές ομάδες. Μιά $f : G \to H$ λέγεται **μορφισμός (τοπολογικών ομάδων)** εάν η f είναι (ομο)μορφισμός ομάδων και συνεχής. Ενας μορφισμός f λέγεται **ισομορφισμός (τοπολογικών ομάδων)** αν είναι ισομορφισμός ομάδων και ομοιομορφισμός. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, η f^{-1} είναι επίσης ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων.

Σε κάθε τοπολογική ομάδα (G, τ) η ταυτοτική $id_G : (G, \tau) \to (G, \tau)$ είναι ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων, και αν $f : (G, \tau_G) \to (H, \tau_H)$ και $g : (H, \tau_H) \to (K, \tau_K)$ είναι μορφισμοί τοπολογικών ομάδων, τότε και η σύνθεση $g \circ f : (G, \tau_G) \to (K, \tau_K)$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων.

2.1.9 Παραδείγματα. (1) Η απεικόνιση $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων. Η $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι ισομορφισμός, με αντίστροφο τον $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

(2) Η ορίζουσα $\det : GL(n, R) \to \mathbb{R}^*$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Αποδείξτε πλήρως ότι οι ομάδες των Παραδειγμάτων 2.1.2 είναι τοπολογικές ομάδες.

(2) Ομοίως αποδείξτε πλήρως τους ισχυρισμούς στα Παραδείγματα 2.1.9.

(3) Να δείξετε ότι μια τοπολογία τ της ομάδας G την κάνει τοπολογική ομάδα, αν και μόνον αν η απεικόνιση

$$f : G \times G \to G : (x, y) \mapsto f(x, y) := x^{-1}y$$

είναι συνεχής.

(4) Έστω G ομάδα με ουδέτερο e και τ μιά τοπολογία της G. Να δείξετε ότι η (G, τ) είναι τοπολογική ομάδα, αν και μόνον αν ισχύουν οι επόμενες συνθήκες:

(i) Η πράξη της ομάδας είναι συνεχής στο (e, e).

(ii) Για κάθε $x \in G$, οι μεταφορές l_x και r_x είναι συνεχείς.

(iii) Η αντιστροφή $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής στο e.

(5) Έστω $(\mathbb{Z}, +)$ η προσθετική ομάδα των ακεραίων. Θεωρούμε το σύνολο $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ που περιέχει τα σύνολα $\emptyset$, $\mathbb{Z}$ και όλα τα “διαστήματα" $[n, +\infty) \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε ότι το τ είναι μια τοπολογία επί του $\mathbb{Z}$, ως προς την οποία η πρόσθεση είναι συνεχής αλλά η αντιστροφή δεν είναι.

(6) Θεωρούμε την ορθογώνια ομάδα

$$\mathcal{O}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbb{R} \right\} \leq GL(2,\mathbb{R})$$

(με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και τοπολογία την σχετική από την συνήθη τοπολογία του $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^4$) και τον μοναδιαίο κύκλο S^1 (βλ. Παραδείγματα 2.1.2(5)). Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$f : \mathcal{O}(2,\mathbb{R}) \to S^1 : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

είναι ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων.

(7) Έστω (G,τ_G), (H,τ_H) τοπολογικές ομάδες και $f : G \to H$ μορφισμός ομάδων. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής (άρα και μορφισμός τοπολογικών ομάδων) αν και μόνον αν είναι συνεχής στο $e \in G$.

2.2. Οι περιοχές της μονάδας

Όπως δείξαμε στην Πρόταση 2.1.6, κάθε τοπολογική ομάδα είναι ομογενής τοπολογικός χώρος, με την ομογένεια να εισάγεται από τις μεταφορές ℓ_x και r_x, $x \in G$. Άρα, οι ανοιχτές περιοχές του σημείου e καθορίζουν τις περιοχές κάθε σημείου $x \in G$:

$$A \in \mathcal{N}(x) \iff x^{-1}A \in \mathcal{N}(e) \iff Ax^{-1} \in \mathcal{N}(e).$$

Έτσι, οι περιοχές του e καθορίζουν όλη την τοπολογία, γι' αυτό οι ιδιότητές τους έχουν ιδιαίτερη σημασία.

2.2.1 Πρόταση. *Έστω G τοπολογική ομάδα και $\mathcal{N}(e)$ το σύνολο των περιοχών του ουδέτερου $e \in G$. Τότε το $\mathcal{N}(e)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(N 1) Για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$, ισχύει $e \in U$.
(N 2) Για κάθε $U, V \in \mathcal{N}(e)$, ισχύει $U \cap V \in \mathcal{N}(e)$.
(N 3) Για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$, υπάρχει $V \in \mathcal{N}(e)$ με $V \cdot V \subseteq U$.
(N 4) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$, ισχύει $U^{-1} \in \mathcal{N}(e)$.
(N 5) Για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$ και $x \in U$, ισχύει $x^{-1}U \in \mathcal{N}(e)$.
(N 6) Για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$ και $x \in G$, ισχύει $xUx^{-1} \in \mathcal{N}(e)$.
(N 7) Γιά κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$ και κάθε $A \subseteq G$ με $U \subseteq A$, ισχύει $A \in \mathcal{N}(e)$

Απόδειξη. Τα (N 1), (N 2) και (N 7) ισχύουν για τις περιοχές οποιουδήποτε σημείου (βλ. Πρόταση 1.3.3).

(N 3) Επειδή το $U \in \mathcal{N}(e)$ είναι περιοχή του $e \cdot e = e$, η συνέχεια της πράξης $\gamma(x,y) = xy$ συνεπάγεται ότι $\gamma^{-1}(U)$ είναι περιοχή του $(e,e) \in G \times G$, άρα υπάρχει ένα ανοιχτό W με $(e,e) \in W \subseteq \gamma^{-1}(U)$. Από τον ορισμό της τοπολογίας-γινόμενο, υπάρχουν ανοιχτά A και B του G, με

$$(e,e) \in A \times B \subseteq W \subseteq \gamma^{-1}(U).$$

Θέτουμε $V := A \cap B \in \mathcal{N}(e)$. Τότε

$$V \times V \subseteq A \times B \subseteq \gamma^{-1}(U)$$

και $V \cdot V = \gamma(V \times V) \subseteq U$.

(N 4) Επειδή η αντιστροφή α είναι ομοιμορφισμός, για $U \in \mathcal{N}(e)$, το $U^{-1} = \alpha(U)$ είναι περιοχή του $\alpha(e) = e$, δηλ. $U^{-1} \in \mathcal{N}(e)$.

(N 5) Επειδή γιά κάθε $x \in U \in \mathcal{N}(e)$ η αριστερή μεταφορά $\ell_{x^{-1}}$ είναι ομοιμορφισμός, το $x^{-1}U = \ell_{x^{-1}}(U)$ είναι περιοχή του $\ell_{x^{-1}}(x) = e$, δηλ. $x^{-1}U \in \mathcal{N}(e)$.

(N 6) Για κάθε $x \in G$, η απεικόνιση

$$g : G \to G : a \mapsto x^{-1}ax$$

είναι σύνθεση ομοιμορφισμών: $g = \ell_{x^{-1}} \circ r_x$. Επομένως, για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$, το $g(U)$ είναι περιοχή του $g(e) = e$, δηλ. $x^{-1}Ux \in \mathcal{N}(e)$. $\square$

Προφανώς ισχύει και η ιδιότητα (N 5a): Για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$ και $x \in U$, ισχύει $Ux^{-1} \in \mathcal{N}(e)$.

Αν τώρα έχουμε δεδομένη μια βάση περιοχών του e, τότε οι ιδιότητες της προηγούμενης Πρότασης παίρνουν την επόμενη μορφή:

2.2.2 Πρόταση. *Έστω G τοπολογική ομάδα και $\mathcal{B}$ μια βάση περιοχών του ουδέτερου $e \in G$. Τότε η $\mathcal{B}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(FN 1) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$, ισχύει $e \in U$.

(FN 2) Για κάθε $U, V \in \mathcal{B}$, υπάρχει $W \in \mathcal{B}$ με $W \subseteq U \cap V$.

(FN 3) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \cdot V \subseteq U$.

(FN 4) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V^{-1} \subseteq U$.

(FN 5) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$ και $x \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $Vx \subseteq U$.

(FN 6) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$ και $x \in G$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $x^{-1}Vx \subseteq U$.

Απόδειξη. Τα (FN 1) και (FN 2) είναι άμεσα από τον ορισμό της βάσης περιοχών ενός σημείου.

(FN 3) Για κάθε $U \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(e)$, λόγω της (N 3), υπάρχει $W \in \mathcal{N}(e)$ με $W \cdot W \subseteq U$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \subseteq W$, άρα $V \cdot V \subseteq W \cdot W \subseteq U$.

(FN 4) Επειδή η αντιστροφή α είναι ομοιομορφισμός, για κάθε $U \in \mathcal{B}$, ισχύει $\alpha(U) \in \mathcal{N}(\alpha(e))$, δηλ. $U^{-1} \in \mathcal{N}(e)$. Άρα υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \subseteq U^{-1}$, οπότε $V^{-1} \subseteq U$.

(FN 5) Αφού $x \in U$, το Ux^{-1} είναι περιοχή του e, άρα υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \subseteq Ux^{-1}$. Αλλά τότε $Vx \subseteq U$.

(FN 6) Θεωρούμε $x \in G$ και τον ομοιομορφισμό $g = \ell_{x^{-1}} \circ r_x$. Επομένως, για κάθε $U \in \mathcal{B}$, το $g^{-1}(U)$ είναι περιοχή του e, άρα υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \subseteq g^{-1}(U)$, ή, ισοδύναμα, $g(V) = x^{-1}Vx \subseteq U$. □

Παρατηρούμε ότι πάλι είναι άμεσο ότι ισχύει και η (FN 5a): Για κάθε $U \in \mathcal{B}$ και $x \in U$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $xV \subseteq U$.

2.2.3 Παρατήρηση. Στην προηγούμενη πρόταση, η ιδιότητες (FN 3-4) μπορεί να αντικατασταθούν με την ιδιότητα

(*) Γιά κάθε $U \in \mathcal{B}$, υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V^{-1} \cdot V \subseteq U$.

Πράγματι, έστω ότι ισχύει η (*) και έστω $U \in \mathcal{B}$. Γιά το V της (*), έχουμε

$$V^{-1} = V^{-1} \cdot e \subseteq V^{-1} \cdot V \subseteq U,$$

δηλ. ισχύει η (FN 4). Επομένως, γιά το V, υπάρχει $W_1 \in \mathcal{B}$, με $W_1^{-1} \subseteq V$. Από την (FN 2), υπάρχει $W_2 \in \mathcal{B}$ με $W_2 \subseteq W_1 \cap V$. Τότε

$$W_2 \cdot W_2 \subseteq W_1 \cdot V \subseteq V^{-1} \cdot V \subseteq U,$$

αρα ισχύει και η (FN 3).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν οι (FN 3) και (FN 4), και έστω $U \in \mathcal{B}$. Από την (FN 3), υπάρχει $W_1 \in \mathcal{B}$ με $W_1 \cdot W_1 \subseteq U$. Γιά το $W_1 \in \mathcal{B}$, από την (FN 4), υπάρχει $W_2 \in \mathcal{B}$ με $W_2^{-1} \subseteq W_1$. Από την (FN 2), υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V \subseteq W_1 \cap W_2$. Αρα

$$V^{-1} \cdot V \subseteq W_2^{-1} \cdot W_1 \subseteq W_1 \cdot W_1 \subseteq U,$$

δηλ. ισχύει η (*).

2.2.4 Θεώρημα. *Έστω G ομάδα και $\mathcal{F}$ μια μη-κενή οικογένεια υποσυνόλων της G, που ικανοποιεί τις ιδιότητες (FN 1)-(FN 6) της Πρότασης 2.2.2. Τότε υπάρχει ακριβώς μία τοπολογία τ της G, τέτοια ώστε (G, τ) να είναι τοπολογική ομάδα και το $\mathcal{F}$ να είναι βασικό σύστημα ανοιχτών περιοχών του e.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{B} := \{Ux \ : \ x \in G, \ U \in \mathcal{F}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}$, άρα, αν ισχύει η πρόταση, η $\mathcal{F}$ είναι βάση *ανοιχτών* περιοχών του e.

(1) Το $\mathbb{B}$ είναι βάση για μια τοπολογία τ:

(1α) Η $\mathbb{B}$ είναι κάλυψη της G: Πράγματι, έστω $x \in G$. Για οποιοδήποτε $U \in \mathcal{F}$, από την (FN 1), $e \in U$, άρα $x \in Ux$.

(1β) Έστω $x, y \in G$, $U, V \in \mathcal{F}$ και $z \in Ux \cap Vy$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $W \in \mathcal{F}$ με $z \in Wz \subseteq Ux \cap Vy$. Επειδή $z \in Ux$, υπάρχει $u \in U$ με $z = ux$, ή, ισοδύναμα, $u = zx^{-1} \in U$. Από την (FN 5) υπάρχει $U_1 \in \mathcal{F}$ με $U_1 u = U_1 zx^{-1} \subseteq U$, δηλ. $U_1 z \subseteq Ux$. Όμοια, επειδή $z \in Vy$, υπάρχει $v \in V$ με $z = vy$, ή, ισοδύναμα, $v = zy^{-1} \in V$, και υπάρχει $V_1 \in \mathcal{F}$ με $V_1 v = V_1 zy^{-1} \subseteq V$, δηλ. $V_1 z \subseteq Vy$. Από την (FN 2) υπάρχει $W \in \mathcal{F}$ με $W \subseteq U_1 \cap V_1$. Τότε $Wz \subseteq U_1 z \cap V_1 z \subseteq Ux \cap Vy$.

(2) Η τ κάνει τις πράξεις συνεχείς: αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$f : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x^{-1}y$$

είναι συνεχής (βλ. και Άσκηση 3 της §2.1). Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(Ux)$ είναι ανοιχτό, για κάθε $U \in \mathcal{F}$ και $x \in G$. Έστω λοιπόν $U \in \mathcal{F}$, $x \in G$ και $(a, b) \in f^{-1}(Ux)$. Τότε $a^{-1}b \in Ux$, ή $a^{-1}bx^{-1} = u \in U$. Άρα, από την (FN 5), υπάρχει $V_1 \in \mathcal{F}$ με $V_1 u = V_1 a^{-1}bx^{-1} \subseteq U$. Από την (FN 6), υπάρχει $V_2 \in \mathcal{F}$ με $a^{-1}V_2 a \subseteq V_1$, οπότε

$$a^{-1}V_2 bx^{-1} = a^{-1}V_2 aa^{-1}bx^{-1} \subseteq V_1 a^{-1}bx^{-1} \subseteq U,$$

ή $a^{-1}V_2 b \subseteq Ux$. Επειδή ισχύουν οι (FN 3)–(FN 4), ισχύει και η (*), άρα υπάρχει $W \in \mathcal{F}$ με $W^{-1} \cdot W \subseteq V_2$, απ' όπου προκύπτει

$$f(Wa \times Wb) = (Wa)^{-1} \cdot (Wb) = a^{-1}W^{-1} \cdot Wb \subseteq a^{-1}V_2 b \subseteq Ux.$$

(3) Η $\mathcal{F}$ είναι βάση περιοχών του e για την τοπολογία τ: Έστω $A \in \mathcal{N}(e)$. Τότε υπάρχει ανοιχτό $B \in \tau$ με $e \in B \subseteq A$. Επειδή η $\mathbb{B}$ είναι βάση της τ, υπάρχουν $x \in G$ και $U \in \mathcal{F}$ με $e \in Ux \subseteq B \subseteq A$, οπότε $x^{-1} \in U$ και λόγω της (FN 5) υπάρχει $V \in \mathcal{F}$ με $Vx^{-1} \subseteq U$, ή $V \subseteq Ux \subseteq A$.

(4) Μονοσήμαντο: Έστω $\bar{\tau}$ μια άλλη τοπολογία της G, τέτοια ώστε η $(G, \bar{\tau})$ να είναι τοπολογική ομάδα και $\mathcal{F}$ να είναι βάση ανοιχτών περιοχών του e. Από την ομογένεια της $\bar{\tau}$, η οικογένεια $\{Ux \ : \ x \in G, \ U \in \mathcal{F}\}$ είναι βάση της $\bar{\tau}$, άρα $\bar{\tau} = \tau$ (βλ. και Πρόταση 1.3.4). $\square$

Στην περίπτωση που τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{F}$ είναι ιδιαιτέρως *υποομάδες* της G, οι ιδιότητες (FN 1), (FN 3), (FN 4) και (FN 5) ισχύουν αυτόματα (γιά τις (FN 3), (FN 4) και (FN 5), αρκεί να πάρουμε $V := U$). Έχουμε λοιπόν το επόμενο

2.2.5 Πόρισμα. *Έστω G ομάδα και $\mathcal{F}$ μια μη-κενή οικογένεια υποομάδων της G, που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

(SG 1) Γιά κάθε $U, V \in \mathcal{F}$, υπάρχει $W \in \mathcal{F}$ με $W \subseteq U \cap V$.

