

Θεωρία Μέτρου 2025-26 - Φυλλάδιο 1

Προθεσμία παράδοσης: 12 Νοεμβρίου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. a) Προσδιορίστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι σ -άλγεβρες στο $\mathbb{R}$:
- (i) $\mathcal{A} := \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων της μορφής } (a, b)\}$.
- (ii) $\mathcal{B} := \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ συμπαγές}\}$.
- b) Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F}$ σ -άλγεβρα στο X , και $B \subset X$ με την ιδιότητα ότι $B \notin \mathcal{F}$. Δείξτε ότι η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει συγχρόνως όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ και το B είναι η οικογένεια

$$\mathcal{C} := \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B^c) : A_1, A_2 \in \mathcal{F}\}.$$

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποκαλούμε ένα $E \subseteq X$ τοπικά μετρήσιμο αν $E \cap A \in \mathcal{A}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < +\infty$. Ορίζουμε

$$\mathcal{E} := \{E \subseteq X : E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

- a) Δείξτε ότι η $\mathcal{E}$ είναι σ -άλγεβρα, και ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.
- b) Έστω ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σ -πεπερασμένος. Δείξτε ότι $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.
3. a) Έστω $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$, με

$$\mu(A) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n}, \quad \text{για κάθε } A \subseteq \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το μ δεν είναι μέτρο.

- b) Κατασκευάστε ένα παράδειγμα πεπερασμένα προσθετικού μέτρου που δεν είναι μέτρο. (Υπενθύμιση: Ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο ορίζεται σε σ -άλγεβρα, και ικανοποιεί τις ιδιότητες του μέτρου, με εξαίρεση την αριθμήσιμη προσθετικότητα για ξένα σύνολα (που αντικαθίσταται από πεπερασμένη προσθετικότητα για ξένα σύνολα).)
4. Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία ξένων υποσυνόλων του X με την ιδιότητα ότι $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Έστω $\mathcal{F} := \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$. (Με άλλα λόγια, η $\mathcal{F}$ είναι μία διαμέριση του X .)

- a) Δείξτε ότι

$$\sigma(\mathcal{F}) = \left\{ \bigcup_{n \in I} A_n : I \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$

- b) Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει μέτρο στη $\sigma(\mathcal{F})$ με $\mu(A_n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και ότι αυτό το μέτρο είναι μοναδικό.

5. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

6. a) Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{F} \neq \emptyset$ μία άλγεβρα στο X . Έστω $\mu : \sigma(\mathcal{F}) \rightarrow [0, +\infty)$ πεπερασμένο μέτρο στο X . Δείξτε ότι, για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \Delta F) < \varepsilon$.

(Για οποιαδήποτε $A, B \subseteq X$, $A \Delta B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.)

(Υπόδειξη: Εδώ η δυσκολία είναι ότι δεν έχουμε καμία περιγραφή των στοιχείων της $\sigma(\mathcal{F})$ (ούτε του μέτρου μ). Πώς αντιμετωπίσαμε αντίστοιχες καταστάσεις στο παρελθόν, όταν θέλαμε να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία μιας $\sigma(\mathcal{F})$ ικανοποιούσαν μια ωραία ιδιότητα;)

b) Δείξτε ότι στο (a) η προϋπόθεση ότι το μέτρο είναι πεπερασμένο είναι απαραίτητη. (Με άλλα λόγια, κατασκευάστε ένα χώρο μέτρου $(X, \sigma(\mathcal{F}), \mu)$, όπου $\mu(X) = +\infty$ και το συμπέρασμα στο (a) αποτυγχάνει.)

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, και $(A_n)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

a) Δείξτε ότι, αν $\mu(A_n) \geq \frac{1}{3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\mu(\limsup A_n) \geq \frac{1}{3}$.

b) Δείξτε ότι, αν

$$\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_{n+1} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)) < +\infty,$$

τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

8. (Σε αυτή την άσκηση θα δείξουμε ότι κάθε σ -άλγεβρα ή είναι υπεραριθμήσιμη ή έχει πληθάριθμο ίσο με δύναμη του 2.) Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ σ -άλγεβρα στον X . Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε

$$M_x := \bigcap_{A \in \mathcal{A}: x \in A} A.$$

a) Δείξτε ότι, για κάθε $x \neq y$ στον X , έχουμε ότι ή $M_x = M_y$ ή $M_x \cap M_y = \emptyset$.

b) Δείξτε ότι όλα τα διαφορετικά στοιχεία της μορφής M_x , $x \in X$, αποτελούν διαμέριση του X .

c) Συμβολίζουμε με $\mathcal{F} := \{M_x : x \in X\}$. Έστω ότι $\#\mathcal{F} < +\infty$. Δείξτε ότι $\#\mathcal{A} = 2^{\#\mathcal{F}}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (1a)).

d) Έστω ότι $\#\mathcal{A} = +\infty$. Δείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη. (Υποθέστε ότι είναι αριθμήσιμη. Πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις παραπάνω ιδέες;)