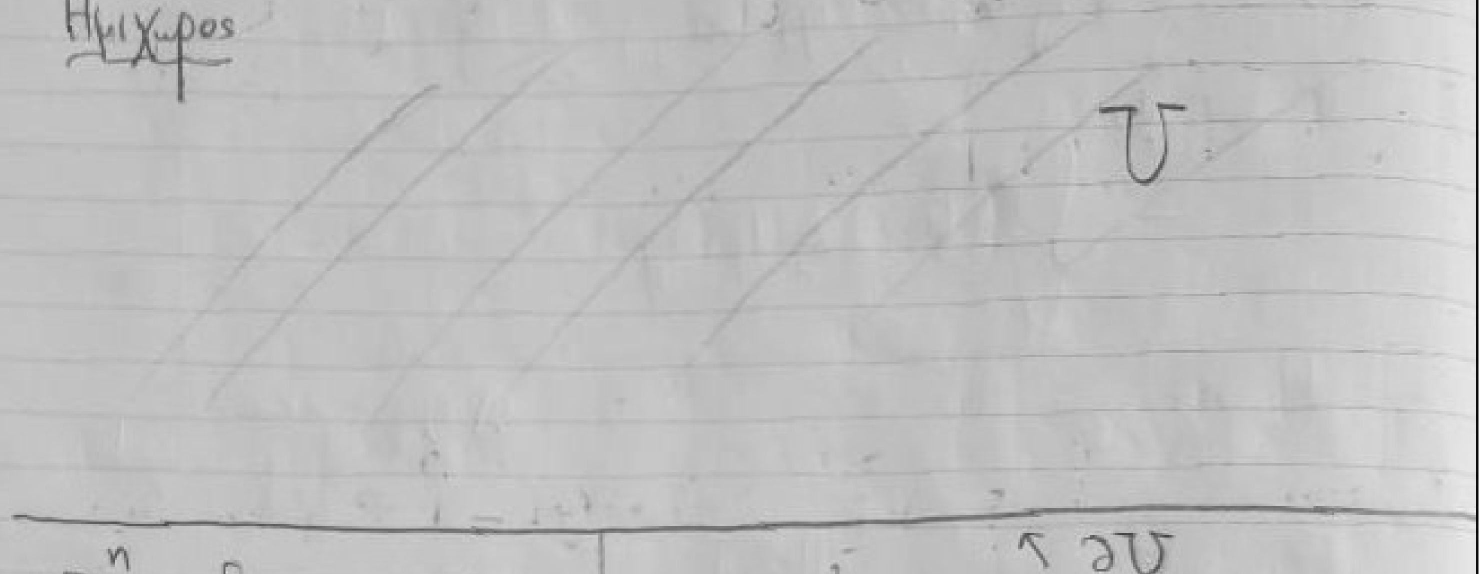
Παραδείγματα Συναρτήσεων Green (Μέθοδος Ειδώλων / Ανακλάσεις)

Ημιχώρος

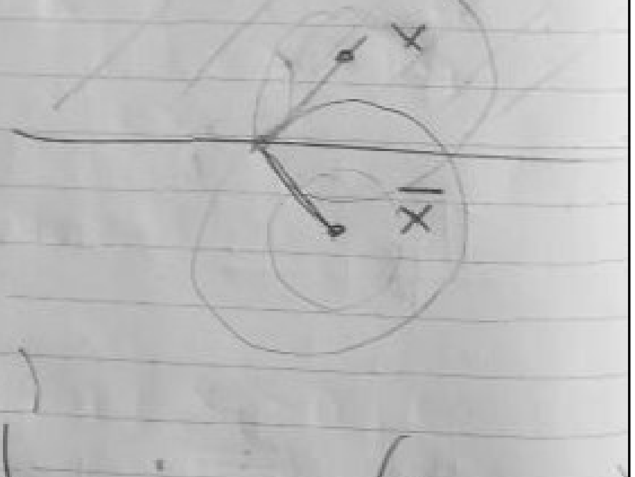


$$\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\dots,x_n) \mid x_n>0\} =: U$$

U δεν είναι φραγμένο. Θα εξετάσετε αυτό αργότερα και το εάν επηρεάζει τον τύπο (5)

$x \longrightarrow \bar{x}$, ανάκλαση

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -x_n)$.



Παρατηρούμε απ' ευθείας

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\bar{x})$$

• Διότι προφανώς $G(x,y)\Big|_{y\in\partial U} = 0$ (Εξάρτηση από Απόστ.)

και επίσης

$$-\Delta_y G(x,y) = -\Delta_y \Phi(y-x) + \overbrace{\Delta_y \Phi(y-\bar{x})}^{0}$$
(για $y \neq$

$$= \delta_y(x).$$

~~72~~/72

$$\frac{\partial G}{\partial \nu(y)} = \frac{\partial}{\partial y_n}\left[\Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})\right]$$

Θεωρούμε $n \geq 3$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(|x-y|^{-(n-2)}\right) = -(n-2)\,|x-y|^{-(n-1)}\,\frac{x_i - y_i}{|x-y|}$$

$$\boxed{y_n = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|x| = \frac{x_i}{|x|}$$

$$\frac{y_n - x_n}{|y-x|} - \frac{y_n - \tilde{x}_n}{|y-\tilde{x}|}$$

$$\boxed{y_n = 0}$$

$$\tilde{x}_n = -x_n$$

$$(6)\quad \left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_n}\right|_{y \in \mathbb{R}^{n-1}} = -\frac{2x_n}{n\,\alpha(n)}\left(\frac{1}{|x-y|^n}\right)$$

Θεωρούμε τώρα το ΠΣΤ

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta_x u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ u = g, & x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Ο τύπος (5) φορμαλιστικά (διότι το U δεν είναι φραγμένο στην προκειμένη περίπτωση) δίνει

$$(8)\quad u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy \quad \Big\}\ \text{Τύπος Poisson}$$

$$0 < K(x,y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\left(\frac{1}{|x-y|^n}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

| Πυρήνας Poisson |