(SG 2) Γιά κάθε $U \in \mathcal{F}$ και $a \in G$, υπάρχει $V \in \mathcal{F}$ με $a^{-1}Va \subseteq U$.

Τότε υπάρχει ακριβώς μία τοπολογία τ της G, τέτοια ώστε (G, τ) να είναι τοπολογική ομάδα και το $\mathcal{F}$ να είναι βασικό σύστημα ανοιχτών περιοχών του e.

2.2.6 Παρατηρήσεις. (1) Η ιδιότητα (SG 2) ισχύει αυτόματα, για $V = U$, αν όλες οι υποομάδες της $\mathcal{F}$ είναι κανονικές. Ιδιαιτέρως, η (SG 2) ισχύει, αν η ομάδα G είναι αβελιανή.

(2) Η ιδιότητα (SG 1) ισχύει αυτόματα, αν η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ολικά διατεταγμένη.

2.2.7 Παράδειγμα. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Συμβολίζουμε με R_s το σύνολο των ακολουθιών από στοιχεία του R. Το R_s είναι αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση των ακολουθιών. Ορίζουμε τα σύνολα

$$U_n := \{\alpha \in R_s \ : \ \alpha_m = 0, \ \forall\, m \leq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$$

και η οικογένεια $\mathcal{F} := \{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ορίζει μια μοναδική τοπολογία τ στο R_s, που κάνει το (R_s, τ) τοπολογική ομάδα και την $\mathcal{F}$ βάση περιχών του e.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα. Ένα $U \subseteq G$ λέγεται **συμμετρικό**, αν $U = U^{-1}$. Να δείξετε ότι οι συμμετρικές περιοχές του e αποτελούν βάση περιοχών του e.

(2) Έστω (G,τ) τοπολογική ομάδα. Να δείξετε ότι για κάθε $U \in \mathcal{N}(e)$ ισχύει

$$\overline{U} \subseteq U^{-1}U.$$

(3) Έστω (G,τ) τοπολογική ομάδα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}^o(e)$ το σύνολο των συμμετρικών περιοχών του e. Να δείξετε ότι, για κάθε $M \subseteq G$, ισχύει

$$\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathcal{N}^o(e)} MV.$$

(4) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}^o(e)} V = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e)} U.$$

2.3. Υποομάδες – γινόμενα – πηλίκα

2.3.1 Πρόταση. *Έστω (G,τ) τοπολογική ομάδα, $H \leq G$ και $\tau|H$ η σχετική τοπολογία στην H. Τότε $(H,\tau|_H)$ είναι τοπολογική ομάδα και η κανονική εμφύτευση $i : H \hookrightarrow G : h \mapsto h$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων.*

2.3.2 Πρόταση. *Έστω (G_i,τ_i), $i = 1,2$, τοπολογικές ομάδες και τ_γ η τοπολογία γινόμενο. Τότε η $(G_1 \times G_2, \tau_\gamma)$ είναι τοπολογική ομάδα και οι κανονικές προβολές $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$ είναι μορφισμοί τοπολογικών ομάδων.*

Αν τώρα G είναι τοπολογική ομάδα και $H \leq G$, τότε το πηλίκο G/H είναι τοπολογικός χώρος με την τοπολογία πηλίκο και η κανονική απεικόνιση $q : G \to G/H : x \mapsto xH$ είναι συνεχής. Επιπλέον, έχουμε την επόμενη

2.3.3 Πρόταση. *Έστω G τοπολογική ομάδα και $H \leq G$. Τότε η $q : G \to G/H$ είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq G$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι $q(A) \subseteq G/H$ είναι ανοιχτό. Από τον ορισμό της τοπολογίας-πηλίκου αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανοιχτό το σύνολο $q^{-1}(q(A)) \subseteq G$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} q^{-1}(q(A)) &= \{y \in G \ : \ q(y) \in q(A)\} \\ &= \{y \in G \ : \ yH \in q(A)\} \\ &= \{y \in G \ : \ \exists\, a \in A \ \text{ με } \ yH = aH\} \\ &= \{y \in G \ : \ \exists\, a \in A \ \text{ με } \ y \in aH\} \\ &= \bigcup_{a \in A} aH = AH, \end{aligned}$$

που είναι ανοιχτό (Πρόταση 2.1.7(iii)). □

Αν επιπλέον $H \lhd G$, θα δείξουμε ότι η G/H είναι τοπολογική ομάδα και η q μορφισμός τοπολογικών ομάδων. Χρειαζόμαστε πρώτα το επόμενο

2.3.4 Λήμμα. *Έστω G_i, $i = 1, 2$, τοπολογικές ομάδες και $H_i \lhd G_i$. Τότε $H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$. Αν θεωρήσουμε την $G_1 \times G_2$ εφοδιασμένη με την τοπολογία-γινόμενο, τις G_i/H_i και $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2$ με τις αντίστοιχες τοπολογίες-πηλίκα και την $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ με την τοπολογία-γινόμενο, τότε οι χώροι $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2$ και $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ είναι ομοιόμορφοι.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi : G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \to G_1/H_1 \times G_2/H_2 : (x_1, x_2) \cdot (H_1 \times H_2) \mapsto (x_1 H_1, x_2 H_2).$$

Είναι άμεσο ότι η Φ είναι 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός.

Δείχνουμε ότι είναι συνεχής: επειδή το πεδίο ορισμού της Φ είναι χώρος-πηλίκο, η συνέχεια της Φ είναι ισοδύναμη με την συνέχεια της απεικόνισης $\Phi \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times G_2 \arrow[d, "q"'] \arrow[dr] & \\
(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \arrow[r, "\Phi"'] & G_1/H_1 \times G_2/H_2
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, είναι

$$\begin{aligned}
\Phi \circ q(x_1, x_2) &= \Phi((x_1, x_2) \cdot (H_1 \times H_2)) \\
&= (x_1 H_1, x_2 H_2) \\
&= (q_1(x_1), q_2(x_2)) \\
&= (q_1 \times q_2)(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

όπου $q_i : G_i \to G_i/H_i$ οι κανονικές απεικονίσεις. Άρα η

$$\Phi \circ q = q_1 \times q_2$$

είναι συνεχής σαν καρτεσιανό γινόμενο συνεχών.

Δείχνουμε τώρα ότι η Φ είναι ανοιχτή: Έστω A ανοιχτό στην τοπολογία-πηλίκο, δηλαδή $q^{-1}(A)$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι το $\Phi(A)$ είναι ανοιχτό. Παρατηρούμε ότι επειδή η q είναι επί, ισχύει $A = q(q^{-1}(A))$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\Phi \circ q(q^{-1}(A))$ είναι ανοιχτό. Όμως

$$\Phi \circ q(q^{-1}(A)) = (q_1 \times q_2)(q^{-1}(A))$$

είναι ανοιχτό, σαν εικόνα ανοιχτού μέσω καρτεσιανού γινόμενου ανοιχτών. $\square$

2.3.5 Πρόταση. *Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \lhd G$. Τότε η G/H με την τοπολογία-πηλίκο είναι τοπολογική ομάδα και η $q : G \to G/H$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με γ και $\bar{\gamma}$ τα γινόμενα των G και G/H, και με $q : G \to G/H$ και $\bar{q} : G \times G \to (G \times G)/(H \times H)$ τις αντίστιχες κανονικές απεικονίσεις. Επειδή η Φ είναι ομοιομορφισμός, η συνέχεια της $\bar{\gamma}$ είναι ισοδύναμη με την συνέχεια της $\bar{\gamma} \circ \Phi$. Επειδή η τελευταία έχει πεδίο ορισμού ένα σύνολο-πηλίκο, η συνέχειά της ισοδυναμεί με την συνέχεια της $\bar{\gamma} \circ \Phi \circ \bar{q}$.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[d, "\bar{q}"'] & & G \arrow[dd, "q"] \\
G \times G/H \times H \arrow[d, "\Phi"'] & & \\
G/H \times G/H \arrow[rr, "\bar{\gamma}"'] & & G/H
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $(x, y) \in G \times G$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} \circ \Phi \circ \bar{q}(x, y) &= \bar{\gamma}(\Phi((x, y) \cdot (H \times H)) \\
&= \bar{\gamma}(xH, yH) = (xH)(yH) = xyH \\
&= q \circ \gamma(x, y)
\end{aligned}$$

δηλαδή $\bar{\gamma} \circ \Phi \circ \bar{q} = q \circ \gamma$, που είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών.

Έστω τώρα α και $\bar{\alpha}$ η αντιστροφή της G και της G/H, αντίστοιχα. Η συνέχεια της $\bar{\alpha}$ ισοδυναμεί με την συνέχεια της $\bar{\alpha} \circ q$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q"'] & G \arrow[d, "q"] \\
G/H \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in G$, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \circ q(x) &= \bar{\alpha}(xH) = x^{-1}H \\ &= q \circ \alpha(x) \end{aligned}$$

δηλαδή η $\bar{\alpha} \circ q$ είναι συνεχής, σαν σύνθεση συνεχών.

Τέλος η q είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων, αφού είναι μορφισμός ομάδων από τον ορισμό της $\bar{\gamma}$, και δείξαμε ότι είναι συνεχής. □

Έστω τώρα $f : G \to H$ ένας μορφισμός τοπολογικών ομάδων και $\bar{f} : G/\ker f \to f(G)$ ο επαγόμενος (αλγεβρικός) ισομορφισμός. Επειδή ο $\bar{f}$ ορίζεται σε σύνολο-πηλίκο, η συνέχειά του ισοδυναμεί με την συνέχεια της σύνθεσης $\bar{f} \circ q : G \to f(G)$. Όμως $\bar{f} \circ q = f$, άρα ο $\bar{f}$ είναι συνεχής.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f"'] & G/Kerf \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & f(G) \leq H \end{tikzcd}$$

Η συνέχεια του αντίστροφου $\bar{f}^{-1} : f(G) \to G/\ker f$ δεν εξασφαλίζεται. Γι' αυτό, το (αλγεβρικό) 1^o Θεώρημα ισομορφισμού διατυπώνεται στην περίπτωση των τοπολογικών ομάδων ως εξής:

2.3.6 Θεώρημα. *Έστω $f : G \to H$ ένας μορφισμός τοπολογικών ομάδων και $\bar{f} : G/\ker f \to f(G)$ ο επαγόμενος (αλγεβρικός) ισομορφισμός. Ο $\bar{f}$ είναι ισομορφισμός τοπολογικών ομάδων, αν και μόνον αν η f είναι ανοιχτή (ή κλειστή) απεικόνιση.*

Απόδειξη. Η $\bar{f}$ είναι 1–1 και επί, και συνεχής. Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $\bar{f}$ ανοιχτή αν και μόνον αν f ανοιχτή.

Αν η $\bar{f}$ είναι ανοιχτή, η q είναι ανοιχτή, άρα η $f = \bar{f} \circ q$ είναι ανοιχτή. Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι ανοιχτή και έστω $A \subseteq G/kerf$ ανοιχτό, δηλ. $q^{-1}(A) \subseteq G$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι $\bar{f}(A)$ ανοιχτό. Επειδή q επί,

$$\bar{f}(A) = \bar{f}(q(q^{-1}(A))) = \bar{f} \circ q(q^{-1}(A)) = f(q^{-1}(A))$$

είναι εικόνα ανοιχτού, μέσω της ανοιχτής f. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \leq G$. Θεωρούμε στο $G \times G$ την τοπολογία-γινόμενο τ_γ και στο $H \times H$ την σχετική τοπολογία $\tau_\gamma|_{H\times H}$. Επίσης θεωρούμε την σχετική τοπολογία $\tau|_H$ στο H και την τοπολογία-γινόμενο $(\tau|_H)_\gamma$ στο $H \times H$. Να δείξετε ότι οι $\tau_\gamma|_{H\times H}$ και $(\tau|_H)_\gamma$ συμπίπτουν.

(2) Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα, $H, L \leq G$ και $H \subseteq L$. Θεωρούμε στο L την σχετική τοπολογία $\tau|_L$ και στο L/H την τοπολογία-πηλίκο $(\tau|_L)_q$. Επίσης θεωρούμε την τοπολογία πηλίκο τ_q του G/H και την σχετική τοπολογία $\tau_q|_{L/H}$ στο $L/H \subseteq G/H$. Να δείξετε ότι οι $(\tau|_L)_q$ και $\tau_q|_{L/H}$ συμπίπτουν.

(3) Έστω G τοπολογική ομάδα, $H \lhd G$, $L \lhd G$ και $H \subseteq L$. Να δείξετε ότι G/L και $(G/H)/(L/H)$ είναι ισόμορφες τοπολογικές ομάδες.

(4) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t).$$

Να δείξετε ότι

(i) Η f είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων και ανοιχτή.

(ii) Οι $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και S^1 είναι ισόμορφες τοπολογικές ομάδες.

(5) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : \mathbb{C}^* \to (0, +\infty) : z \mapsto |z|.$$

Να δείξετε ότι

(i) Η g είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων και ανοιχτή.

(ii) Οι $\mathbb{C}^*/S^1$ και $(0, +\infty)$ είναι ισόμορφες τοπολογικές ομάδες.

(6) Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$h : \mathbb{C}^* \to S^1 : z \mapsto z/|z|$$

εισάγει ένα ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων $\mathbb{C}^*/(0, +\infty) \to S^1$.

(7) Θεωρούμε τον περιορισμό της ορίζουσας στην γενική γραμμική ομάδα

$$\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*.$$

Να δείξετε ότι

(i) Η $\det$ είναι μορφισμός τοπολογικών ομάδων και ανοιχτή.

(ii) Αν $SL(n, R)$ είναι ο πυρήνας αυτού του μορφισμού (: *ειδική γραμμική ομάδα*) να δείξετε ότι $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, R)$ και $\mathbb{R}^*$ είναι ισόμορφες τοπολογικές ομάδες.

(8) Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα. Να δείξετε ότι

$$H \leq G \ \Rightarrow \overline{H} \leq G$$

και

$$H \lhd G \ \Rightarrow \ \overline{H} \lhd G.$$

(9) Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \leq G$. Αν η G είναι Hausdorff και η H είναι αβελιανή, να δείξετε ότι και η $\overline{H}$ είναι αβελιανή.

2.4. Ανοιχτές υποομάδες

2.4.1 Πρόταση. *Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \leq G$.*
(i) Αν η H είναι ανοιχτή, τότε είναι κλειστή.
(ii) Αν υπάρχει $U \in \mathcal{N}(e)$ με $U \subseteq H$, τότε η H είναι ανοιχτή.
(iii) Η G/H είναι διακριτή, αν και μόνον αν η H είναι ανοιχτή.

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι

$$G = \bigcup_{a \in G} aH,$$

και ότι $H = aH$, για κάθε $a \in H$. Άρα

$$H^c = \bigcup_{a \notin H} aH.$$

Αν η H είναι ανοιχτή, τότε κάθε aH είναι ανοιχτό, άρα H^c είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών.

(ii) Έστω $U \in \mathcal{N}(e)$ με $U \subseteq H$. Τότε $uH = H$, για κάθε $u \in U$, άρα $H = UH$ είναι ανοιχτό (βλ. Πρόταση 2.1.7(iii)).

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} G/H \ \text{διακριτή} \ &\Leftrightarrow \ \{aH\} \ \text{ανοιχτό}\,, \quad \forall\, a \in G \\ &\Leftrightarrow \ q^{-1}(\{aH\}) \ \text{ανοιχτό}\,, \quad \forall\, a \in G. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} q^{-1}(\{aH\}) &= \{x \in G \;:\; q(x) \in \{aH\}\} \\ &= \{x \in G \;:\; xH = aH\} \\ &= \{x \in G \;:\; x \in aH\} \\ &= aH. \end{aligned}$$

Δηλ. το πηλίκο G/H είναι διακριτό, αν και μόνον αν κάθε aH είναι ανοιχτό, που ισοδυναμεί με H ανοιχτό, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

2.4.2 Παραδείγματα. (1) Στην τοπολογική ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι $(0, +\infty) \lhd \mathbb{R}^*$ ανοιχτή, άρα $\mathbb{R}^*/(0, +\infty)$ διακριτή. Ποιά είναι η $\mathbb{R}^*/(0, +\infty)$;

(2) Στην τοπολογική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ είναι $\mathbb{Q} \lhd \mathbb{R}$ όχι ανοιχτή, άρα $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ όχι διακριτή.

2.5. Διαχωρισιμότητα

2.5.1 Πρόταση. *Μια τοπολογική ομάδα (G, τ) είναι Hausdorff αν και μόνον αν το μονοσύνολο $\{e\}$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Το ευθύ ισχύει σε κάθε χώρο Hausdorff.

