

Θεωρία Μέτρου - Εξέταση Ιανουαρίου 2025 - 22 Ιανουαρίου 2025

Σχόλια:

- Η εξέταση πιάνει συνολικά **10 μονάδες**. Οι μονάδες που θα πάρετε εδώ θα προστεθούν στις μονάδες των εργασιών, για τον τελικό βαθμό.
 - Στα παρακάτω συμβολίζουμε με λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, με λ_2 το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^2$, με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (αντίστοιχα, με $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) τη Borel σ -άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ (αντίστοιχα, στο $\mathbb{R}^2$), και με $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (αντίστοιχα, με $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$) τη Lebesgue σ -άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ (αντίστοιχα, στο $\mathbb{R}^2$). Τέλος, με $\mathcal{L}^1(\mu)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ως προς μέτρο μ .
-

1. (2 μονάδες)

- Ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Δείξτε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Εξηγήστε το ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, το $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
- Δείξτε ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A), \lambda(B) \in (0, +\infty)$,

$$\lambda_2(A \times B) \leq \lambda(A) \cdot \lambda(B).$$

- Σας δίνεται ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue, ισχύει ότι $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$.
Δείξτε ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, το $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. (2 μονάδες) Έστω $X \neq \emptyset$, και μ^* εξωτερικό μέτρο στον X , με $\mu^*(X) < +\infty$. Ορίζουμε $\nu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, με

$$\nu^*(A) := \sqrt{\mu^*(A)}, \quad \text{για κάθε } A \subseteq X.$$

Δείξτε ότι:

- Το ν^* είναι εξωτερικό μέτρο.
- Για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει ότι

$$\text{το } A \text{ είναι } \nu^*\text{-μετρήσιμο} \iff \mu^*(A) = 0 \text{ ή } \mu^*(X \setminus A) = 0.$$

3. (2 μονάδες) Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- Αν ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό και πυκνό, τότε $\lambda(A) = +\infty$.
- Αν ένα $F \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό και δεν περιέχει διάστημα, τότε $\lambda(F) = 0$.
- Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφει Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue-μετρήσιμα σύνολα.
- Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \cap (A + \frac{1}{n}) \neq \emptyset$.

ε) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη, Lebesgue-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \inf \left\{ \int_{[0,1]} s d\lambda : s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ απλή, } f \leq s \right\}.$$

4. (2 μονάδες) Δικαιολογώντας προσεκτικά τα βήματά σας, υπολογίστε τα παρακάτω:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, dx.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{n \sin \left(\frac{x}{n} \right)} \, dx.$$

(Υπενθύμιση: Το dx είναι ο συμβολισμός για το ολοκλήρωμα Riemann.)

5. (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, με $\mu(X) < +\infty$. Έστω $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ Lebesgue-μετρήσιμη. (Προσοχή, η f μπορεί να παίρνει και τις τιμές $\pm\infty$.)

a) Έστω ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$. Δείξτε ότι η $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Έστω ότι η $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(i) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $A_k := \{x \in X : 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$. Δείξτε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(A_k), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq 2^n\}) \leq 2 \int |f| \, d\mu (< +\infty)$.

Καλή επιτυχία!