

⚠ And την ανόδειξη, θα φανεί ότι το Θεώρημα του Poisson ισχύει και για άλλες συναρτήσεις, π.χ. $\forall f \in \underbrace{C_c(\mathbb{R})}$ που είναι Lipschitz-συνεχής.

(Δείτε το ερώτημα: Ποια είναι κατεύθυνση να M_k σε αυτή την περίπτωση; Εφαρμόζεται το Θεώρημα του Dini;)

οι συνεχείς με συμπαγή φέρμα.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: $\forall g \in S(\mathbb{R})$, η $G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό $[\alpha, b] \subseteq \mathbb{R}$ [Μάλιστα, $\forall [\alpha, b]$, $\exists$ σταθερές $M_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ώστε $|g(x+k)| \leq M_k$, $\forall x \in [\alpha, b]$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ και $\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k < +\infty$]. (*)

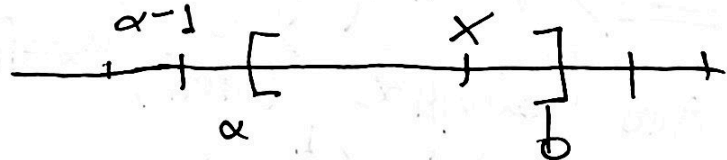
Απόδειξη Ισχυρισμού: Αρκεί ν.δ. το (*)
Έστω $[\alpha, b] \subseteq \mathbb{R}$. $\hookrightarrow$ (Μ-τέος του Weierstrass)

$$\text{Ισχύει } \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k).$$

$$\text{Αφού } g \in S(\mathbb{R}), \exists C > 0: |g(x-k)| \leq \frac{C}{1+|x-k|^2}, \forall x \in [\alpha, b], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet \text{ Για } k \leq \alpha - 1: |x-k| \geq |\alpha-k|$$

$$|g(x-k)| \leq \frac{C}{1+|\alpha-k|^2} = M_k, \forall x \in [\alpha, b].$$



$$\bullet \text{ Για } k \geq b + 1: |x-k| \geq |b-k|$$

$$|g(x-k)| \leq \frac{C}{1+|b-k|^2} = M_k, \forall x \in [\alpha, b].$$

• Για $k \in [\alpha-1, b+1] : |g(x-k)| \leq C := M_k, \forall x \in [\alpha, b]$

$$\text{Και } \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k = \underbrace{\sum_{k \leq \alpha-1} \frac{C}{1+|\alpha-k|^2}}_{\uparrow +\infty} + \underbrace{\sum_{k \geq b+1} \frac{C}{1+|b-k|^2}}_{\uparrow +\infty} + \underbrace{\sum_{\alpha-1 \leq k \leq b+1} C}_{\uparrow +\infty}$$

($\exists$ πότερ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k < \infty$)

Απόδειξη C Poisson

• Αρα $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, η $F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) \in \mathcal{C}, \forall x \in \mathbb{R}$
(ορίζεται κατ'εί).

• $F(x+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+1+k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow F$ 1-περιοδική.

• Η F είναι παραγωγίσιμη επειδή:

$\rightarrow F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$ συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$ ✓

$\rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(x+k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $[\alpha, b]$ καθώς $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ } $\Rightarrow$

ΑΤΤ $\Rightarrow F$ παραγωγίσιμη και $F'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f'(x+k)$

Από Θεώρημα Dini, $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{F}(k) e^{2\pi i k x}$

$$\text{όπου } \hat{F}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} F(x) dx = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) \right) dx =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2\pi i k x} \underbrace{f(x+m)}_f dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \underbrace{e^{-2\pi i k (y-m)}}_{e^{-2\pi i k x}} f(y) dy =$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} e^{-2\pi i k y} f(y) dy = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=-N}^N \int_m^{m+1} e^{-2\pi i k y} f(y) dy =$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int e^{-2\pi i k y} f(y) \chi_{[-N, N+1]}(y) dy \xrightarrow{\text{OKS}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i k y} f(y) dy = \hat{f}(k)$$

Αναστροφή: $\int_0^1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (e^{-2\pi i k x} f(x+m)) dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-2\pi i k x} f(x+m) dx$

Έστω $S_N = \sum_{m=-N}^N e^{-2\pi i k x} f(x+m)$. Το πρόβλημα ισοδυναμεί με το αν

$$\int_0^1 [\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x)] dx \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(x) dx$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, |S_N(x)| \leq \sum_{m=-N}^N M_m \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} M_m = C \in \mathbb{R}$$

και $\int_0^1 |C| = \int_0^1 C = C < +\infty$. Άρα, η $*$ ισχύει and OKS.