Έστω ότι το $\{e\}$ είναι κλειστό. Επειδή η (G, τ) είναι ομοιογενής, κάθε $\{x\}$ με $x \in G$ είναι κλειστό. Έστω λοιπόν $a \neq b \in G$. Τότε $e \neq ab^{-1}$ και $\{ab^{-1}\}$ κλειστό, άρα το $U := \{ab^{-1}\}^c$ είναι ανοιχτή περιοχή του e. Επομένως (βλ. (*)) υπάρχει ανοιχτό $V \in \mathcal{N}(e)$ με $V^{-1} \cdot V \subseteq U$, δηλ. $ab^{-1} \notin V^{-1} \cdot V$. Ισχυριζόμαστε ότι οι ανοιχτές περιοχές Va και Vb των a και b, αντίστοιχα, έχουν την ζητούμενη ιδιότητα $Va \cap Vb = \emptyset$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} z \in Va \cap Vb \Rightarrow\; & z = v_1 a = v_2 b, \;\text{ με }\; v_1, v_2 \in V \\ \Rightarrow\; & a = v_1^{-1} v_2 b \;\in\; V^{-1} \cdot Vb \\ \Rightarrow\; & ab^{-1} \;\in\; V^{-1} \cdot V \subseteq U = \{ab^{-1}\}^c, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. □

2.5.2 Θεώρημα. *Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \leq G$. Τότε*

(i) G Hausdorff $\Rightarrow$ H Hausdorff.

(ii) G/H Hausdorff $\Leftrightarrow$ H κλειστή υποομάδα της G.

(iii) G/H Hausdorff και H Hausdorff $\Rightarrow$ G Hausdorff.

(iv) Αν (G_i, τ_i), $i \in I$, είναι τοπολογικές ομάδες με $G = \prod_{i \in I} G_i$, τότε G Hausdorff $\Leftrightarrow$ G_i Hausdorff, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. Οι (i) και (iv) ισχύουν σε όλους τους χώρους Hausdorff.

(ii) Έστω G/H Hausdorff. Τότε το μονοσύνολο $\{H\} \subseteq G/H$ είναι κλειστό. Αν $\pi : G \to G/H$ είναι η κανονική προβολή, το $\pi^{-1}(\{H\}) \subseteq G$ είναι κλειστό. Όμως $\pi^{-1}(\{H\}) = H$.

Αντίστροφα, έστω $H \leq G$ κλειστή, και έστω $aH, bH \in G/H$ με $aH \neq bH$. Τότε $a^{-1}bH \neq H$, ή, ισοδύναμα, $e \notin a^{-1}bH$. Επίσης, από την ομοιογένεια της τοπολογίας της G, αφού η H είναι κλειστή, κάθε σύμπλοκο xH είναι κλειστό, δηλ. και $a^{-1}bH$ κλειστό. Άρα $e \in U := (a^{-1}bH)^c \in \mathcal{N}(e)$ και $U^{-1} \in \mathcal{N}(e)$. Επομένως υπάρχουν $V \in \mathcal{N}(e)$ με $V^{-1} \cdot V \subseteq U^{-1}$, και $W \in \mathcal{N}(e)$ με $a^{-1}Wa \subseteq V$. Τότε $Wa \in \mathcal{N}(a)$ και $Wb \in \mathcal{N}(b)$. Επειδή η π είναι ανοιχτή, $\pi(Wa) = WaH$ είναι ανοιχτή περιοχή του aH και $\pi(Wb) = WbH$ είναι ανοιχτή περιοχή του bH στο G/H. Θα δείξουμε ότι $WaH \cap WbH = \emptyset$. Πράγματι, αν $z \in WaH \cap WbH$, τότε $z = w_1ah_1 = w_2bh_2$ με $w_1, w_2 \in W$, και $h_1, h_2 \in H$, οπότε

$$\begin{aligned} e &= (w_1ah_1)^{-1}(w_2bh_2) = h_1(w_1ah_1)^{-1}(w_2bh_2)h_1^{-1} \\ &= a^{-1}w_1^{-1}w_2bh_2h_1^{-1} \ \in \ a^{-1}W^{-1}WbH \\ &= (a^{-1}W^{-1}a)(a^{-1}Wa)a^{-1}bH \\ &\subseteq V^{-1}Va^{-1}bH \subseteq U^{-1}a^{-1}bH \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $e = u^{-1}a^{-1}bh$ με $u \in U$ και $h \in H$. Αλλά τότε $U \ni u = a^{-1}bh \in a^{-1}bH$, άτοπο.

(iii) Αν G/H είναι Hausdorff, τότε $\{H\}$ είναι κλειστό στο G/H, και επειδή π συνεχής, $\pi^{-1}(\{H\}) = H$ είναι κλειστό υποσύνολο της G. Επίσης, H Hausdorff συνεπάγεται ότι $\{e\}$ είναι κλειστό στο H. Άρα $\{e\}$ είναι κλειστό στην G, και G Hausdorff από την προηγούμενη Πρόταση 1.4.1. □

2.5.3 Παραδείγματα. (1) Το $(\mathbb{R}, +)$ και κάθε υποομάδα του είναι Hausdorff.

(2) Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστή υποομάδα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv S^1$ Hausdorff. Αλλιώς, S^1 Hausdorff σαν υποομάδα της $\mathbb{C}^*$.

(3) Το n-τάξης torus $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ είναι Hausdorff.

2.5.4 Πρόταση. *Έστω (G, τ) μιά τοπολογική ομάδα και*

$$E := \overline{\{e\}}$$

η κλειστή θήκη του $\{e\}$. Τότε E είναι η μικρότερη κλειστή κανονική υποομάδα της G.

Απόδειξη. Το E είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο της G που περιέχει το e. Επειδή οι ομοιομορφισμοί το μεταφέρουν σε κλειστό, έχουμε ότι E^{-1},

$x^{-1}E$ γιά $x \in E$ και $y^{-1}Ey$ για $y \in G$ είναι κλειστά και, προφανώς, περιέχουν το e. Άρα, $E \subseteq E^{-1}$, $E \subseteq x^{-1}$ και $E \subseteq y^{-1}Ey$, απ' όπου προκύπτουν οι ανισότητες $E^{-1} \subseteq E$, $xE \subseteq E$ και $y^{-1}Ey \subseteq E$, με $x \in E$ και $y \in G$. Οι τρεις τελευταίες ανισότητες συνοψίζονται στην $E \lhd G$. □

Όπως είδαμε, μια τοπολογική ομάδα δεν είναι πάντα Hausdorff. Είναι όμως πάντοτε κανονικός (: regular) τοπολογικός χώρος. Πιο συγκεκριμμένα, ισχύει το επόμενο

2.5.5 Θεώρημα. *(i) Κάθε τοπολογική ομάδα (G, τ) είναι κανονικός χώρος.*

(ii) Για κάθε $H \leq G$, το πηλίκο G/H εφοδιασμένο με την τοπολογία-πηλίκο τ_q είναι κανονικός χώρος.

Απόδειξη. (i) Λόγω της ομογένειας, αρκεί να δείξουμε ότι αν A είναι κλειστό με $e \notin A$, τότε υπάρχουν ανοιχτά $U \in \mathcal{N}(e)$ και $V \supseteq A$, με $U \cap V = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e \notin A(\text{κλειστό}) &\Rightarrow\ e \in A^c(\text{ανοιχτό}) \in \mathcal{N}(e) \\ &\Rightarrow\ \exists \text{ ανοιχτό } V \in \mathcal{N}(e)\ :\ V^{-1}V \subseteq A^c \\ &\Rightarrow\ V^{-1}V \cap A = \emptyset \\ &\Rightarrow\ V \cap VA = \emptyset \end{aligned}$$

Τα ανοιχτά $V \in \mathcal{N}(e)$ και $VA \supseteq A$ είναι τα ζητούμενα.

(ii) Έστω $xH \in G/H$ και $A \subseteq G/H$ κλειστό με $xH \notin A$. Παρατηρούμε ότι το A είναι ένα σύνολο συμπλόκων, δηλ.

$$A = \{x_iH\ :\ i \in I\}$$

και η σχέση $xH \notin A$ ισοδυναμεί με $x \notin x_iH$ και $x_i \notin xH$, για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε την αντίστροφη εικόνα

$$\begin{aligned} \tilde{A} =&\ q^{-1}(A) = \{y \in G\ :\ q(y) \in A\} \\ =&\ \{y \in G\ :\ yH = x_iH,\ \text{για κάποιο } i \in I\} \\ =&\ \{y \in G\ :\ y \in x_iH,\ \text{για κάποιο } i \in I\} \\ =&\bigcup_{i \in I} x_iH \end{aligned}$$

Επειδή η κανονική απεικόνιση $q : G \to G/H$ είναι συνεχής, το $\tilde{A}$ είναι κλειστό στον κανονικό χώρο G, με $x \notin \tilde{A}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} x \notin \tilde{A} \text{ (κλειστό)} \Rightarrow\ & x \in \tilde{A}^c \text{ (ανοιχτό)} \in \mathcal{N}(x) \\ \Rightarrow\ & \tilde{A}^c x^{-1} \text{ (ανοιχτό)} \in \mathcal{N}(e) \\ \Rightarrow\ & \exists \text{ ανοιχτό } V \in \mathcal{N}(x)\ :\ V^{-1}V \subseteq \tilde{A}^c x^{-1} \\ \Rightarrow\ & V^{-1}Vx \subseteq \tilde{A}^c \\ \Rightarrow\ & V^{-1}Vx \cap \tilde{A} = \emptyset \\ \Rightarrow\ & Vx \cap V\tilde{A} = \emptyset. \end{aligned}$$

Το σύνολο Vx είναι ανοιχτή περιοχή του $x \in G$ και το $V\tilde{A}$ είναι ανοιχτό σαν γινόμενο του ανοιχτού V με το $\tilde{A}$. Ισχυριζόμαστε ότι οι εικόνες $q(Vx)$ και $q(V\tilde{A})$ είναι τα ζητούμενα ανοιχτά υποσύνολα του G/H: Επειδή η q είναι ανοιχτή, οι ανωτέρω εικόνες είναι ανοιχτά υποσύνολα του G/H, με $xH \in q(Vx)$ και

$$A = q(q^{-1}(A)) = q(\tilde{A}) \subseteq q(V\tilde{A}).$$

Μένει να δείξουμε ότι $q(Vx) \cap q(V\tilde{A}) = \emptyset$. Πράγματι, αν $yH \in q(Vx) \cap q(V\tilde{A})$, τότε:

$$yH \in q(Vx) = \{vxH\ :\ v \in V\}\ \Rightarrow\ \exists v_1 \in V\ :\ yH = v_1 xH$$

και

$$yH \in q(V\tilde{A}) = \{vx_iH\ :\ v \in V,\ h \in H\}\ \Rightarrow\ \exists v_2 \in V\ :\ yH = v_2 x_i H$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι υπάρχουν $v_1, v_2 \in V$ με

$$Vx\ \ni\ v_1 x\ \in\ v_2 x_i H \subseteq V x_i H \subseteq V\tilde{A},$$

αλλά τα Vx και $V\tilde{A}$ είναι ξένα, άτοπο. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να δείξετε ότι μια τοπολογική ομάδα είναι Hausdorff αν και μόνον αν είναι T_0.

(2) Να δείξετε ότι η $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ δεν είναι Hausdorff.

(3) Να δείξετε ότι κάθε τοπολογική ομάδα είναι κανονική, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 2 της §2.2.

2.6. Συνεκτικές ομάδες

2.6.1 Θεώρημα. *Έστω (G, τ) τοπολογική ομάδα και $H \leq G$. Τότε*

(i) G συνεκτική $\Rightarrow G/H$ συνεκτική.

(ii) H συνεκτική και G/H συνεκτική $\Rightarrow G$ συνεκτική.

(iii) Αν $(G_i, \tau_i)_{i\in I}$, είναι τοπολογικές ομάδες και $G = \prod_{i\in I} G_i$ εφοδιάζεται με την τοπολογία-γινόμενο τ_γ, τότε (G, τ_γ) συνεκτική $\Leftrightarrow G_i$ συνεκτική, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη. (i) Η $G/H = \pi(G)$ είναι συνεκτική, σαν εικόνα της συνεκτικής G μέσω της συνεχούς π.

(ii) Έστω G όχι συνεκτική. Τότε υπάρχουν $A, B \subseteq G$ ανοιχτά (και κλειστά), μη–κενά, με $A \cup B = G$ και $A \cap B = \emptyset$. Τα $q(A)$ και $q(B)$ είναι ανοιχτά (επειδή η q είναι ανοιχτή), μη–κενά, υποσύνολα του G/H, με

$$q(A) \cup q(B) = q(A \cup B) = G/H$$

(επειδή η q είναι επί). Αν $q(A)$ και $q(B)$ είναι και ξένα, τότε η G/H δεν είναι συνεκτική, άτοπο. Δείχνουμε λοιπόν ότι $q(A)$ και $q(B)$ είναι ξένα:

Επειδή η H είναι συνεκτική, το gH είναι συνεκτικό, σαν εικόνα συνεκτικού μέσω της συνεχούς l_g, για κάθε $g \in G$. Επίσης, επειδή A και B είναι ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα της G, τα $A \cap gH$ και $B \cap gH$ είναι ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα της gH. Επειδή η gH είναι συνεκτική, θα πρέπει η μία από τις δύο τομές να είναι κενή και η άλλη ίση με gH. Αν $g \in A$, τότε $g \in A \cap aH \neq \emptyset$. Άρα, $A \cap gH = gH$, δηλ. $gH \subseteq A$. Δηλ. για κάθε $a \in A$ είναι $aH \subseteq A$ και για κάθε $b \in B$ είναι $bH \subseteq B$, επομένως τα $q(A)$ και $q(B)$ είναι ξένα.

Η (iii) ισχύει σε όλους τους τοπολογικούς χώρους. $\square$

2.6.2 Θεώρημα. *Έστω G τοπολογική ομάδα και C_e η συνεκτική συνιστώσα του e. Τότε*

(i) Η C_e είναι κλειστή, συνεκτική και κανονική υποομάδα της G.

(ii) Οι συνεκτικές συνιστώσες της G είναι τα σύμπλοκα aC_e, $a \in G$.

Απόδειξη. (i) Η C_e είναι κλειστό και συνεκτικό, σαν συνεκτική συνιστώσα.

Το C_e^{-1} είναι συνεκτικό σύνολο, σαν εικόνα συνεκτικού μέσω της αντιστροφής και περιέχει το e, άρα $C_e^{-1} \subseteq C_e$, οπότε και $C_e \subseteq C_e^{-1}$. Δηλ., $C_e = C_e^{-1}$ και η C_e είναι κλειστή ως προς την αντιστροφή. Επίσης, για κάθε $h \in C_e$, το hC_e είναι συνεκτικό, σαν εικόνα συνεκτικού μέσω της αριστερής μεταφοράς, κι επειδή $h^{-1} \in C_e$ παίρνουμε και $e \in hC_e$, άρα $hC_e \subseteq C_e$, δηλ. η C_e είναι κλειστή ως προς την πράξη της ομάδας, άρα είναι $C_e \leq G$.

Τέλος, για κάθε $g \in G$, το $g^{-1}C_e g$ είναι συνεκτικό σαν εικόνα του συνεκτικού C_e μέσω της συνεχούς $l_{g^{-1}} \circ r_g$ και περιέχει το e, άρα $g^{-1}C_e g \subseteq C_e$, που αποδεικνύει ότι $C_e \lhd G$.

(ii) Έστω $a \in G$. Θεωρούμε το σύμπλοκο aC_e που είναι συνεκτικό σύνολο και περιέχει το a, άρα $aC_e \subseteq C_a$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει και $C_a \subseteq aC_e$. Πράγματι, $a^{-1}C_a$ είναι συνεκτικό σύνολο που περιέχει το e, άρα $a^{-1}C_a \subseteq C_e$, απ' όπου προκύπτει $C_a \subseteq aC_e$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να δείξετε ότι η $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι συνεκτική.

(2) Να δείξετε ότι η S^n είναι συνεκτική, γιά κάθε $n \geq 1$.

(3) Να δείξετε ότι η $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ είναι συνεκτική.

(4) Να δείξετε ότι η $\mathbb{Q} \lhd \mathbb{R}$ δεν είναι διακριτή, αλλά είναι totally disconnected: κάθε συνεκτικό σύνολο είναι μονοσύνολο.

(5) Να δείξετε ότι η $GL(n, \mathbb{R})$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.

(6) Να δείξετε ότι η $GL(n, \mathbb{C})$ είναι συνεκτική.

2.7. Ομάδες με μετρική

2.7.1 Ορισμός. Σε μια ομάδα G, μια μετρική $d : G \times G \to [0, +\infty)$ λέγεται **αριστερά αναλλοίωτη**, αν

$$d(ax, ay) = d(x, y), \qquad \forall\, a, x, y \in G.$$

Ανάλογα, λέγεται **δεξιά αναλλοίωτη**, αν

$$d(xa, ya) = d(x, y), \qquad \forall\, a, x, y \in G.$$

2.7.2 Πρόταση. *Έστω (G, d) ομάδα με αριστερά αναλλοίωτη μετρική. Τότε η αριστερές μεταφορές l_a, $a \in G$ είναι ομοιομορφισμοί.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην G με $x_n \longrightarrow x$, ισχύει $l_a(x_n) = ax_n \longrightarrow l_a(x) = ax$. Πράγματι, $d(ax_n, ax) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$. □

Όμοια αποδεικνύεται ότι σε κάθε ομάδα με δεξιά αναλλοίωτη μετρική οι δεξιές μεταφορές είναι ομοιομορφισμοί.

