

Κατόικον Εξέταση - ΜΔΕ II
Μερος Β (Αρχη Μερίστου)

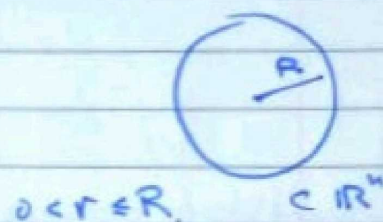
Άσκηση 1

Έστω

$$\Delta u = 1 \quad \text{στην μπάλα } B_R = \{ |x| < R \}$$

Τότε ισχύει η εκτίμηση

$$\sup_{\partial B_r} u \geq u(0) + \frac{r^2}{2n}$$



Να αποδειχθεί κανοντας χρήση της Αρχής των Μερίστου (Υπόδειξη: $w(x) = u(x) - \frac{|x|^2}{2n}$, συνάρτηση ομογενής)

Άσκηση 2 (Δ υποδείξεις προσηφών για την $c(x)$)

Έστω $w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο
 Έστω ότι

$$\begin{cases} \Delta w + c(x)w \geq 0, & \text{στο } U \\ w(x) \leq 0, & \text{στο } \bar{U} \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$w(x) < 0 \quad \forall \quad w \not\equiv 0 \text{ στα } \partial U$$

(Υπόδειξη: $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$)

Άσκηση 3 (Δ υποδείξεις προσηφών για την $c(x)$)

Έστω $w \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, φραγμένο, C^2 χυφίο.
 Έστω επίσης

$$\Delta w + c(x)w \geq 0 \quad \text{στο } \bar{U}$$

$$w \leq 0 \quad \text{στο } \bar{U}$$

$$w(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \partial U.$$

Δείξτε ότι

$$\frac{\partial w(\bar{x})}{\partial \nu} \geq 0 \quad \left(\text{εφόσον και αν } w \equiv 0 \right).$$

$\neq$

Άσκηση 4

Έστω $u, v \in C^2(\bar{U}) \cap C^1(\bar{U})$, U ανοικτό, φραγμένο, και

$$w \mapsto f(x, w) \quad (\text{τοπικά Lipschitz})$$

$$|f(x, w_1) - f(x, w_2)| \leq L |w_1 - w_2|, \quad x \in \bar{U}, \quad w_i \in K,$$

$$K \text{ συμπαγές σύνολο, } L = L(K)$$

Έστω ότι

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u) \geq 0, & \Delta v + f(x, v) \leq 0, \quad x \in U \\ u(x) \leq v(x), & x \in \bar{U} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$u(x) < v(x)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \text{ή} \\ \text{ή} \end{smallmatrix} \right. \quad u(x) \equiv v(x) \quad \left. \right)$$

(Υπόδειξη: Αρ 2).

Άσκηση 5

Θεωρούμε το Π.Σ.Τ.

$$(ΠΣΤ) \begin{cases} -u'' = e^u, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Δείτε ότι αν L αρκετά μεγάλο ~~ή~~ ή αρνητική
δύνη,

(Φυσική διαίσθηση: η θερμοκρασία $(\frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} + e^u \quad (*)$
εξίσωση θερμοτητας)

- $u=0$ κρύο στο όριο
- e^u πυρήν θερμοτητας

Η ύπαρξη βήθων ισορροπίας για την $(*)$ σημαίνει
ότι οι δύο καταστάσεις εξισορροπίας η μία την αλλη.
Ανυπαρξία σημαίνει ότι το όριο που μακρύνει και
η πυρήν θερμοτητας υπερβήχει $\rightarrow$ έκρηξη.)

Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

1) $w = u + \varepsilon$, ε>0 φεζαφίφεινο

$$(1) \begin{cases} -w'' = e^{-\varepsilon} e^w, & 0 < x < 1 \\ w(0) = w(1) = \varepsilon \end{cases}$$

$$(2) \varphi_\lambda(x) := \lambda \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \lambda > 0, 0 < x < L$$



Επιλέξτε L μεγάλο έτσι ώστε

$$(3) \frac{\pi^2}{L^2} \varepsilon \leq e^{-\varepsilon} e^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Δείξτε ότι

$$(4) \quad \begin{cases} W'' + \frac{\pi^2}{L^2} W \leq 0, & 0 < x < L \\ W(0) = W(L) = 0 \end{cases}$$

2) Δείξτε ότι για $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$

$$(5) \quad v_\lambda(x) \leq W(x), \quad 0 < x < L \quad (\lambda = \lambda(1))$$

3) Έστω

$$\lambda_0 = \sup \left\{ \lambda \mid v_\lambda(x) \leq W(x), 0 \leq x \leq L \right\}$$

$$\therefore \exists x_0 \text{ τ.ω. } v_{\lambda_0}(x_0) = W(x_0)$$

$$\text{Θετῶμε } p(x) = v_{\lambda_0}(x) - W(x).$$

Δείξτε ότι

$$\begin{cases} p'' + \frac{\pi^2}{L^2} p \geq 0, & 0 < x < L \\ p \leq 0, & p(x_0) = 0, \quad p(0) = p(L) < 0 \end{cases}$$

Απορρο!

Άσκηση 6 (Η Αρχή Μέγιστων για "στενά" χωρία)

Έστω $\bar{\Omega} \subset \{0 < x_1 \leq d\}$

↗ επιτῶμε, Ω ανοικτό, φραγμένο



Εστω

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{στο } \Omega, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \\ u \leq 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

$\exists d_0 > 0$ που εξαρτάται από το $\|c^+\|_{L^\infty}$, T.W.
αν $d < d_0 \Rightarrow$

$$u < 0 \text{ στο } \Omega \quad \text{ή} \quad u \equiv 0.$$

Βήμα 1

Πρέπει να δείξουμε ότι $u(x) \leq 0$ στο Ω (;)

Βήμα 2

Με ως ατόπων απαγωγή:

Εστω

$$(1) \quad \sup_{x \in \Omega} u(x) > 0.$$

Εστω $d \ll 1$ T.W.

$$(2) \quad c(x) \leq \frac{\pi^2}{d^2}, \quad x \in \Omega.$$

Θεωρούμε την $w(x) = \sin\left(\frac{\pi x_1}{d}\right)$,

$$(3) \quad \Delta w + c(x)w \leq 0, \quad \inf_{\bar{\Omega}} w(x) > 0.$$

Βήμα 3

Δοθέντος $\lambda \geq 0$

$$(4) \quad w_\lambda(x) := \lambda w(x)$$

$$\exists \lambda > 0, \lambda \gg 1 \quad \text{T.W.}$$

$$(5) \quad \lambda w(x) > u(x)$$

Βήμα 4

$$(6) \quad \lambda_0 := \inf \left\{ \lambda : w_\lambda(x) > u(x), \forall x \in \Omega \right\}$$

$$\lambda_0 > 0 \quad (i)$$

$$(7) \quad v(x) := u(x) - w_{\lambda_0}(x) \leq 0 \quad (i)$$

$$(8) \quad \Delta v + c(x)v \geq 0 \quad (i)$$

$\Rightarrow$

$$v(x) < 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (ii)$$

Επομένως

$$v(x) < 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \quad (i)$$

Βήμα 5

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \text{T.W.}$$

$$(9) \quad v(x) < -\varepsilon_0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad \Leftrightarrow$$

$$(10) \quad u(x) + \varepsilon_0 < w_{\lambda_0}(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$



Αποστο

(i)

Σημείωση: Η Ασκήση 2 είναι κεντρική στην επίλυση των Ασκήσεων 4, 5, 6.

□