• Για $x=0 \rightarrow \boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)}$

Πρόταση: Αν $\text{supp } f \subseteq (0, 1)$ (δηλ. $f(x) = 0$ εκτός $(0, 1)$),
τότε $\forall x \in [0, 1], F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = f(x)$.

Άρα από Poisson, $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ $\hookrightarrow$ μετασχη.

Αντίστροφη πρόταση: Το ίδιο, αλλά για
τον $\hat{f}$.
Αν $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $\text{supp } \hat{f} \subseteq (0, 1)$, τότε, $(\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$
 $\forall x \in [0, 1], \hat{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(-k) e^{2\pi i k x} =$
 $= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k x}$

Πρόταση 1: Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\text{supp } \hat{f} \subseteq (0, 1)$

Τότε, μπορούμε να ανακτήσουμε την f γνωρίζοντας μόνο τις τιμές $f(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη: Από πριν, ξέρω:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \notin (0, 1) \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k x}, & \forall x \in (0, 1) \end{cases}$$

Αυτή διατηρείται κατάλληλη και γενικά για $\text{supp } \hat{f}$ φραγμένο, κάνοντας κατάλληλο rescaling στο $\mathbb{R}$.

Άρα, αν γνωρίζουμε τα $f(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, έχουμε έναν πλήρη τύπο για τον $\hat{f}$ (σε όλο το $\mathbb{R}$).

Από τύπο αντιστροφής, αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \Rightarrow \text{γνωρίζουμε και ενν } f. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 2: Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με $\text{supp } \hat{f} \subseteq (0, \frac{1}{2})$ ($f \neq 0$).

Τότε, η f δεν έχει ουμπάκη φορέα.

Απόδειξη: Έστω για άτοπο να $\exists N \in \mathbb{N}$: $f \equiv 0$ εκτός του $[-N, N]$.

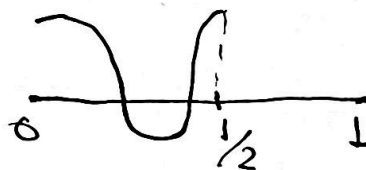
το ίδιο προκύπτει οπούδήποτε $\text{supp } \hat{f}$ φραγμένο (και πάλι με κατάλληλο rescaling).

Αφού $\text{supp } \hat{f} \subseteq (0, 1)$, ξέρουμε:

$$\hat{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{-2\pi i k x}, \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$= \sum_{k=-N}^N f(k) e^{-2\pi i k x}, \quad \forall x \in (0, 1), \text{ επιφ. προλ.}$$

$f=0$ εκτός του $[-N, N]$



Ισχυρισμός: εδω $p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x}$ τριγ. πολ.

Αν $\exists [\alpha, b]$ με $(\alpha < b)$, ώστε $p \equiv 0$ στο $[\alpha, b]$

Τότε $c_k = 0, \forall k = -N, \dots, N$.

Απόδ.: $p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x} = \left(\sum_{k=0}^{2N} c_{k-N} (e^{2\pi i x})^k \right) \cdot \underbrace{e^{(2\pi i x)(-N)}}_{\substack{* \\ 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}}}$

ορίσω $g(z) = \sum_{k=0}^{2N} c_{k-N} \cdot z^k$, έχω απειρες
μηγαδικές ρίζες, άτοπα

Εμείς έχουμε:

$$\sum_{k=-N}^N f(k) e^{-2\pi i k x} = 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

$$\hat{f}(x), \forall x \in (0, 1)$$

Άρα, $f(k) = 0, \forall k = -N, \dots, N$.