2.7.3 Ορισμός. Έστω G μια ομάδα. Μια **εκτίμηση** (value) επί της G είναι μια απεικόνιση $|\ | : G \to [0, +\infty)$ με

(i) $|e| = 0$.
(ii) $|x| > 0$, $\forall\ x \neq e$.
(iii) $|x^{-1}| = |x|$, $\forall\ x \in G$.
(iv) $|xy| \leq |x| + |y|$, $\forall\ x, y \in G$.

Σε μια προσθετική ομάδα $(G, +)$ οι ανωτέρω ιδιότητες παίρνουν μια πιό οικεία μορφή:

(i) $|0| = 0$.
(ii) $|x| > 0$, $\forall\ x \neq 0$.
(iii) $|-x| = |x|$, $\forall\ x \in G$.
(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\ x, y \in G$.

2.7.4 Πρόταση. *Έστω $(G, |\ |)$ μια ομάδα εφοδιασμένη με εκτίμηση. Τότε η απεικόνιση*

$$d : G \times G \longrightarrow [0, +\infty) : (x, y) \longmapsto |x^{-1}y|,$$

ορίζει στην G μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $x \in G$, είναι $d(x, x) = |x^{-1}x| = |e| = 0$.
(ii) Για κάθε $x \neq y \in G$, είναι $x^{-1}y \neq e$ και $d(x, y) = |x^{-1}y| > 0$.
(iii) Για κάθε $x, y \in G$, είναι

$$d(y, x) = |y^{-1}x| = |(y^{-1}x)^{-1}| = |x^{-1}y| = d(x, y).$$

(iv) Για κάθε $x, y, z \in G$, είναι

$$d(x, y) + d(y, z) = |x^{-1}y| + |y^{-1}z| \geq |(x^{-1}y) \cdot (y^{-1}z)| = |x^{-1}z| = d(x, z).$$

(v) Για κάθε $a, x, y \in G$, είναι

$$d(ax, ay) = |(ax)^{-1}ay| = |x^{-1}a^{-1}ay| = |x^{-1}y| = d(x, y). \qquad \square$$

2.7.5 Πρόταση. *Έστω (G, d) ομάδα με αριστερά αναλλοίωτη μετρική. Τότε η απεικόνιση*

$$|\ | : G \longrightarrow [0, +\infty) : x \longmapsto |x| = d(e, x)$$

είναι εκτίμηση.

Απόδειξη. (i) $|e| = d(e, e) = 0$.
(ii) Για κάθε $x \neq e$, είναι $|x| = d(e, x) > 0$.

(iii) Για κάθε $x \in G$, είναι

$$|x^{-1}| = d(e, x^{-1}) = d(xe, xx^{-1}) = d(x, e) = |x|.$$

(iv) Για κάθε $x, y \in G$,

$$|xy| = d(e, xy) \leq d(e, x) + d(x, xy) = d(e, x) + d(e, y) = |x| + |y|. \qquad \square$$

2.7.6 Παρατήρηση. Αν d είναι μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική στην ομάδα G, η d ορίζει μια εκτίμηση $|\ |$ (Προτ. 2.7.5) που με την σειρά της ορίζει μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική ρ (Προτ. 2.7.4). Τότε, για κάθε $x, y \in G$ είναι

$$\rho(x, y) = |x^{-1}y| = d(e, x^{-1}y) = d(xe, xx^{-1}y) = d(x, y),$$

δηλ. $\rho = d$.

Αν $|\ |$ είναι εκτίμηση στην G, αυτή ορίζει μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική d, που με τη σειρά της ορίζει μια εκτίμηση $\|\ \|$. Τότε, για κάθε $x \in G$ είναι

$$\|x\| = d(e, x) = |e^{-1}x| = |x|,$$

δηλ. $\|\ \| = |\ |$.

2.7.7 Θεώρημα. *Έστω $(G, |\ |)$ μια αβελιανή ομάδα εφοδιασμένη με εκτίμηση. Τότε η G εφοδιασμένη με την μετρική τοπολογία που ορίζεται από την αντίστοιχη d είναι τοπολογική ομάδα.*

Απόδειξη. Η αντιστροφή είναι συνεχής: Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσα ακολουθία στην G με $x_n \longrightarrow x$. Τότε

$$d(x_n^{-1}, x^{-1}) = |x_n x^{-1}| = |x^{-1} x_n| = d(x, x_n) \longrightarrow 0,$$

δηλ. $x_n^{-1} \longrightarrow x^{-1}$.

Επίσης η πράξη της ομάδας είναι συνεχής: Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνουσες ακολουθίες στην G με $x_n \longrightarrow x$ και $y_n \longrightarrow y$. Τότε

$$\begin{aligned} d(x_n y_n, xy) &= |(x_n y_n)^{-1} xy| = |y_n^{-1} x_n^{-1} xy| = |x_n^{-1} x y_n^{-1} y| \\ &\leq |x_n^{-1} x| + |y_n^{-1} y| = d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Τότε κάθε $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ γράφεται μονοσήμαντα σαν $x = p^r \cdot \frac{m}{n}$, όπου $r, m, n \in \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n}$ ανάγωγο και $p \nmid m$, $p \nmid n$. Θέτουμε

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, \text{ αν } x \neq 0 \\ 0, \text{ αν } x = 0. \end{cases}$$

(1) Να δείξετε ότι η $|\ |_p$ είναι μια εκτίμηση της $(\mathbb{Q}, +)$.

(2) Να εξετάσετε αν η επαγόμενη τοπολογία συμπίπτει με την σχετική τοπολογία στο $\mathbb{Q}$ από την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 3

Τοπικά κυρτοί χώροι

3.1. Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

Σε όλο το παρόν Κεφάλαιο θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, που συμβολίζει ένα από τα σώματα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

3.1.1 Ορισμός. Έστω E ένας $\mathbb{K}$–διανυσματικός χώρος ($\mathbb{K}$-δχ) εφοδιασμένος με μια τοπολογία τ. Το ζεύγος (E,τ) λέγεται **τοπολογικός διανυσματικός χώρος** (τδχ), αν οι πράξεις $(x,y)\mapsto x+y$ και $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$ είναι συνεχείς.

3.1.2 Παρατήρηση. Αν (E,τ) είναι τδχ, τότε η προσθετική ομάδα $(E,+)$ με την τ είναι τοπολογική ομάδα. Πράγματι, η αντιστροφή $x\mapsto -x$ είναι συνεχής, σαν μερική απεικόνιση του γινόμενου $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$, για $\lambda=-1$.

3.1.3 Παράδειγμα. Ολοι οι χώροι Banach είναι τδχ.

Τα δύο επόμενα αποτελέσματα είναι προφανή:

3.1.4 Πρόταση. *Έστω (E,τ) τδχ. Τότε οι απεικονίσεις της μορφής*

$$E\longrightarrow E : x\longmapsto \lambda x + x_o$$

με $x_o\in E$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$, είναι ομοιομορφισμοί. □

3.1.5 Πρόταση. *Έστω (E,τ) τδχ και $F\leq E$. Τότε $(F,\tau|_F)$ είναι τδχ.* □

3.1.6 Πρόταση. *Έστω (E,τ) τδχ και $F\leq E$. Τότε $\overline{F}$ είναι τδχ.*

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε με π την πρόσθεση του E και με γ το αριθμητικό γινόμενο. Επειδή π και γ είναι συνεχείς, έχουμε ότι

$$\overline{F}+\overline{F}=\pi(\overline{F}\times\overline{F})=\pi(\overline{F\times F})\subseteq\overline{\pi(F\times F)}=\overline{F+F}=\overline{F}$$

και
$$\mathbb{K} \cdot \overline{F} = \gamma(\mathbb{K} \times \overline{F}) = \gamma(\overline{\mathbb{K} \times F}) \subseteq \overline{\gamma(\mathbb{K} \times F)} = \overline{F},$$
που σημαίνουν την κλειστότητα του $\overline{F}$ ως προς τις δύο πράξεις. □

3.1.7 Θεώρημα. *Έστω (E, τ) τδχ και $F \leq E$. Τότε*
(i) Ο E/F με την τοπολογία-πηλίκο είναι τδχ.
(ii) Η κανονική προβολή $q : E \to E/F$ είναι ανοιχτή και συνεχής.
(iii) Ο χώρος E/F είναι Hausdorff αν και μόνον αν F είναι κλειστός.

Απόδειξη. Τα (ii) και (iii) είναι γνωστά από τις τοπολογικές ομάδες.

Για το (i): Επειδή η πρόσθεση είναι μεταθετική, κάθε $F \leq E$ είναι κανονική υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(E, +)$, άρα ο E/F με την τοπολογία–πηλίκο είναι τοπολογική ομάδα, δηλ. η πρόσθεση είναι συνεχής. Αποδεικνύουμε την συνέχεια του γινόμενου
$$\mathbb{K} \times E/F \longrightarrow E/F.$$
Έστω $(\lambda_o, x_o + F) \in \mathbb{K} \times E/F$ και $A \subseteq E/F$ ανοιχτό με $\lambda_o x_o + F \in A$. Από τον ορισμό της τοπολογίας–πηλίκου, $q^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό στον E και $\lambda_o x_o \in q^{-1}(A)$. Από την συνέχεια του γινόμενου στον E, υπάρχουν ανοιχτές περιοχές U του λ_o στο $\mathbb{K}$ και V του x_o στο E με $U \cdot V \subseteq q^{-1}(A)$, απ' όπου προκύπτει
$$U \cdot q(V) = q(U \cdot V) \subseteq q(q^{-1}(A)) = A.$$
Επειδή η q είναι ανοιχτή, το $q(V)$ είναι η ζητούμενη ανοιχτή περιοχή του $x_o + F$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.1.8 Θεώρημα. *Έστω $(E_i, \tau_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια τδχ. Τότε ο χώρος-γινόμενο $E = \prod_{i \in I} E_i$ με την τοπολογία-γινόμενο είναι τδχ.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η πρόσθεση $E \times E \to E$ είναι συνεχής σε ένα ζεύγος (a, b), όπου $a = (a_i)$ και $b = (b_i)$ με $a_i, b_i \in E_i$. Έστω $A \subseteq E$ ανοιχτό με $a + b \in A$. Από τον ορισμό της τοπολογίας–γινόμενου, υπάρχουν ανοιχτά $U_i \subseteq E_i$ με $U_i \neq E_i$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος από τα $i \in I$, με
$$a + b \in U = \prod_{i \in I} U_i \subseteq A.$$
Αν $U_i = E_i$, θέτουμε $V_i = W_i = E_i$. Αν $U_i \neq E_i$, από την συνέχεια της πρόσθεσης στον E_i, υπάρχουν $V_i, W_i \subseteq E_i$ ανοιχτά με $a_i \in V_i$, $b_i \in W_i$ και $V_i + W_i \subseteq U_i$. Θέτουμε $V = \prod_{i \in I} V_i$ και $W = \prod_{i \in I} W_i$. Τότε $a \in V$, $b \in W$ και $V + W \subseteq U$.

Δείχνουμε τώρα ότι το γινόμενο $\mathbb{K} \times E \to E$ είναι συνεχές σε ένα ζεύγος (λ, a), όπου $\lambda \in \mathbb{K}$ και $a = (a_i)$ με $a_i \in E_i$. Έστω $A \subseteq E$ ανοιχτό με $\lambda a \in A$. Όπως προηγουμένως, υπάρχουν ανοιχτά $U_i \subseteq E_i$ με $U_i \neq E_i$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος από τα $i \in I$, με

$$\lambda a \in U = \prod_{i \in I} U_i \subseteq A.$$

Αν $U_i = E_i$, θέτουμε $V_i = \mathbb{K}$ και $W_i = E_i$. Αν $U_i \neq E_i$, από την συνέχεια του γινόμενου στον E_i, υπάρχουν $V_i \subseteq \mathbb{K}$ και $W_i \subseteq E_i$ ανοιχτά με $\lambda \in V_i$, $a_i \in W_i$, και $V_i \cdot W_i \subseteq U_i$. Θέτουμε $V = \bigcap_{i \in I} V_i$ και $W = \prod_{i \in I} W_i$. Επειδή το πλήθος των $V_i \neq \mathbb{K}$ είναι πεπερασμένο, το V είναι ανοιχτό στο $\mathbb{K}$. Προφανώς $\lambda \in V$, $a \in W$ και $V \cdot W \subseteq U$. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να δείξετε ότι αν (E, τ) είναι μιγαδικός τδχ, τότε είναι και πραγματικός τδχ.

(2) Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και τ μια τοπολογία επί του E. Τότε (E, τ) είναι τδχ, αν και μόνον αν ισχύουν οι επόμενες συνθήκες:
(i) $(E, +, \tau)$ είναι τοπολογική ομάδα.
(ii) Για κάθε $x \in E$, η απεικόνιση $\lambda \mapsto \lambda x$ είναι συνεχής στο $0 \in \mathbb{K}$.
(iii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, η απεικόνιση $x \mapsto \lambda x$ είναι συνεχής στο $0_E \in E$.
(iv) Η απεικόνιση $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ είναι συνεχής στο $(0, 0_E)$.

3.2. Περιοχές του μηδενός

Σε ένα τδχ (E, τ), η υποκείμενη προσθετική ομάδα $(E, +)$ είναι τοπολογική ομάδα. Άρα ο χώρος (E, τ) είναι ομογενής και οι περιοχές του μηδενός ικανοποιούν τις συνθήκες (N1)–(N7) της Πρότασης 2.2.1. Επιπλέον, υπάρχει μια βάση περιοχών του μηδενός που ικανοποιεί τις (FN 1)–(FN 6) της Πρότασης 2.2.2. Όμως η ύπαρξη μιας βάσης περιοχών του μηδενός με τις ανωτέρω ιδιότητες δεν εξασφαλίζει την συνέχεια του αριθμητικού πολλαπλασιασμού. Για να φθάσουμε στην μορφή που παίρνει το Θεώρημα 2.2.4 στους τδχ, χρειαζόμαστε πρώτα τα επόμενα:

3.2.1 Ορισμός. Έστω E ένας $\mathbb{K}$–δχ και $A \subseteq E$. Το A λέγεται **απορροφούν** αν,

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, \lambda_o \in \mathbb{K} \;:\; \lambda x \in A, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| \leq |\lambda_o|.$$

Το A λέγεται **ισορροπημένο** αν,

$$\forall\, x \in A \text{ και } \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| \leq 1 \;:\; \lambda x \in A.$$

Το A λέγεται **κυρτό** αν, για κάθε $x, y \in A$,

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \;:\; \lambda \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Ένα σύνολο κυρτό και ισορροπημένο λέγεται **απολύτως κυρτό**.

3.2.2 Παρατηρήσεις. (1) Κάθε απορροφούν σύνολο περιέχει το 0_E.

(2) Για τα απορροφούντα σύνολα, η σχέση του ορισμού ισοδυναμεί με την σχέση

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, \lambda_o \in \mathbb{R} \;:\; x \in \lambda A, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| \geq |\lambda_o|.$$

(3) Η γραμμική θήκη $[A]$ ενός απορροφούντος συνόλου A συμπίπτει με τον δχ E.

(4) Κάθε μη κενό ισορροπημένο σύνολο περιέχει το 0_E.

