

Θεωρία Μέτρου 2025-26 - Φυλλάδιο 2

Προθεσμία παράδοσης: 14 Δεκεμβρίου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω $X \neq \emptyset$, και μ^* εξωτερικό μέτρο στον X , με $\mu^*(X) < +\infty$. Ορίζουμε $\nu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, με

$$\nu^*(A) := \sqrt{\mu^*(A)}, \quad \text{για κάθε } A \subseteq X.$$

Δείξτε ότι:

- a) Το ν^* είναι εξωτερικό μέτρο.
- b) Για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει ότι

$$\text{το } A \text{ είναι } \nu^*\text{-μετρήσιμο} \iff \mu^*(A) = 0 \text{ ή } \mu^*(X \setminus A) = 0.$$

2. a) Ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Δείξτε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
b) Εξηγήστε το ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, το $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
c) Δείξτε ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A), \lambda(B) \in (0, +\infty)$,

$$\lambda_2(A \times B) \leq \lambda(A) \cdot \lambda(B).$$

- d) Σας δίνεται ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue, ισχύει ότι $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$.

Δείξτε ότι, για κάθε $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, το $A \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

3. Σωστό ή Λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- a) Για κάθε $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, έχουμε ότι $\lambda(A) = \min\{\lambda(U) : U \text{ ανοιχτό, } U \supseteq A\}$.
- b) Για κάθε $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, έχουμε ότι $\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) : F \text{ κλειστό, } F \subseteq A\}$.
- c) Έστω $N \subseteq [0, 1)$ ένα σύνολο Vitali που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση της ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0, 1)$, όπου $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$. Τότε, $\lambda_*(N) = 0$

4. Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ με $0 < \lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος (φραγμένα) διαστήματα $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$, ώστε

$$\lambda\left(A \Delta \left(\bigcup_{n=1}^N (a_n, b_n)\right)\right) < \varepsilon.$$

(Για κάθε σύνολα A, B , ορίζουμε $A \Delta B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.)

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue-μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$b - a = \lambda^*((a, b) \cap A) + \lambda^*((a, b) \setminus A) \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

6. Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα ότι $0 < \lambda(A) < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(A \cup (A+t)) = \lambda(A).$$

[Υπόδειξη: Πρώτα καλύψτε το A κατάλληλα με διαστήματα.]

7. Έστω A, B Lebesgue-μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, ώστε το $A+B$ να είναι και αυτό Lebesgue-μετρήσιμο. Δείξτε ότι $\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$.

(Υπόδειξη: Σκεφτείτε πρώτα την περίπτωση που τα A, B είναι φραγμένα. Μπορείτε να βρείτε δύο αντίτυπα των A, B μέσα στο $A+B$, που να είναι πρακτικά ξένα;)

8. a) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι $\lambda_*(A) > 0$. Εξηγήστε γιατί το $A-A$ περιέχει ανοιχτό σύνολο.

b) Έστω C ο κύκλος στον $\mathbb{R}^2$ με κέντρο $(1,0)$ και ακτίνα 1. Ορίζουμε $C_0 := C \setminus \{(0,0)\}$. Έστω A Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, με την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in A$, το σύνολο $x+C_0$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Δείξτε ότι $\lambda_2(A) = 0$.

[Υπόδειξη: Θα βοηθήσει να φτιάξετε σχήμα για τον C_0 και για τον $x+C_0$ (τη μεταφορά του κατά διάνυσμα x). Επίσης, θα βοηθήσει η παρατήρηση ότι κάθε μπάλα $B(0, \delta)$ με κέντρο το 0 τέμνει τον C_0 .]