Άρα $\hat{f}|_{(0,1)} \equiv 0$, αλλά και $\hat{f} = 0$ εκτός του $(0,1)$.

$$\text{Άρα } \hat{f} = 0 \implies f = 0.$$

↓
ώνος αναστροφής
($f \in S(\mathbb{R})$)

Ασκήσεις: (1) $f = \chi_{[-1,1]}$. N.D.O. $\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, & \xi \neq 0 \\ 2, & \xi = 0. \end{cases}$

β) Υπολογίστε $\int_{\xi \neq 0} \left| \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \right|^2 d\xi$.

Λύση:

(α) Για $\xi = 0$, $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int \chi_{[-1,1]}(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$.

Για $\xi \neq 0$, $\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx =$
 $= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{-2\pi i \xi} \left[e^{-2\pi i \xi x} \right]_{-1}^1 =$
 $= \frac{e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} =$
 $= \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$.

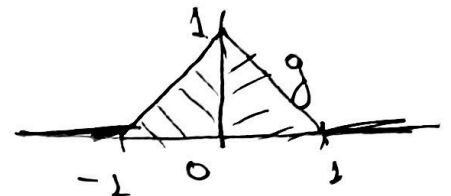
(β) $\|\hat{f}(\xi)\|_2^2 = \|f(x)\|_2^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2$ (Plancherel)

(2) α) $g(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

β) Βρείτε τον $\hat{g}$, υπολογίστε $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx$.

γ) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, υπολογίστε $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}$.

$$(a) \hat{g}(0) = \int g(x) d\lambda(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1$$



$$\forall \xi \neq 0, \hat{g}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \xi x} \cdot (1 - |x|) dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^1 \cos(2\pi \cdot \xi x) (1 - |x|) dx}_{\text{αρα.}} + i \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(2\pi \cdot \xi x) \cdot (1 - |x|) dx}_{\pi \epsilon \rho \iota \tau \tau \eta'}$$

$$= 2 \int_0^1 \cos(2\pi \xi x) (1 - x) dx = \frac{2}{2\pi \xi} \int_0^1 (\sin(2\pi \xi x))' (1 - x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi \xi} \cdot \left[\sin(2\pi \xi x) \cdot (1 - x) \right]_0^1 + \frac{1}{\pi \xi} \int_0^1 \sin(2\pi \xi x) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 \xi^2} \left[\cos(2\pi \xi x) \right]_0^1 = -\frac{1}{2\pi^2 \xi^2} (\cos(2\pi \xi) - 1) =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\pi \xi)}{2\pi^2 \xi^2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2(\pi \xi))}{2\pi^2 \xi^2} = \left(\frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} \right)^2.$$

(b) Ξ έρουμε: $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} \right|^4 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi =$

Plancherel $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 (1-|x|)^2 = \dots = \frac{2}{3}.$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} \right)^4 d\xi = \frac{1}{3}$ (αριθ. συνάρτησης).

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 \frac{dx}{\pi} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^4}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}.$
 $\pi \xi = x$
 $d\xi = \frac{1}{\pi} \cdot x$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, υπολογίστε το $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2}.$

Λύση: Poisson $\leadsto$ $16x$ $\leadsto$ $\text{reducs } g \in C_c(\mathbb{R}), \text{ Lipschitz-convexis.}$
 $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\sin^2(\pi k)}{(\pi k)^2} + L = 1 \right)$
 όχι πάλι
 χρησιμο.

Ορίζουμε $f(x) = e^{-2\pi i x} g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi + \alpha), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Από Poisson: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \stackrel{\substack{f(x)=0 \\ \text{εκτός του } (-1,1)}}{=} f(0) = g(0) = 1$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k + \alpha) =$$

$$\sin^2(\pi k + \pi \alpha) = \sin^2(\pi \alpha), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi k + \pi \alpha)}{(\pi(k + \alpha))^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi \alpha)}{\pi^2(k + \alpha)^2}.$$

$$\text{Άρα } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi \alpha)}{\pi^2(k + \alpha)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi \alpha)}.$$

Στην επόμενη άσκηση, επεκτείνουμε σε όλο τον L^2 χώρο που μέχρι τώρα γέρούμε για συναρτήσεις Schwartz:

(3) N.S.O.: (α) $\forall f \in L^2, \hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi) \lambda^{-\sigma \cdot \pi}$.