3.2.3 Πρόταση. *Σε ένα τδχ (E, τ), κάθε περιοχή του μηδενός είναι απορροφούσα.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq E$ περιοχή του 0_E και $x \in E$. Η συνέχεια της μερικής απεικόνισης $\gamma_x(\lambda) = \lambda x$ στο $0 \in \mathbb{K}$ συνεΠαγεται την ύπαρξη ενός $\lambda_o > 0$ με $\lambda x \in U$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| < \lambda_o$. □

3.2.4 Πρόταση. *Σε ένα τδχ (E, τ), κάθε περιοχή του μηδενός έχει μια ισοροπημένη υποπεριοχή.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq E$ περιοχή του μηδενός. Η συνέχεια της απεικόνισης $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ στο $(0, 0_E)$ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός $\varepsilon > 0$ και μιας ανοιχτής περιοχής V του 0_E, τέτοιων ώστε $\lambda x \in U$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| < \varepsilon$ και κάθε $x \in V$. Άρα $\lambda V \subseteq U$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι κάθε σύνολο λV είναι ανοιχτή περιοχή του 0_E, για $\lambda \neq 0$. Άρα η ένωση

$$W := \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda V \subseteq U$$

είναι ανοιχτή περιοχή του 0_E. Το W είναι ισορροπημένο: Έστω $y \in W$ και $\mu \in \mathbb{K}$ με $|\mu| < 1$. Τότε

$$\begin{aligned} y \in W \Rightarrow\; & \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| < \varepsilon \text{ και } \exists\, v \in V \;:\; y = \lambda v \\ & \Rightarrow \mu y = \mu\lambda v \in \mu\lambda V \text{ με } |\mu\lambda| < \varepsilon \\ & \Rightarrow\; \mu y \in \bigcup_{|\lambda|<\varepsilon} \lambda V = W \end{aligned}$$

□

3.2.5 Πόρισμα. *Σε κάθε τδχ υπάρχει μια βάση περιοχών του μηδενός που αποτελείται από ισορροπημένα σύνολα.*

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο

3.2.6 Θεώρημα. *Έστω E διανυσματικός χώρος, και τ μια τοπολογία επί του E. Τότε ο (E,τ) είναι τδχ αν και μόνον αν υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ των περιοχών του μηδενός, που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) Ο (E,τ) είναι ομογενής ως προς την πρόσθεση, δηλ. η οικογένεια

$$\mathcal{B}_x := \{U + x \ : \ U \in \mathcal{B}\}$$

είναι βάση περιοχών του x, για κάθε $x \in E$.

(ii) Για κάθε $U \in \mathcal{B}$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V + V \subseteq U$.

(iii) Τα στοιχεία της $\mathcal{B}$ είναι ισορροπημένα και απορροφούντα.

(iv) υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{K}$ με $0 < |\lambda| < 1$, τέτοιο ώστε, για κάθε $V \in \mathcal{B}$, να ισχύει $\lambda V \in \mathcal{B}$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο (E,τ) είναι τδχ. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}$ των ισορροπημένων περιοχών του μηδενός. Λόγω της Πρότασης 3.2.3 και του Πορίσματος 3.2.5, το $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του μηδενός που ικανοποιεί την (iii). Οι (i) και (ii) προφανώς ισχύουν, αφού ο $(E,+)$ είναι τοπολογική ομάδα. Για την (iv) Παρατηρούμε ότι $\lambda V \in \mathcal{B}$, για κάθε $\lambda \neq 0$ και κάθε $V \in \mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι η τοπολογία τ έχει μια βάση περιοχών του μηδενός $\mathcal{B}$, που ικανοποιεί τις (i)–(iv). Τότε η πρόσθεση είναι συνεχής: Έστω $x, y \in E$ και A ανοιχτή περιοχή του $x + y$. Από την (i), υπάρχει $U \in \mathcal{B}$ με $x + y + U \subseteq A$. Από την (ii), υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με $V + V \subseteq U$. Τότε τα $x + V$ και $y + V$ είναι περιοχές των x και y, αντίστοιχα, με

$$(x + V) + (y + V) \subseteq x + y + U \subseteq A.$$

Επίσης το γινόμενο είναι συνεχές: Έστω $(\alpha_o, x_o) \in \mathbb{K} \times E$ και έστω μια περιοχή $\alpha_o x_o + U \in \mathcal{N}(\alpha_o x_o)$ με $U \in \mathcal{B}$. Θεωρούμε πάλι την $V \in \mathcal{B}$ με $V + V \subseteq U$. Επειδή η V είναι απορροφούσα, για το x_o υπάρχει $\lambda_o > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\alpha - \alpha_o| < \lambda_o \ \Rightarrow \ (\alpha - \alpha_o)x_o \in V. \tag{3.2.1}$$

Η ανισότητα $|\alpha - \alpha_o| < \lambda_o$ συνεπάγεται ότι $|\alpha| < \lambda_o + |\alpha_o|$. Θεωρούμε το $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ που ικανοποιεί την (iv). Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$|\alpha| \cdot |\lambda_1|^n < (\lambda_o + |\alpha_o|)|\lambda_1|^n < 1.$$

Επειδή το V είναι ισορροπημένο, $\alpha\lambda_1^n V \subseteq V$. Άρα

$$|\alpha - \alpha_o| < \lambda_o \text{ και } x - x_o \in \lambda_1^n V \;\Rightarrow\; \alpha(x - x_o) \in \alpha\lambda_1^n V \subseteq V. \tag{3.2.2}$$

Συνδυάζοντας τις (3.2.1) και (3.2.2), βρίσκουμε ότι για $\alpha \in \mathbb{K}$ με $|\alpha - \alpha_o| < \lambda_o$ και $x \in x_o + \lambda_1^n V$, έχουμε

$$\alpha x - \alpha_o x_o = (\alpha - \alpha_o)x_o + \alpha(x - x_o) \in V + V \subseteq U,$$

ισοδύναμα

$$\alpha x \in \alpha_o x_o + U.$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(i) Η τομή και η ένωση κάθε οικογένειας ισορροπημένων συνόλων είναι ισορροπημένο σύνολο.

(ii) Αν A, B ισορροπημένα και $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε $A + B$ και λA ισορροπημένα.

(iii) $\prod_i A_i$ ισορροπημένο $\Leftrightarrow$ A_i ισορροπημένο, $\forall\, i \in I$.

(iv) Έστω E, F διανυσματικοί χώροι και $f : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Για κάθε $A \subseteq E$ και $B \subseteq F$ ισορροπημένα, $f(A)$ και $f^{-1}(B)$ είναι ισορροπημένα.

(v) Αν A ισορροπημένο, τότε $\overline{A}$ και A^o ισορροπημένα.

(2) Να εξετάσετε την ισχύ των ανωτέρω προτάσεων για απορροφούντα σύνολα.

(3) Να εξετάσετε την ισχύ των ανωτέρω προτάσεων για κυρτά σύνολα.

3.3. Συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις

Είναι προφανές ότι ισχύει η επόμενη

3.3.1 Πρόταση. *Έστω (E, τ_E), (F, τ_F) τδχ και $f : E \to F$ γραμμική. Τότε η f είναι συνεχής, αν και μόνον αν είναι συνεχής στο 0_E.* □

Η τοπολογία ενός τδχ που μεταφέρεται μέσω μιας *γραμμικής* απεικόνισης διατηρεί την συμβατότητά της με την διανυσματική δομή, όπως φαίνεται από τις δύο επόμενες προτάσεις.

3.3.2 Πρόταση. *Έστω E δχ, (F,τ) τδχ και $f : E \to F$ γραμμική. Αν $f^{-1}(\tau)$ είναι η αρχική τοπολογία που ορίζεται στον E από την f, τότε $(E, f^{-1}(\tau))$ είναι τδχ.*

Απόδειξη. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι η αρχική τοπολογία που ορίζεται στον E από την f είναι η οικογένεια

$$f^{-1}(\tau) = \{f^{-1}(V) \ : \ V \in \tau\}.$$

Η πρόσθεση είναι συνεχής: Έστω $x, y \in E$ και $U \in \mathcal{N}(x+y)$ ανοιχτό. Τότε $U = f^{-1}(V)$, όπου $V \in \mathcal{N}(f(x+y))$ ανοιχτό. Επειδή $f(x+y) = f(x) + f(y)$ και η πρόσθεση στον F είναι συνεχής, υπάρχουν ανοιχτά $W_1 \in \mathcal{N}(f(x))$ και $W_2 \in \mathcal{N}(f(y))$, με $W_1 + W_2 \subseteq V$. Τότε $x \in f^{-1}(W_1)$, $y \in f^{-1}(W_2)$, και

$$f^{-1}(W_1) + f^{-1}(W_2) \subseteq f^{-1}(W_1 + W_2) \subseteq f^{-1}(V) = U.$$

Το αριθμητικό γινόμενο είναι συνεχές: Έστω $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ και $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(\lambda x)$ ανοιχτό. Τότε $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in V$ κι επειδή ο πολλαπλασιασμός στο F είναι συνεχής, υπάρχουν ανοιχτά $A \in \mathcal{N}(\lambda)$ και $W \in \mathcal{N}(f(x))$, με $AW \subseteq V$. Οπότε $f^{-1}(W) \in \mathcal{N}(x)$ και

$$A \cdot f^{-1}(W) \subseteq f^{-1}(AW) \subseteq f^{-1}(V) = U. \qquad \square$$

3.3.3 Πρόταση. *Έστω $(E\tau)$ τδχ, F δχ και $f : E \to F$ γραμμική, επί. Αν τ_f είναι η τελική τοπολογία που ορίζεται στον F από την f, τότε (F, τ_f) είναι τδχ.*

Απόδειξη. Θέτουμε $N = \ker f$ και συμβολίζουμε με $q : E \to E/N$ την κανονική απεικόνιση. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος (αλγεβρικός) ισομορφισμός $g : E/N \to F$, με $g \circ q = f$. Εφοδιάζουμε το E/N με την τοπολογία-πηλίκο τ_q.

$$\begin{tikzcd}
(E,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & (F,\tau_f) \arrow[dl, shift right, "g^{-1}"'] \\
(E/N,\tau_q) \arrow[ur, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} U \in \tau_f &\Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \tau \\ &\Leftrightarrow (g \circ q)^{-1}(U) \in \tau \\ &\Leftrightarrow q^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau \\ &\Leftrightarrow g^{-1}(U) = V \in \tau_q \\ &\Leftrightarrow U = g(V) = (g^{-1})^{-1}(V), \quad V \in \tau_q \end{aligned}$$

Δηλ. το $U \subseteq F$ ανήκει στην τελική τοπολογία τ_f, αν και μονον αν ανήκει στην αρχική τοπολογία $(g^{-1})^{-1}(\tau_q)$. Όμως η τοπολογία-πηλίκο κάνει τον E/N τδχ, και το ζητούμενο προκύπτει από την προηγούμενη Πρόταση 3.3.2. □

3.3.4 Πρόταση. *Έστω (E, τ_E), (F, τ_F) τδχ, $f : E \to F$ γραμμική, $M \leq \ker f \leq E$, $q : E \to E/M$ η κανονική απεικόνιση και $\overline{f} : E/M \to F$ η αντίστοιχη γραμμική με $f = \overline{f} \circ q$. Αν ο E/M εφοδιαστεί με την τοπολογία-πηλίκο, τότε:*

(1) Η f είναι συνεχής αν και μόνον αν η $\overline{f}$ είναι συνεχής.

(2) Η f είναι ανοιχτή αν και μόνον αν η $\overline{f}$ είναι ανοιχτή.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f \text{ συνεχής} &\Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \tau_E, \quad \forall\, A \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow (\overline{f} \circ q)^{-1}(A) \in \tau_E, \quad \forall\, A \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow q^{-1}(\overline{f}^{-1}(A)) \in \tau_E, \quad \forall\, A \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow \overline{f}^{-1}(A) \in \tau_q, \quad \forall\, A \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow \overline{f} \text{ συνεχής} \end{aligned}$$

(2) Έστω f ανοιχτή. Τότε

$$\begin{aligned} U \in \tau_q &\Leftrightarrow q^{-1}(U) \in \tau_E \\ &\Rightarrow f(q^{-1}(U)) \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow \overline{f} \circ q(q^{-1}(U)) \in \tau_F \\ &\Leftrightarrow \overline{f}(U) \in \tau_F \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω $\overline{f}$ ανοιχτή. Τότε η $f = \overline{f} \circ q$ είναι ανοιχτή, σαν σύνθεση ανοιχτών. □

Γνωρίζουμε ότι για κάθε διανυσματικό χώρο E, ο (αλγεβρικός) δυϊκός είναι ο χώρος
$$E^* = \{\, f : E \to \mathbb{K} \ : \ \mathbb{K}\text{–γραμμική}\,\}$$
των γραμμικών μορφών. Θα συμβολίζουμε με E' τον υπόχωρο των *συνεχών* γραμμικών μορφών
$$E' = \{\, f : E \to \mathbb{K} \ : \ \text{συνεχής, } \mathbb{K}\text{–γραμμική}\,\}.$$
Μελετάμε τις συνθήκες που ισοδυναμούν με την συνέχεια μιας γραμμικής μορφής:

3.3.5 Πρόταση. *Έστω E τδχ και $f : E \to \mathbb{K}$ γραμμική. Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Η f είναι συνεχής.

(ii) Η f είναι συνεχής στο μηδέν.

(iii) Υπάρχει περιοχή U του μηδενός 0_E, έτσι ώστε ο περιορισμός $f|_U$ να είναι φραγμένη συνάρτηση.

(iv) Ο $\ker f$ είναι κλειστός.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Από τον ορισμό της συνέχειας.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν. Θα δείξουμε ότι είναι συνεχής σε ένα τυχαίο $x \in E$. Θεωρούμε μια περιοχή U του $f(x)$. Επειδή η τοπολογία του $\mathbb{K}$ είναι ομογενής, $-f(x)+U$ είναι περιοχή του 0, άρα υπάρχει περιοχή V του 0_E με $f(V) \subseteq -f(x)+U$. Τότε, για την περιοχή $x+V$ του x, ισχύει $f(x+V) = f(x)+f(V) \subseteq U$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν η f είναι συνεχής στο 0_E, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}(0_E)$ με $|f(x)| < \varepsilon$, για κάθε $x \in U$, δηλ. η $f|_U$ είναι φραγμένη.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι η $f|_U$ είναι φραγμένη από το α, δηλ. $|f(x)| < \alpha$, για κάθε $x \in U$, και έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την περιοχή $\frac{\varepsilon}{\alpha}U$. Τότε, για κάθε $y = \frac{\varepsilon}{\alpha}x \in \frac{\varepsilon}{\alpha}U$, είναι $|f(y)| = \frac{\varepsilon}{\alpha}|f(x)| < \varepsilon$, δηλ. η f είναι συνεχής στο 0_E.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Προφανές.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $\ker f$ κλειστό. Αν $f = 0$ τότε η f είναι φραγμένη. Αν $f \neq 0$, υπάρχει $x_o \in E$ με $f(x_o) \neq 0$, δηλ. $x_o \notin \ker f$. Άρα $x_o \in (\ker f)^c$, με το $(\ker f)^c$ ανοιχτό, δηλ. $-x_o + (\ker f)^c \in \mathcal{N}(0_E)$. Επομένως, υπάρχει μια ισορροπημένη υποπεριοχή $U \in \mathcal{N}(0_E)$:
$$\begin{aligned} U \subseteq -x_o + (\ker f)^c &\Rightarrow \ (x_o + U) \subseteq (\ker f)^c \\ &\Rightarrow \ (x_o + U) \cap \ker f = \emptyset. \end{aligned}$$

Τότε η f είναι φραγμένη στο U από το $|f(x_o)|$: Πράγματι, αν $x \in U$ με $|f(x)| > |f(x_o)|$, τότε $\left|\frac{f(x_o)}{f(x)}\right| < 1$. Επειδή το U είναι ισορροπημένο, έχουμε $y := -\frac{f(x_o)}{f(x)} \cdot x \in U$, οπότε $x_o + y \in x_o + U$, αλλά

$$f(x_o + y) = f(x_o) + f(y) = f(x_o) - f(x_o) = 0,$$

δηλ. $x_o + y \in \ker f$, άτοπο. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να δείξετε την Πρόταση 3.3.2 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.6.

(2) Να εξετάσετε αν οι συνθήκες (i-iv) ισχύουν για απεικόνιση μεταξύ δύο τδχ.

3.4. Ημινόρμες

3.4.1 Ορισμός. Έστω E ένας διανυσματικός χώρος. Μια **ημινόρμα** επί του E είναι μια απεικόνιση $p : E \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

(i) $p(x) \geq 0$, για κάθε $x \in E$.

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| x$, για κάθε $x \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, για κάθε $x, y \in E$.

Μια ημινόρμα p λέγεται *νόρμα*, αν ισχύει

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η (ii) συνεπάγεται ότι $p(0) = 0$.

3.4.2 Παραδείγματα. (1) Έστω $(E, \| \ \|)$ ένας $\mathbb{K}$–χώρος με νόρμα και F ένας $\mathbb{K}$–διανυσματικός χώρος. Τότε η $p : E \times F \to \mathbb{R}$ με $(x, y) = \|x\|$ είναι ημινόρμα επί του $E \times F$.

(2) Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και $f : E \to \mathbb{K}$ μια γραμμική μορφή. Τότε η απεικόνιση

$$|f| : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$$

είναι ημινόρμα.

