

Φυλλάδιο ασκήσεων  
Θ19α. Ειδικά θέματα: Ricci flow  
Ιανουάριος 2026

(1) Έστω  $(M, g, f)$  ένα gradient Ricci soliton, ικανοποιείται δηλαδή τη σχέση

$$\text{Ric} + \text{Hess}f = \lambda g,$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι

(α')  $R + \Delta f = \lambda n$ . *Υπόδειξη:* Πάρτε το ίχνος της εξίσωσης των gradient soliton.

(β')  $\nabla R = 2\text{Ric}(\nabla f)$ . *Υπόδειξη:* Πάρτε την απόκλιση της εξίσωσης των gradient soliton, και χρησιμοποιήστε την δεύτερη ταυτότητα Bianchi  $2\text{divRic} = R$ .

(γ')  $\nabla(R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f) = 0$ , και επομένως  $R + |\nabla f|^2 - 2\lambda f = c \in \mathbb{R}$ .

(δ')  $2\Delta f - |\nabla f|^2 + R + 2\lambda f - 2\lambda n = -c$ .

(2) (α') Έστω  $(M, g)$  μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann και  $f \in C^\infty(M)$ . Να δείξετε ότι αν  $u = e^{-f}$  τότε

$$\mathcal{F}(g, f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} d\text{vol}_g = \int_M (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R) u d\text{vol}_g.$$

(β') Έστω  $g(t)$ ,  $t \in I$ , μια Ricci flow σε μια συμπαγή πολλαπλότητα  $M$ , και  $u = e^{-f}$  τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη συζυγή εξίσωση της θερμότητας

$$\square^* u = (\partial_t + \Delta - R)u = 0.$$

Να δείξετε ότι η ποσότητα  $w = (2\Delta f - |\nabla f|^2 + R)u$  ικανοποιεί

$$\square^* w = |\text{Ric} + \text{Hess}f|^2 u$$

(γ') Συμπεράνετε από τα (α') και (β') ότι

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(g(t), f(t)) = \int_M |\text{Ric} + \text{Hess}f|^2 u d\text{vol}_g.$$

(3) Έστω  $(M, g(t))_{t \in I}$  μια Ricci flow σε μια συμπαγή πολλαπλότητα. Αν  $v \in C^\infty(M \times [0, +\infty))$  ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \Delta v$$

να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla v|^2 = \Delta |\nabla v|^2 - 2|\nabla^2 v|^2,$$

και να τη χρησιμοποιήσετε ώστε να αποδείξετε τα παρακάτω.

(α') Να δείξετε ότι αν  $\square^* u = 0$  τότε

- Η ποσότητα  $\int_M v u d\text{vol}_{g(t)}$  είναι σταθερή ως προς  $t \in I$ .
- Η ποσότητα  $\int_M |\nabla v|^2 u d\text{vol}_{g(t)}$  είναι φθίνουσα ως προς  $t$ .

(β') Αν για κάποιο  $t \in I$ ,  $\max_M |\nabla v(\cdot, t)| \leq 1$ , να δείξετε ότι  $\max |\nabla v(\cdot, s)| \leq 1$  για κάθε  $s \in I$ ,  $t < s$ .

(γ') Έστω  $\nu_1, \nu_2$  δύο μέτρα πιθανότητας στην συμπαγή πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$ . Ορίζουμε

$$d_{W_1}^g(\nu_1, \nu_2) = \sup \left\{ \int_M v d\nu_1 - \int_M v d\nu_2, \text{ όπου } v \in C^\infty(M), |\nabla v|_g \leq 1 \right\}.$$

Η  $d_{W_1}^g$  ορίζει μια μετρική στο χώρο των μέτρων πιθανότητας στην  $M$  (ονομάζεται απόσταση Wasserstein).

Να δείξετε ότι αν  $g(t)$  είναι μια Ricci flow στην  $M$  και  $d\nu_{i,t} = u_i(\cdot, t) d\nu_{g(t)}$ , για  $t \in I$ , όπου  $\square^* u_i = 0$ , τότε για κάθε  $t < s, t, s \in I$

$$d_{W_1}^{g(t)}(\nu_{1,t}, \nu_{2,t}) \leq d_{W_1}^{g(s)}(\nu_{1,s}, \nu_{2,s}).$$