3.4.3 Ορισμός. Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα. Για κάθε $x \in E$ και κάθε $\varepsilon > 0$, ονομάζουμε **(ανοιχτή) μπάλλα με κέντρο** x **και ακτίνα** ε το σύνολο

$$B_p(x, \varepsilon) := \{y \in E \ : \ p(x - y) < \varepsilon\}.$$

3.4.4 Πρόταση. *Σε ένα χώρο με ημινόρμα (E, p), οι ανοιχτές μπάλλες αποτελούν βάση για μια τοπολογία τ που κάνει το (E, τ) τδχ.*

Απόδειξη. (1) Προφανώς η οικογένεια όλων των μπαλλών καλύπτει το χώρο E. Αποδεικνύουμε ότι είναι βάση: Έστω $B_p(x, \varepsilon_1)$ και $B_p(y, \varepsilon_2)$ μπάλλες με $z \in B_p(x, \varepsilon_1) \cap B_p(y, \varepsilon_2)$. Τότε $\delta_1 := \varepsilon_1 - p(x-z) > 0$ και $\delta_2 := \varepsilon_2 - p(y-z) > 0$. Θέτοντας $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, παίρνουμε για κάθε $w \in S(z, \delta)$,

$$\begin{aligned} p(x-w) &= p(x-z+z-w) \leq p(x-z) + p(z-w) \\ &< p(x-z) + \delta \leq p(x-z) + \delta_1 \\ &= p(x-z) + \varepsilon_1 - p(x-z) = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

και, ανάλογα,

$$p(y-w) < \varepsilon_2.$$

Άρα $B_p(z, \delta) \subseteq B_p(x, \varepsilon_1) \cap B_p(y, \varepsilon_2)$ και η οικογένεια των μπαλλών είναι βάση για μια τοπολογία τ, για την οποία ισχύει

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall\, x \in A \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;:\; B_p(x, \varepsilon) \;\subseteq\; A.$$

(2) Αποδεικνύουμε τώρα ότι οι πράξεις του διανυσματικού χώρου είναι συνεχείς: Αν $x_o, y_o \in E$ και $\varepsilon > 0$, είναι άμεσο ότι

$$B_p\left(x_o, \frac{\varepsilon}{2}\right) + B_p\left(y_o, \frac{\varepsilon}{2}\right) \;\subseteq\; B_p(x_o + y_o, \varepsilon),$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της πρόσθεσης. Έστω τώρα $\lambda_o \in \mathbb{K}$ και $x_o \in E$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(\lambda x - \lambda_o x_o) &= p(\lambda x - \lambda x_o + \lambda x_o - \lambda_o x_o) \\ &\leq p(\lambda x - \lambda x_o) + p(\lambda x_o - \lambda_o x_o) \\ &= |\lambda| p(x - x_o) + |\lambda - \lambda_o| p(x_o) \\ &= |\lambda - \lambda_o + \lambda_o| p(x - x_o) + |\lambda - \lambda_o| p(x_o) \\ &\leq |\lambda - \lambda_o| p(x - x_o) + |\lambda_o| p(x - x_o) + |\lambda - \lambda_o| p(x_o). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\delta := \frac{1}{3} \min\left\{\sqrt{\varepsilon},\, \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_o|},\, \frac{\varepsilon}{1 + p(x_o)},\right\}.$$

Τότε, για κάθε $x \in E$ με $p(x - x_o) < \delta$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda - \lambda_o| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} p(\lambda x - \lambda_o x_o) &\leq |\lambda - \lambda_o| p(x - x_o) + |\lambda_o| p(x - x_o) + |\lambda - \lambda_o| p(x_o) \\ &< \delta \cdot \delta + |\lambda_o| \cdot \delta + \delta \cdot p(x_o) \\ &< \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} + \frac{|\lambda_o|}{1 + |\lambda_o|} \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{p(x_o)}{1 + p(x_o)} \cdot \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

που αποδεικνύει οτι

$$B_p(\lambda_o, \delta) \cdot B_p(x_o, \delta) \subseteq B_p(\lambda_o x_o, \varepsilon)$$

και, επομένως, την συνέχεια του γινόμενου. □

Σε ένα χώρο με ημινόρμα, η σύγκλιση των ακολουθιών περιγράφεται από την επόμενη

3.4.5 Πρόταση. *Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία από στοιχεία του E και $x \in E$. Τότε*

$$x_n \longrightarrow x \Leftrightarrow p(x_n - x) \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow x &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in \mathbb{N}\ : x_n \in B_p(x, \varepsilon),\ \forall\, n \geq n_o \\ &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in \mathbb{N}\ : p(x_n - x) < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_o \\ &\Leftrightarrow p(x_n - x) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

□

3.4.6 Πρόταση. *Σε ένα χώρο με ημινόρμα (E, p), η τοπολογία που ορίζεται από την p κάνει την p συνεχή.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η p είναι συνεχής στο $x \in E$: Έστω ένα ανοιχτό διάστημα $(p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την μπάλλα $B_p(x, \varepsilon)$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in B_p(x, \varepsilon)$ είναι

$$|p(y) - p(x)| \leq p(x - y) < \varepsilon,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

3.4.7 Πρόταση. *Ένας χώρος με ημινόρμα (E, p) είναι Hausdorff αν και μόνον αν η p είναι νόρμα.*

Απόδειξη. ($\Leftarrow$) Γνωστό, αφού ένας χώρος με νόρμα είναι μετρικός χώρος.

($\Rightarrow$) Έστω $x \neq 0$. Αφού ο E είναι Hausdorff, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $x \notin B_p(0, \varepsilon)$, άρα $p(x) > \varepsilon$. □

3.4.8 Πρόταση. *Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα και $F \leq E$. Τότε η απεικόνιση*

$$\tilde{p} : E/F \longrightarrow \mathbb{R} : x + F \mapsto \tilde{p}(x + F) := \inf\{p(x + u) \ : \ u \in F\}$$

είναι ημινόρμα.

Απόδειξη. Το σύνολο $\{p(x+u) \ : \ u \in F\}$ είναι κάτω φραγμένο από το 0, άρα η $\tilde{p}$ είναι καλά ορισμένη. Προφανώς, $\tilde{p}(x + F) \geq 0$, για κάθε $x \in E$. Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $x+F \in E/F$. Τότε, για $\lambda = 0$ η ισότητα $\tilde{p}(\lambda(x+F)) = |\lambda|\tilde{p}(x+F)$ είναι προφανής, ενώ για $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\lambda(x + F)) &= \tilde{p}(\lambda x + F) = \inf\{p(\lambda x + u) \ : \ u \in F\} \\
&= \inf\{p(\lambda x + \lambda u) \ : \ u \in F\} \\
&= \inf\{|\lambda| p(x + u) \ : \ u \in F\} \\
&= |\lambda| \inf\{p(x + u) \ : \ u \in F\} \\
&= |\lambda| \tilde{p}(x + F).
\end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $x, y \in E$ είναι:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}((x + F) + (y + F)) &= \tilde{p}(x + y + F) = \inf\{p(x + y + u) \ : \ u \in F\} \\
&= \inf\{p(x + u + y + v) \ : \ u, v \in F\} \\
&\leq \inf\{p(x + u) + p(y + v) \ : \ u, v \in F\} \\
&= \inf\{p(x + u) \ : \ u \in F\} + \inf\{p(y + v) \ : \ v \in F\} \\
&= \tilde{p}(x + F) + \tilde{p}(y + F).
\end{aligned}$$

Άρα η $\tilde{p}$ είναι ημινόρμα. □

Μια ημινόρμα δεν είναι γραμμική απεικόνιση: δεν διατηρεί ούτε την πρόσθεση (είναι υποπροσθετική), ούτε τον πολλαπλασιασμό. Ομως ο πυρήνας της είναι γραμμικός χώρος και η εφαρμογή της ανωτέρω πρότασης μας δίνει το επόμενο αποτέλεσμα.

3.4.9 Πρόταση. *Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα. Θέτουμε*

$$K := \ker p := \{x \in E \ : \ p(x) = 0\}.$$

Τότε ο K είναι γραμμικός υπόχωρος του E και η απεικόνιση

$$\widetilde{p} : E/K \to \mathbb{R} : x + K \mapsto \widetilde{p}(x + K) := p(x)$$

είναι νόρμα επί του E/K.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\widetilde{p}$ είναι καλά ορισμένη: Αν $x + K = y + K$, τότε $x - y = h \in K$, δηλ. $x = y + h$ και $y = x - h$. Οπότε

$$p(x) = p(y + h) \leq p(y) + p(h) = p(y)$$

και

$$p(y) = p(x - h) \leq p(x) + p(-h) = p(x),$$

που αποδεικνύει ότι $p(x) = p(y)$. Η $\widetilde{p}$ είναι νόρμα:

(i) Προφανώς $\widetilde{p}(x + K) \geq 0$, για κάθε $x \in E$. Αν $\widetilde{p}(x + K) = 0$, τότε $p(x) = 0$, δηλ. $x \in K$ και $x + K = K \equiv 0 \in E/K$.

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $x \in E$. Τότε

$$\widetilde{p}(\lambda(x + K)) = \widetilde{p}(\lambda x + K) = p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| \widetilde{p}(x + K).$$

(iii) Τέλος, για κάθε $x, y \in E$, είναι

$$\begin{aligned} \widetilde{p}((x + K) + (y + K)) &= \widetilde{p}(x + y + K) = p(x + y) \\ &\leq p(x) + p(y) \\ &= \widetilde{p}(x + K) + \widetilde{p}(y + K), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3.4.10 Παράδειγμα. Έστω ένας *συμπαγής* τοπολογικός χώρος X. Θεωρούμε την άλγεβρα $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ των συνεχών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{K}$ και ορίζουμε την απεικόνιση (sup–norm)

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}, \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X).$$

Γνωρίζουμε από την Ανάλυση ότι η ανωτέρω απεικόνιση είναι νόρμα, που κάνει την $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ άλγεβρα Banach. Αν ο χώρος X δεν είναι συμπαγής, τότε η sup–norm δεν ορίζεται, γιατί δεν εξασφαλίζεται ότι είναι φραγμένο το σύνολο $\{|f(x)| \ : \ x \in X\}$, άρα ούτε η ύπαρξη του $\sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}$. Όμως μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\|f\|_{\mathbb{K}} := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K\},$$

για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές. Οι $\| \ \|_{\mathbb{K}}$ είναι ημινόρμες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω
$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x|$$
Να δείξετε ότι η p είναι ημινόρμα και να βρείτε τα στοιχεία της μοναδιαίας μπάλλας $B_p(0, 1)$.

(2) Έστω E ένας χώρος με νόρμα $\| \ \|$, και F ένας διανυσματικός χώρος. Τότε η απεικόνιση
$$p : E \times F \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \|x\|$$
είναι ημινόρμα. Να βρείτε τα στοιχεία της μοναδιαίας μπάλλας.

(3) Έστω η απεικόνιση
$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto p(z) := |\mathrm{Im} z|$$

(i) Να δείξετε ότι η p είναι ημινόρμα αν το $\mathbb{C}$ θεωρηθεί πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης 2.

(ii) Να δείξετε ότι η p δεν είναι ημινόρμα αν το $\mathbb{C}$ θεωρηθεί μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης 1.

(iii) Να δείξετε ότι η τοπολογία που ορίζει η p κάνει το $\mathbb{C}$ πραγματικό τδχ, αλλά δεν τον κάνει μιγαδικό τδχ.

(4) Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα και $F \leq E$. Να δείξετε ότι η κανονική απεικόνιση $q : (E, p) \to (E/F, \widetilde{p})$ είναι συνεχής.

(5) Να εξετάσετε την σχέση της τοπολογίας που ορίζεται στο πηλίκο E/F από την ημινόρμα $\widetilde{p}$ της Πρότασης 3.4.8 και της τοπολογίας-πηλίκου που ορίζεται από την κανονική απεικόνιση $q : E \to E/F$. Τί συμβαίνει αν $F = \ker p$;

(6) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\widetilde{p}$ που ορίζεται στην Πρόταση 3.4.8 και η νόρμα $\widetilde{p}$ που ορίζεται στην Πρόταση 3.4.9, συμπίπτουν όταν $F = K$.

(7) Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα, $x \in E$ και $\varepsilon > 0$. Να εξετάσετε αν η κλειστή θήκη $\overline{B_p(x, \varepsilon)}$ της μπάλλας $B_p(x, \varepsilon)$ ισούται με την *κλειστή μπάλλα*
$$\widehat{B}_p(x, \varepsilon) := \{y \in E \ : \ p(y - x) \leq \varepsilon\}.$$

3.5. Κυρτές περιοχές του μηδενός

3.5.1 Πρόταση. *Έστω (E, p) χώρος με ημινόρμα. Τότε κάθε $B_p(0_E, \varepsilon)$ είναι απολύτως κυρτή και απορροφούσα.*

Απόδειξη. Αφού κάθε μπάλλα $B_p(0_E, \varepsilon)$ είναι περιοχή του μηδενός στην τοπολογία που ορίζεται από την ημινόρμα, είναι απορροφούσα (Πρόταση 3.4.4).

Έστω $x \in B_p(0_E, \varepsilon)$ και $\lambda \in [-1, 1]$. Τότε

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

άρα είναι ισορροπημένη.

Έστω $x, y \in B_p(0_E, \varepsilon)$, δηλ. $p(x), p(y) < \varepsilon$. Έστω και $\lambda \in [0, 1]$. Τότε

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq |\lambda| p(x) + |1 - \lambda| p(y) < |\lambda|\varepsilon + |1 - \lambda|\varepsilon = \varepsilon,$$

άρα η $B_p(0, \varepsilon)$ είναι και κυρτή. □

Όπως φαίνεται στο επόμενο βασικό θεώρημα, ισχύει και το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης, δηλ. κάθε απολύτως κυρτό και απορροφούν σύνολο ορίζει μια ημινόρμα. Για να το αποδείξουμε χρειαζόμαστε πρώτα το επόμενο

3.5.2 Λήμμα. *Έστω E ένας διανυσματικός χώρος, $A \subseteq E$ κυρτό και $\lambda, \mu > 0$. Τότε $\lambda A + \mu A \subseteq (\lambda + \mu)A$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda x + \mu y \in \lambda A + \mu A$. Παρατηρούμε ότι $0 < \frac{\lambda}{\lambda+\mu} < 1$ και $1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Επειδή το A είναι κυρτό, για κάθε $x, y \in A$, είναι

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \in A,$$

άρα

$$\lambda x + \mu y = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y \right) \in (\lambda + \mu)A. \qquad \square$$

3.5.3 Θεώρημα. *Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$ απολύτως κυρτό και απορροφούν. Τότε η απεικόνιση*

$$p_A : E \to [0, +\infty) : x \mapsto p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda A\}$$

είναι ημινόρμα.

Απόδειξη. Αφού το A είναι απορροφούν, το σύνολο $\Lambda_x = \{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda A\}$ είναι μη–κενό, και κάτω φραγμένο από το 0, άρα η απεικόνιση p_A είναι καλά ορισμένη, και η ιδιότητα (i) των ημινορμών είναι προφανής.

Για την ιδιότητα (ii): Αν $\alpha = 0$, τότε $ax = 0 \in \lambda A$, για κάθε $\lambda > 0$, δηλ. $\Lambda_x = (0, +\infty)$ και $p_A(\alpha x) = 0 = |\alpha| p_A(x)$. Αν $\alpha \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} p_A(\alpha x) &= \inf\{\lambda > 0 \ : \ \alpha x \in \lambda A\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \frac{\lambda}{\alpha} A\} \\ &= |\alpha| \inf\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 \ : \ x \in \frac{\lambda}{|\alpha|} A\} \\ &= |\alpha| p_A(x). \end{aligned}$$

Για την ιδιότητα (iii): Παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda_x$ και $\mu \in \Lambda_y$ είναι $x \in \lambda A$ και $y \in \mu A$, άρα, από το Λήμμα 3.5.2, $x + y \in \lambda A + \mu A \subseteq (\lambda + \mu) A$, επομένως

$$\Lambda_x + \Lambda_y \subseteq \Lambda_{x+y}$$

και

$$p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y). \qquad \square$$

3.5.4 Ορισμός. Η ημινόρμα p_A λέγεται **δείκτης Minkowski** του A.

3.5.5 Πρόταση. *Έστω E ένας διανυσματικός χώρος, $A \subseteq E$ απολύτως κυρτό και απορροφούν και p_A ο δείκτης Minkowski του A. Τότε*

$$B_{p_A}(0_E, 1) \subseteq A \subseteq \widehat{B}_{p_A}(0_E, 1).$$

Απόδειξη. Αν $x \in B_{p_A}(0_E, 1)$, τότε $p_A(x) = \inf \Lambda_x < 1$, δηλ. υπάρχει $0 < \lambda < 1$, με $\lambda \in \Lambda_x$ και $x \in \lambda A$. Επειδή το A είναι ισορροπημένο και $\lambda \in [-1, 1]$, είναι $\lambda A \subseteq A$. Άρα

$$B_{p_A}(0_E, 1) \subseteq \lambda A \subseteq A.$$

Από την άλλη μεριά, αν $x \in A = 1A$, τότε $1 \in \Lambda_x$, δηλαδή $p_A(x) \leq 1$ και $x \in \widehat{B}_{p_A}(0_E, 1)$. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Αν $A \subseteq E$ είναι απολύτως κυρτό και απορροφούν και $\lambda > 0$, να δείξετε ότι $p_{\lambda A} = \frac{1}{\lambda} p_A$.

(2) Αν $A, B \subseteq E$ είναι απολύτως κυρτά και απορροφούντα με $A \subseteq B$, να δείξετε ότι $p_B \leq p_A$.

(3) Αν $A, B \subseteq E$ είναι απολύτως κυρτά και απορροφούντα, να δείξετε ότι $p_{A\cap B} = \sup\{p_A, p_B\}$.

(4) Αν $A \subseteq E$ είναι απολύτως κυρτό και απορροφούν και p ημινόρμα με

$$\{x \in E \,:\, p(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in E \,:\, p(x) \leq 1\},$$

να δείξετε ότι $p = p_A$.

3.6. Τοπικά κυρτοί χώροι

Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και $\{p_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ημινορμών του E. Συμβολίζουμε με τ_i την τοπολογία που ορίζει η p_i. Τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων τομών από στοιχεία των τ_i είναι βάση για μια τοπολογία τ του E, ισχυρότερη από όλες τις τ_i. Ιδιαιτέρως, η τ είναι η ασθενέστερη τοπολογία που έχει αυτή την ιδιότητα. Η τ περιγράφεται και μέσω των μπαλλών των τ_i, όπως φαίνεται στο επόμενο

3.6.1 Θεώρημα. *Έστω E ένας διανυσματικός χώρος και $\{p_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ημινορμών του E. Τότε το σύνολο $\mathcal{B}$ των πεπερασμένων τομών από (ανοιχτές) μπάλλες των p_i είναι βάση μιας τοπολογίας τ του E η οποία κάνει τον (E, τ) τδχ και όλες τις p_i συνεχείς.*

Απόδειξη. (1) *Η $\mathcal{B}$ είναι βάση τοπολογίας*: Προφανώς η $\mathcal{B}$ είναι κάλυψη του E και είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές των στοιχείων της. Άρα είναι βάση μιας τοπολογίας τ.

(2) *Η τ κάνει το E τδχ*: Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_o$ το υποσύνολο της $\mathcal{B}$ που αποτελείται από τις πεπερασμένες τομές μπαλλών με κέντρο το 0_E. Το $\mathcal{B}_o$ είναι βάση περιοχών του μηδενός. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}_o$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iv) του Θεωρήματος 3.2.6. Είναι προφανές ότι ικανοποιείται η (i): το αντίστοιχο $\mathcal{B}_x$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων τομών μπαλλών με κέντρο το x. Για την (ii), έστω

$$U = B_{i_1}(0_E, \varepsilon_{i_1}) \cap \cdots \cap B_{i_m}(0_E, \varepsilon_{i_m}) \in \mathcal{B}_o.$$

Επειδή

$$B_{i_k}(0_E, \frac{\varepsilon_{i_k}}{2}) + B_{i_k}(0_E, \frac{\varepsilon_{i_k}}{2}) \subseteq B_{i_k}(0_E, \varepsilon_{i_k}),$$

για κάθε $k = 1, \ldots, m$, παίρνοντας

$$V := B_{i_1}(0_E, \frac{\varepsilon_{i_1}}{2}) \cap \cdots \cap B_{i_m}(0_E, \frac{\varepsilon_{i_m}}{2}) \in \mathcal{B}_o$$

έχουμε $V + V \subseteq U$. Το (iii) ισχύει λόγω της Πρότασης 3.5.1. Τέλος για το (iv), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε μπάλλα $B_i(0_E, \varepsilon)$ και κάθε $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ ισχύει $\lambda B_i(0_E, \varepsilon) = B(0_E, |\lambda|\varepsilon)$.

(3) *Οι p_i είναι συνεχείς*: Είναι προφανές, αφού για κάθε $i \in I$, $\tau_i \subseteq \tau$, όπου τ_i είναι η τοπολογία που ορίζει η p_i. □

3.6.2 Ορισμός. Ένας τδχ (E, τ) λέγεται **τοπικά κυρτός χώρος** (τκχ), αν έχει μια βάση περιοχών του μηδενός που αποτελείται από απολύτως κυρτά (και απορροφούντα) σύνολα.

3.6.3 Λήμμα. *Έστω (E, τ) τδχ, $U \subseteq E$ απολύτως κυρτό και απορροφούν και p_U ο δείκτης Minkowski του U. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το U είναι περιοχή του 0_E στην τοπολογία τ.

(ii) Η ημινόρμα p_U είναι συνεχής ως προς την τ.

Απόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι $p_U(U) \subseteq [0, 1]$ (Πρόταση 3.5.5). Επίσης ότι $\lambda U \in \mathcal{N}(0_E)$, για κάθε $\lambda > 0$ (Πρόταση 3.1.4). Έστω μια βασική περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του $0 \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon/2$. Τότε $p_U(\delta U) \subseteq [0, \delta] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$, που αποδεικνύει την συνέχεια της p_U.

(ii) Αν η p_U είναι τ–συνεχής, τότε

$$U \supseteq B_{p_U}(0_E, 1) = p_U^{-1}((-1, 1)) \in \mathcal{N}(0_E)$$

δηλ. η $B_{p_U}(0_E, 1)$ είναι ανοιχτή περιοχή του 0_E, άρα και $U \in \mathcal{N}(0_E)$. □

3.6.4 Θεώρημα. *Ένας τδχ (E, τ) είναι τοπικά κυρτός, αν και μόνον αν η τοπολογία του ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών.*

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο (E, τ) είναι τοπικά κυρτός και $\mathcal{B}$ η βάση περιοχών του μηδενός από απολύτως κυρτά (και απορροφούντα) σύνολα. Για κάθε $U \in \mathcal{B}$, θεωρούμε τον αντίστοιχο δείκτη Minkowski p_U και την οικογένεια των ημινορμών $\Gamma := \{p_U \ : \ U \in \mathcal{B}\}$. Η Γ ορίζει στο E μια τοπολογία τ_Γ, με βάση περιοχών του μηδενός την $\mathcal{B}_o$, όπως στο Θεώρημα 3.6.1. Θα δείξουμε ότι οι τοπολογίες τ και τ_Γ συμπίπτουν:

Επειδή κάθε $U \in \mathcal{B}$ είναι περιοχή του 0_E στην τ, λόγω του Λήμματος 3.6.3, κάθε p_U είναι τ–συνεχής. Η τοπολογία τ_Γ είναι η μικρότερη που κάνει τις p_U συνεχείς, άρα $\tau_\Gamma \subseteq \tau$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\tau \subseteq \tau_\Gamma$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο Hausdorff, δηλ. θα δείξουμε ότι για κάθε $U \in \mathcal{B}$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}_o$ με $V \subseteq U$. Πράγματι, έστω $U \in \mathcal{B}$ και p_U η αντίστοιχη ημινόρμα. Τότε για την $V = B_{p_U}(0_E, 1) \in \mathcal{B}_o$ ισχύει $V \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Έστω $\Gamma = \{p_i \ : \ i \in I\}$ η οικογένεια των ημινορμών που ορίζει την τοπολογία, όπως στο Θεώρημα 2.6.1. Τότε τα στοιχεία της $\mathcal{B}_o$ είναι απολύτως κυρτά (και απορροφούντα) σαν πεπερασμένες τομές μπαλλών. $\square$

Στα επόμενα ένας τκχ (E, τ) θα θεωρείται εφοδιασμένος με την οικογένεια των ημινορμών $\Gamma := \{p_U \ : \ U \in \mathcal{B}\}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι το σύνολο όλων των ανοιχτών, απολύτως κυρτών περιοχών του 0_E, δηλ. η Γ περιέχει όλους τους δυνατούς δείκτες Minkowski.

3.6.5 Πρόταση. *Έστω (E, τ) ένας τκχ και Γ η οικογένεια των ημινορμών που ορίζουν την τ. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο (E, τ) είναι Hausdorff.

(ii) Για κάθε $x \in E$ με $x \neq 0_E$, υπάρχει $p \in \Gamma$ με $p(x) \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω (E, τ) Hausdorff και έστω ότι υπάρχει $x \neq 0_E$ με $p(x) = 0$ για κάθε $p \in \Gamma$. Τότε $x \in B_p(0_E, \varepsilon)$, για κάθε $p \in \Gamma$ και κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως $x \in U$, για κάθε πεπερασμένη τομή μπαλλών $U \in \mathcal{B}_o$, δηλ. το x ανήκει σε κάθε περιοχή του 0_E, άτοπο.

Αντίστροφα, έστω $x \in E$ με $x \neq 0_E$ και p η ημινόρμα της (ii). Θέτοντας $\varepsilon = p(x)$, έχουμε ότι $x \notin B_p(0_E, \varepsilon)$, άρα (λόγω της ομογένειας) ο (E, τ) είναι T_1, επομένως και Hausdorff. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να δείξετε ότι η τοπολογία τ του Θεωρήματος 3.6.1 είναι η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει συνεχείς τις p_i.

(2) Έστω (E, τ) τκχ και $F \leq E$. Αν $\tau|_F$ είναι η σχετική τοπολογία στον F, να δείξετε ότι ο $(F, \tau|_F)$ είναι τκχ.

(3) Έστω $\{E_i, \tau_i\}_{i \in I}$ οικογένεια τκχ και (E, τ_γ) ο χώρος γινόμενο (με την τοπολογία-γινόμενο). Να εξετάσετε αν ισχύει η ισοδυναμία

$$(E, \tau_\gamma) \text{ τκχ } \Leftrightarrow (E_i, \tau_i) \text{ τκχ}, \ \forall \, i \in I.$$

(4) Έστω E δχ, (F, τ) τκχ και $f : E \to F$ γραμμική. Αν $f^{-1}(\tau)$ είναι η αρχική τοπολογία που ορίζεται στον E από την f, να δείξετε ότι $(E, f^{-1}(\tau))$ είναι τκχ.

3.7. Το Θεώρημα Hahn–Banach

Γνωρίζουμε από την Άλγεβρα ότι για κάθε διανυσματικό χώρο E, ο (αλγεβρικός) δυϊκός χώρος E^* των γραμμικών μορφών είναι μη τετριμμένος. Ειδικότερα, για κάθε $x \in E$, υπάρχει $f \in E^*$ με $f(x) \neq 0$. Δεν συμβαίνει το ίδιο στους τδχ, αν θεωρήσουμε τον χώρο E' των *συνεχών* γραμμικών μορφών. Υπάρχουν τδχ που δεν έχουν καμμία συνεχή γραμμική μορφή. Θα δούμε παρακάτω ότι η κατάσταση αλλάζει αν η τοπολογία του E ορίζεται από ημινόρμες.

Παρακάτω δίνουμε πρώτα δύο προτάσεις για την συνέχεια γραμμικών απεικονίσεων σε τοπικά κυρτούς χώρους.

3.7.1 Πρόταση. *Έστω (E, τ) τκχ, $\mathcal{B}$ το σύνολο των απολύτως κυρτών περιοχών του 0_E και $f : E \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή. Τότε η f είναι συνεχής, αν και μόνον αν υπάρχει $U \in \mathcal{B}$, τέτοιο ώστε*

$$|f(x)| \leq p_U(x), \qquad \forall\, x \in E.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής. Από την συνέχεια της f στο 0_E, υπάρχει μια απολύτως κυρτή περιοχή U του 0_E, με $|f(x)| < 1$, για κάθε $x \in U$. Θεωρούμε τον δείκτη Minkowski p_U του U. Ισχυριζόμαστε ότι $|f(x)| \leq p_U(x)$, για κάθε $x \in E$. Πράγματι, αν υπάρχει $x_o \in E$ με $|f(x_o)| > p_U(x_o)$, υπάρχει και $\xi > 0$ με $|f(x_o)| > \xi > p_U(x_o)$. Τότε $|f(\frac{x_o}{\xi})| > 1 > p_U(\frac{x_o}{\xi})$, άρα $\frac{x_o}{\xi} \in U$ και $|f(\frac{x_o}{\xi})| > p_U(\frac{x_o}{\xi})$, άτοπο.

Αντίστροφα, έστω $|f(x)| \leq p_U(x)$, για κάποια p_U, $U \in \mathcal{B}$, και κάθε $x \in E$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0_E. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την περιοχή $B_{p_U}(0_E, \varepsilon)$ του 0_E. Τότε, για κάθε $x \in B_{p_U}(0_E, \varepsilon)$, είναι $|f(x)| \leq p_U(x) < \varepsilon$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

3.7.2 Θεώρημα. *Έστω (E, τ_E), (F, τ_F) τκχ, των οποίων οι τοπολογίες τ_E και τ_F ορίζονται από τις οικογένειες των ημινορμών $\Gamma_E = \{p_i\}_{i \in I}$ και $\Gamma_F = \{q_j\}_{j \in J}$, και $f : E \to F$ μια γραμμική απεικόνιση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι συνεχής.

(2) Για κάθε $j \in J$ υπάρχουν $\lambda > 0$ και πεπερασμένο υποσύνολο $\phi \subset I$ με

$$q_j(f(x)) \leq \lambda \sup_{i \in \phi} p_i(x), \quad \forall\, x \in E.$$

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 2)$ Έστω ότι η f είναι συνεχής, και έστω ένα $j \in J$. Τότε η μπάλλα $B_j(0_F, 1)$ είναι περιοχή του 0_F, και λόγω της συνέχειας της f, υπάρχει μια βασική περιοχή του 0_E, της μορφής

$$U = B_{i_1}(0_E, \varepsilon_{i_1}) \cap \cdots \cap B_{i_m}(0_E, \varepsilon_{i_m}) \in \mathcal{B}_o$$

(βλ. Θεώρημα 3.6.1) με $f(U) \subseteq B_j(0_F, 1)$. Θέτουμε $\phi = \{i_1, \ldots, i_m\}$, θεωρούμε $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_i \,:\, i \in \phi\}$, και, για κάθε $x \in E$, θέτουμε

$$g(x) = \sup_{i \in \phi} p_i(x).$$

Έστω $x \in E$. Αν $g(x) \neq 0$, τότε, για κάθε $i \in \phi$,

$$p_i\left(\frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot x\right) = \frac{\varepsilon}{g(x)} p_i(x) \leq \frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot g(x) = \varepsilon$$

άρα

$$\frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot x \in B_i(0_E, \varepsilon_i), \quad \forall\, i \in \phi,$$

επομένως $\frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot x \in U$ και $f\left(\frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot x\right) \in B_j(0_F, 1)$, απ' όπου προκύπτει ότι $q_j\left(f\left(\frac{\varepsilon}{g(x)} \cdot x\right)\right) < 1$ και $q_j(f(x)) < \frac{1}{\varepsilon} \cdot g(x)$, δηλ. το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$.

Αν $g(x) = 0$, τότε $p_i(ax) = |a| p_i(x) = 0$, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και κάθε $i \in \phi$. Όμως

$$\begin{aligned} p_i(ax) = 0, \quad \forall\, a \in \mathbb{K},\ \forall\, i \in \phi \Rightarrow\ & ax \in \bigcap_{i \in \phi} B_i(0_E, \varepsilon_i),\ \forall\, a \in \mathbb{K} \\ \Rightarrow\ & f(ax) \in B_j(0_F, 1),\ \forall\, a \in \mathbb{K} \\ \Rightarrow\ & q_j(f(ax)) = |a| q_j(f(x)) < 1,\ \forall\, a \in \mathbb{K} \\ \Rightarrow\ & q_j(f(x)) = 0, \end{aligned}$$

και η ζητούμενη ανισότητα ισχύει.