(4) Έστω  $\bar{g}_0, \bar{g}$  δύο μετρικές Riemann σε μια συμπαγή πολλαπλότητα  $M$ , και  $(g_0(t))_{t \in [0, T_1]}, (g(t))_{t \in [0, T_2]}$ , οι Ricci flow με αρχικές συνθήκες  $\bar{g}_0, \bar{g}$  αντίστοιχα. Είναι δυνατόν (σε αυτή τη γενικότητα) να υπάρχει  $\varepsilon > 0$  αρκετά μικρό ώστε αν

$$|\bar{g} - \bar{g}_0|_{\bar{g}_0} < \varepsilon$$

να υπάρχει  $C(\varepsilon) > 0$  με την ιδιότητα

$$|g(t) - g_0(t)|_{g_0(t)} < C(\varepsilon),$$

για κάθε  $t \in [0, \min(T_1, T_2)]$ ;

*Υπόδειξη:* Δείτε τι γίνεται αν  $\bar{g}, \bar{g}_0$  είναι σφαίρες με σχεδόν την ίδια (αλλά διαφορετική) καμπυλότητα.

(5) Έστω η μετρική  $g = dr^2 + (2\sqrt{r+1})^2 g_{\mathbb{S}^2}$  στην πολλαπλότητα  $M = (0, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ , όπου  $r \in (0, +\infty)$  είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη.

*Σημείωση:* Επειδή  $\frac{d}{dr} \Big|_{r=0} 2\sqrt{r+1} = 1$ , η  $g$  επεκτείνεται σε ομαλή μετρική στον  $\mathbb{R}^3$  (δείτε Petersen έκδοση 2: Κεφάλαιο 1)

(α') Να αποδείξετε ότι επίπεδα  $\pi \subset T_{(r,\theta)}M$  που περιέχουν το διάνυσμα  $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r,\theta)}$  έχουν

$$\sec(\pi) = \frac{1}{4(r+1)^2} \approx \frac{1}{4r^2},$$

ενώ επίπεδα  $\pi \subset T_{(r,\theta)}M$  που παράγονται από διανύσματα κάθετα στο  $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(r,\theta)}$  έχουν

$$\sec(\pi) = \frac{1}{4(r+1)} \left( 1 - \frac{1}{r+1} \right) \approx \frac{1}{4r}$$

*Υπόδειξη:* Οι sectional καμπυλότητες περιστροφικά συμμετρικών μετρικών της μορφής

$$dr^2 + (\varphi(r))^2 g_{\mathbb{S}^2}$$

δίνονται από την σχέση

$$\sec(\pi) = -\frac{\varphi''}{\varphi},$$

για επίπεδα που περιέχουν το  $\frac{\partial}{\partial r}|_{(r,\theta)}$ , ενώ για επίπεδα κάθετα σε αυτό δίνονται από τη σχέση

$$\sec(\pi) = \frac{1 - (\varphi')^2}{\varphi^2}.$$

Δείτε Petersen, έκδοση 2, Κεφάλαιο 3.

(β') Έστω  $\theta \in \mathbb{S}^2$  και ακολουθία  $r_i \rightarrow +\infty$ . Θέτουμε  $x_i = (r_i, \theta)$  και

$$\lambda_i = \max_{\pi \subset T_{x_i} M} |\sec(\pi)|.$$

Έστω  $g_i = \lambda_i g$ .

(i) Να δείξετε ότι η απόσταση του  $0 \in \mathbb{R}^3$  από το  $x_i$  ως προς τη μετρική  $g_i$  ικανοποιεί

$$d_{g_i}(0, x_i) \rightarrow +\infty.$$

*Σημείωση:* Άρα η κορυφή 0 φαίνεται να φεύγει στο άπειρο ακόμα και μετα τη συστολή κατά  $\lambda_i$ .

(ii) Να δείξετε ότι η ακολουθία  $(M, g_i, x_i)$  συγκλίνει ως προς την pointed  $C^\infty$  Cheeger-Gromov τοπολογία στον κύλινδρο

$$((-\infty, +\infty) \times \mathbb{S}^2, ds^2 + g_{\mathbb{S}^2}, (0, \theta)),$$

όπου  $g_{\mathbb{S}^2}$  είναι η μετρική σταθερής καμπυλότητας 1 στην  $\mathbb{S}^2$ . Να το δείξετε λεπτομερώς, βρίσκοντας κατάλληλες αμφιδιαφορίσεις.

*Σημείωση:* Εναλλακτικά, από το θεώρημα συμπάγειας και τον ισχυρισμό του ερωτήματος (i) μπορεί κανείς να πει ότι υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει σε μια μετρική στον κύλινδρο με μη αρνητική καμπυλότητα. Το splitting theorem όμως μας λέει ότι μια τέτοια μετρική πρέπει να είναι μετρική γινόμενο στον  $(-\infty, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ . Επιπλέον, οι σφαιρικές διατομές έχουν σταθερή καμπυλότητα, λόγω συμμετρίας.