$(2 \Rightarrow 1)$ Έστω $V \in \mathcal{N}(0_F)$ απολύτως κυρτή και $q_V \in \Gamma_F$ ο αντίστοιχος δείκτης Minkowski. Θεωρούμε τα αντίστοιχα $\lambda > 0$ και $\phi \subset I$ της υπόθεσης, παίρνουμε ένα $0 < \varepsilon < 1/\lambda$ και θέτουμε $U = \bigcap_{i \in \phi} B_i(0_E, \varepsilon)$. Τότε, για κάθε $x \in U$ έχουμε

$$\begin{aligned} p_i(x) < \varepsilon,\ \ \forall\, i \in \phi \Rightarrow\ & q_V(f(x)) \leq \lambda \cdot \sup_{i \in \phi} p_i(x) \leq \lambda\varepsilon < 1 \\ \Rightarrow\ & f(x) \in V \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της f. $\square$

3.7.3 Θεώρημα. *(Hahn-Banach, για πραγματικούς χώρους) Έστω E ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και p μια ημινόρμα στο E. Έστω ακόμη F ένας διανυσματικός υπόχωρος του E και $f : F \to \mathbb{R}$ γραμμική μορφή με την ιδιότητα*

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall\, x \in F.$$

Τότε υπάρχει μια γραμμική επέκταση $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ της f με

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \forall\, x \in E.$$

Απόδειξη. Αν $F = E$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Έστω $F \neq E$ και $a \notin F$. Θεωρούμε τον μονοδιάστατο υπόχωρο

$$\mathbb{R}a := \{\lambda a \ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

και το ευθύ άθροισμα $F \oplus \mathbb{R}a$. Ας υποθέσουμε ότι η f επεκτείνεται σε συνεχή $f_1 : F \oplus \mathbb{R}a \to \mathbb{R}$, με $f_1(x + \lambda a) \leq p(x + \lambda a)$, για κάθε $x + \lambda a \in F \oplus \mathbb{R}a$. Επειδή η f_1 είναι γραμμική και συμπίπτει με την f επί του F, η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$f(x) + \lambda f_1(a) \leq p(x + \lambda a),$$

για κάθε $x \in F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $\lambda = 1$, παίρνουμε

$$f_1(a) \leq -f(x) + p(x + a), \qquad \forall\, x \in F. \tag{3.7.1}$$

Θέτοντας $\lambda = -1$ και εφαρμόζοντας στο $-x$, παίρνουμε

$$-f_1(a) \leq p(-x - a) + f(x), \qquad \forall\, x \in F. \tag{3.7.2}$$

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω ανισότητες έχουμε

$$-f(x) - p(-x - a) \leq f_1(a) \leq -f(y) + p(y + a), \qquad \forall\, x, y \in F. \tag{3.7.3}$$

Άρα το $f_1(a)$ δεν μπορεί να οριστεί αυθαίρετα: πρέπει να ικανοποιεί την (3.7.3). Το τελευταίο είναι δυνατό, γιατί ισχύει

$$-f(x) - p(-x - a) \leq -f(y) + p(y + a), \qquad \forall\, x, y \in F.$$

Πράγματι, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$f(y) - f(x) \leq p(x + a) + p(y + a),$$

που πράγματι ισχύει:

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) = f(y - x) &\leq p(y - x) = p(y + a - x - a) \\ &\leq p(x + a) + p(y + a), \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in F$. Παίρνουμε λοιπόν κατάλληλο $f_1(a)$ και θέτουμε

$$f_1(x + \lambda a) := f(x) + \lambda f_1(a),$$

για κάθε $x + \lambda a \in F \oplus \mathbb{R}a$. Τότε η f_1 είναι γραμμική επέκταση της f στο $F \oplus \mathbb{R}a$. Δείχνουμε ότι ικανοποιεί την

$$f_1(x + \lambda a) \leq p(x + \lambda a),$$

για κάθε $x + \lambda a \in F \oplus \mathbb{R}a$. Αν $\lambda = 0$, η ανισότητα συμπίπτει με εκείνη της υπόθεσης. Για $\lambda > 0$, λαμβάνοντας υπ᾽ όψιν την δεξιά ανισότητα της (3.7.3), έχουμε

$$\begin{aligned} f_1(x + \lambda a) &= \lambda f_1 \left(\frac{x}{\lambda} + a \right) = \lambda \left(f \left(\frac{x}{\lambda} \right) + f_1(a) \right) \\ &\leq \lambda p \left(\frac{x}{\lambda} + a \right) = p(x + \lambda a), \end{aligned}$$

ενώ για $\lambda < 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} f_1(x + \lambda a) &= -\lambda f_1 \left(-\frac{x}{\lambda} - a \right) = -\lambda \left(-f \left(\frac{x}{\lambda} \right) - f_1(a) \right) \\ &\leq -\lambda p \left(-\frac{x}{\lambda} - a \right) = p(x + \lambda a), \end{aligned}$$

όπου τώρα πήραμε υπ᾽ όψιν την αριστερή ανισότητα της σχέσης (3.7.3).

Εφ᾽ όσον είναι δυνατή η κατασκευή της επιθυμητής επέκτασης σε υπόχωρους μεγαλύτερους κατά μία διάσταση κάθε φορά, το ζητούμενο αποτέλεσμα το παίρνουμε με χρήση του Λήμματος του Zorn: Έστω $\mathcal{P}$ η οικογένεια όλων των διατεταγμένων ζευγών (N, h), όπου $F \leq N \leq E$ και $h : N \to \mathbb{R}$ γραμμική μορφή με $h|_F = f$ και $h(x) \leq p(x)$, για κάθε $x \in N$. Το $\mathcal{P}$ είναι μερικά διατεταγμένο με την διάταξη

$$(N_1, h_1) \leq (N_2, h_2) \Leftrightarrow N_1 \leq N_2 \text{ και } h_2|_{N_1} = h_1.$$

Κάθε γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο $\mathcal{C}$ του $\mathcal{P}$ έχει άνω φράγμα: αν $\mathcal{C} = \{(N_i, h_i)\}_{i \in I}$ γραμμικά διατεταγμένο, τότε το $N := \cup_{i \in I} N_i$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E και η $h : N \to \mathbb{R}$ με $h(x) = h_i(x)$, αν $x \in N_i$, είναι καλά ορισμένη και γραμμική. Άρα $(N, h) \in \mathcal{P}$ και $(N_i, h_i) \leq (N, h)$, για κάθε $i \in I$. Λόγω του Λήμματος του Zorn, το $\mathcal{P}$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο (N, h). Υποχρεωτικά $N = E$, αλλιώς η προηγούμενη κατασκευή θα μας επέτρεπε να μεγαλώσουμε την επέκταση σε ένα υπόχωρο κατά μία διάσταση μεγαλύτερο του N, πράγμα που θα ερχόταν σε αντίφαση με την ιδιότητα του (N, h) να είναι μεγιστικό. $\square$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ανισότητα $f(x) \leq p(x)$, για κάθε $x \in E$, με f γραμμική και p ημινόρμα, δίνει $-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$, άρα τελικά, $|f(x)| \leq p(x)$, για κάθε $x \in E$.

Επίσης, πρέπει να παρατηρήσουμε πως στο Θεώρημα 3.7.3 η υπόθεση ότι η p είναι ημινόρμα μπορεί να αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η p είναι υποπροσθετική και θετικά ομογενής, δηλ. ότι

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \text{ και } \ p(\lambda x) = \lambda p(x),$$

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda > 0$.

3.7.4 Θεώρημα. *(Hahn-Banach, για μιγαδικούς χώρους) Έστω E ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος και p μια ημινόρμα στο E. Έστω ακόμη F ένας διανυσματικός υπόχωρος του E και $f : F \to \mathbb{C}$ γραμμική μορφή με την ιδιότητα*

$$|f(x)| \leq p(x), \qquad \forall\, x \in F.$$

Τότε υπάρχει μια γραμμική επέκταση $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ της f με

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \qquad \forall\, x \in E.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : F \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) := \mathrm{Re} f(x).$$

Η g είναι γραμμική μορφή του υποκείμενου πραγματικού διανυσματικού χώρου και

$$f(x) = g(x) - ig(ix), \qquad \forall\, x \in F.$$

Επειδή

$$g(x) \leq |g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x), \qquad \forall\, x \in F,$$

ισχύει το Θεώρημα 2.7.2, άρα υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{g} : E \to \mathbb{R}$ της g, με $\tilde{g}(x) \leq p(x)$, για κάθε $x \in E$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$, με

$$\tilde{f}(x) := \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix), \qquad \forall\, x \in E.$$

Τότε η $\tilde{f}$ είναι $\mathbb{C}$–γραμμική μορφή επί του E και επεκτείνει την f. Μένει να δειχθεί ότι $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, για κάθε $x \in E$. για $\tilde{f}(x) = 0$ ισχύει. για $\tilde{f}(x) \neq 0$, θέτουμε $a := |\tilde{f}(x)|$ και $b := \dfrac{\tilde{f}(x)}{a}$. Τότε $|b| = 1$ και

$$|\tilde{f}(x)| = a = \bar{b}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\bar{b}x) = \tilde{g}(\bar{b}x) - i\tilde{g}(i\bar{b}x).$$

Επειδή $|\tilde{f}(x)| \in \mathbb{R}$, πρέπει $\tilde{g}(i\bar{b}x) = 0$. Άρα

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{g}(\bar{b}x) \leq p(\bar{b}x) = |\bar{b}|p(x) = p(x)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη μη-τετριμμένων συνεχών γραμμικών μορφών.

3.7.5 Πόρισμα. *Έστω (E, p) ένας χώρος με ημινόρμα και $a \in E$. Τότε υπάρχει συνεχής γραμμική μορφή $f : E \to \mathbb{K}$ με $f(a) = p(a)$ και $|f(x)| \leq p(x)$, για κάθε $x \in E$.*

Απόδειξη. για $a = 0_E$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Αν $a \neq 0_E$, θέτουμε $F := \mathbb{K}a$ και

$$h : F \longrightarrow \mathbb{K} : \lambda a \mapsto \lambda p(a).$$

Επειδή $|h(\lambda a)| = |\lambda| p(a) = p(\lambda a)$, για κάθε $\lambda a \in F$, η h επεκτείνεται στην ζητούμενη f. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω E ο πραγματικός διανυσματικός χώρος των φραγμένων πραγματικών ακολουθιών $x = (a_n)$ και

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \limsup a_n.$$

Να ελέγξετε αν:

(i) Η p είναι ημινόρμα.

(ii) υπάρχει γραμμική μορφή $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim a_n$, για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x = (a_n)$.

3.8. Φραγμένα σύνολα

3.8.1 Ορισμός. Ενα υποσύνολο A ενός τδχ E λέγεται *φραγμένο*, αν, για κάθε περιοχή U του μηδενός, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ με $A \subseteq \lambda U$.

3.8.2 Λήμμα. *Ενα υποσύνολο A ενός χώρου με νόρμα $(E, \| \|)$ είναι φραγμένο, αν και μόνον αν υπάρχει $M > 0$, με $\|x\| < M$, για κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την μοναδιαία μπάλλα

$$U := S(0_E, 1) = \{x \in E \ : \ \|x\| < 1\}.$$

Έστω ότι το A είναι φραγμένο και έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ με $A \subseteq \lambda U$. Θέτουμε $M := |\lambda|$. Τότε

$$x \in \lambda U \Rightarrow \lambda^{-1}x \in U \Rightarrow \|\lambda^{-1}x\| \leq 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|x\| \leq |\lambda| = M.$$

Αντίστροφα, έστω $M > 0$, με $\|x\| \leq M$, για κάθε $x \in A$, δηλ. $A \subseteq MU$. Θεωρούμε μια περιοχή V του 0_E. υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(0_E, \varepsilon) \subseteq V$, ή, ισοδύναμα, $\varepsilon U \subseteq V$. Τότε $A \subseteq MU \subseteq (M/\varepsilon)V$, και το ζητούμενο ισχύει για $\lambda := M/\varepsilon$. □

3.8.3 Θεώρημα. *(Kolmogorov) Έστω (E, τ) ένας τδχ. Τότε η τοπολογία τ προέρχεται από μία νόρμα αν και μόνον αν ο E είναι Hausdorff και έχει μια φραγμένη και κυρτή περιοχή του μηδενός.*

Απόδειξη. Αν $\| \ \|$ είναι μια νόρμα που ορίζει την τοπολογία του E, τότε ο E, σαν μετρικός χώρος, είναι Hausdorff και κάθε μπάλλα με κέντρο το 0_E είναι μια φραγμένη και κυρτή περιοχή του 0_E.

Αντίστροφα, έστω ότι ο E είναι Hausdorff και έχει μια φραγμένη και κυρτή περιοχή U του μηδενός. Τότε υπάρχει μια ισορροπημένη περιοχή V του 0_E, με $V \subseteq U$. Θέτουμε

$$W := \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ : \ t_i \in [0,1] \text{ με } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \text{ και } x_i \in V\}.$$

Τότε W είναι κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του 0_E και $W \subseteq U$. Επειδή το U είναι φραγμένο, κάθε υποσύνολό του είναι φραγμένο, άρα το W είναι μια *φραγμένη, κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του* 0_E.

Για κάθε $0_E \neq x \in E$, ορίζουμε το σύνολο

$$A(x) := \{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ x \notin \lambda W\}$$

και θέτουμε $A(0_E) := \{0\}$. Προφανώς $0 \in A(x)$, για κάθε $x \in E$. Αν $x \neq 0_E$, τότε το $A(x)$ έχει μη–μηδενικά στοιχεία: Πράγματι, αφού ο E είναι Hausdorff, υπάρχει περιοχή B του 0_E με $x \notin B$, και αφού το W είναι φραγμένο, υπάρχει $0_E \neq \alpha \in \mathbb{K}$ με $W \subseteq \alpha B$, ή, ισοδύναμα, $\alpha^{-1}W \subseteq V$. Τότε $x \notin \alpha^{-1}W$ και $\alpha^{-1} \in A(x)$.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$\| \ \| : E \to \mathbb{K} : x \mapsto \|x\| := \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in A(x)\}.$$

Προφανώς $\|0_E\| = 0$ και $\|x\| > 0$, για κάθε $0_E \neq x \in E$. Επίσης,

$$A(\mu x) = \mu A(x), \qquad \forall\, x \in E,\ \mu \in \mathbb{K}, \tag{3.8.1}$$

άρα $\|\mu x\| = \mu\|x\|$. Για να δείξουμε ότι η $\| \ \|$ είναι νόρμα, μένει να δείξουμε ότι $\|x\| < \infty$ και $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Προς τούτο, αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$\{\lambda \in \mathbb{K} \ : \ |\lambda| < \|x\|\} \subseteq A(x). \tag{3.8.2}$$

Αν $x = 0_E$, το σύνολο στο αριστερό μέρος της (3.8.2) είναι το κενό και η σχέση ισχύει. Υποθέτουμε ότι $x \neq 0_E$ και $|\lambda| < \|x\|$. Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda = 0 \in A(x)$. Έστω $0 < |\lambda|$. Τότε, από τον ορισμό του $\|x\|$, υπάρχει $\mu \in A(x)$ με $|\lambda| < |\mu| \leq \|x\|$, δηλ. $x \neq \mu W$. Επειδή το W είναι ισορροπημένο, $\lambda W \subseteq \mu W$, άρα $x \notin \lambda W$, και η (3.8.2) έχει αποδειχθεί. Έστω τώρα $x \in E$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|x\| < \infty$. Επειδή το W είναι απορροφούν, υπάρχει $\lambda \neq 0$ με $\lambda x \in U$, άρα $1 \notin A(\lambda x)$. Τότε όμως $\|\lambda x\| \leq 1$, λόγω της (3.8.2), επομένως $|\lambda|\|x\| \leq 1$, που αποδεικνύει ότι $\|x\|$ είναι πεπερασμένο.

Για την υποπροσθετικότητα, έστω $x, y \in E$ με $x, y, x+y \neq 0_E$, αλλιώς το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έστω και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $a := \|x\| + \varepsilon$ και $b := \|y\| + \varepsilon$. Επειδή $a > \|x\|$, έχουμε $a \notin A(x)$, ή ισοδύναμα, $x \in aW$. Ομοίως $y \in bW$. Αφού το W είναι κυρτό, έχουμε

$$x + y \in aW + bW \subseteq (a+b)W,$$

δηλ. $a + b \notin A(x+y)$. Λόγω της (3.8.2),

$$a + b \geq \|x + y\|,$$

για καθε $\varepsilon > 0$, που αποδεικνύει την τριγωνική ανισότητα.

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η $\| \ \|$ είναι νόρμα. Θα δείξουμε τώρα ότι η μετρική τοπολογία που ορίζει η νόρμα συμπίπτει με την τοπολογία τ. Αφού και οι δύο τοπολογίες κάνουν τον E τδχ, αρκεί να δείξουμε ότι συμπίπτουν οι ανοιχτές περιοχές του 0_E. Έστω $V \in \tau$ ανοιχτή περιοχή του 0_E και έστω $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ με $W \subseteq \lambda V$. Θεωρούμε την μπάλλα $S(0_E, |\lambda|^{-1})$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in S(0_E, |\lambda|^{-1}) &\Rightarrow \|x\| < |\lambda|^{-1} \\ &\Rightarrow \lambda^{-1} \notin A(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in \lambda^{-1} W \subseteq V \end{aligned}$$

δηλ.

$$S(0_E, |\lambda|^{-1}) \subseteq V,$$

που αποδεικνύει ότι το V είναι περιοχή του 0_E στην μετρική τοπολογία. Αντίστροφα, έστω V μια περιοχή του 0_E στην μετρική τοπολογία. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(0_E, \varepsilon) \subseteq V$. Θεωρούμε την περιοχή εW της τ. για κάθε $x \in \varepsilon W$, ισχύει $\varepsilon \notin A(x)$, άρα $\|x\| \leq \varepsilon$ και $\varepsilon W \subseteq V$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η V είναι περιοχή του 0_E στην τ. $\square$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της απόδειξης στο Θεώρημα του Kolmogorov.

(2) Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο A ενός τδχ E είναι φραγμένο, αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ και κάθε ακολουθία $\lambda_n \in \mathbb{K}$ με $\lambda_n \longrightarrow 0$, ισχύει $\lambda_n x_n \longrightarrow 0_E$.

(3) Έστω E, F τδχ και $f : E \to F$ συνεχής γραμμική. Αν $A \subseteq E$ φραγμένο, να δείξετε ότι $f(A)$ φραγμένο. Ισχύει ότι αν $B \subseteq F$ φραγμένο τότε και $f^{-1}(B)$ φραγμένο;