(β) $\forall f, g \in L^2, \int f(x) \cdot g(x) d\lambda(x) = \int \hat{f}(\xi) \hat{g}(-\xi) d\lambda(\xi)$

και $\int f(x) g(-x) d\lambda(x) = \int \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\lambda(\xi)$.

(γ) $\forall f, g \in L^2, \int f \cdot \hat{g} = \int \hat{f} \cdot g$.

(δ) $\forall f \in L^2, g(x) = f(x + x_0), \forall x \in \mathbb{R}^n$ (x_0 φ)ξαφ(β+ε)ρ)
 $\Rightarrow \hat{g}(\xi) = e^{2\pi i \langle x_0, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \lambda^{-\sigma \cdot \pi}$.

(ε) $\forall f \in L^1, g \in L^2, \text{ τότε } \hat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \lambda^{-\sigma \cdot \pi}$

Λύση:

(α) έστω $f \in L^2 \Rightarrow \exists (f_n)_n$ στο $S(\mathbb{R}^n): f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

$\Rightarrow \hat{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \hat{f} \Rightarrow \hat{f}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \hat{\hat{f}} \quad \text{Όπως:}$

ισχύει α
στον L^2 .

$\hat{\hat{f}}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f_n(-\cdot) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f(-\cdot)$

$\downarrow$
 f_n Schwartz

Από ισότητα ορίων, $\hat{\hat{f}} = f(-\cdot)$ στο $L^2 (\lambda^{-\sigma \cdot \pi})$.

(β) ορίσω $h(x) = \overline{g(x)} \forall x \in \mathbb{R}^n$

ξέρω $f, h \in L^2 \xrightarrow{\text{Plancherel}} \int f(x) \cdot \underbrace{\overline{h(x)}}_{\hat{g}'(x)} d\lambda(x) =$

$= \int \hat{f}(\xi) \hat{h}(\xi) d\lambda(\xi)$.

Av $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τότε θα ισχύει (καθώς $\widehat{\bar{g}}(\xi) = \widehat{g}(-\xi)$).

Av όχι, $\exists (h_n)_n$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $h_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} h \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{h}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{h} \Rightarrow \widehat{\widehat{h}_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{\widehat{h}} \Rightarrow \widehat{\widehat{g}_n(-\cdot)}$$

$$\Rightarrow \widehat{\widehat{h}} = \widehat{g}(-\cdot)$$

$$(d) \int \widehat{f} g \xrightarrow[\text{and (a)}]{g = \widehat{\widehat{g}(-\cdot)}} \int \widehat{f}(\xi) \widehat{\widehat{g}(-\xi)} d\xi \xrightarrow[\text{and (b)}]{\text{and (a)}} \int \widehat{f}(\xi) \widehat{\widehat{g}(-\xi)} d\xi$$

$$= \int f(x) \widehat{g}(x) d\lambda(x)$$

(e) $\exists (f_n)_n$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n(\cdot + x_0) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f(\cdot + x_0)$$

$$\xRightarrow{\text{ισομερία}} \widehat{f_n(\cdot + x_0)} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{f(\cdot + x_0)}$$

$$\xRightarrow{\text{Schartz}} e^{2\pi i \langle x_0, \cdot \rangle} \widehat{f_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} e^{2\pi i \langle x_0, \cdot \rangle} \widehat{f} \quad \left. \vphantom{\widehat{f_n}} \right\} \Rightarrow \text{ισα όρια}$$

$$(e) \text{ ξέρω: } \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_2.$$

$\nearrow$ $\leftarrow$ $\langle x_0, \cdot \rangle$ άρα $f * g \in L^2$.

αφού $g \in L^2$, $\exists (g_n)_n$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$$

Αφού $f, g_n \in L^1$: $\widehat{f * g_n} = \widehat{f} \cdot \widehat{g_n}$ (το έχουμε δείξει
για συναρτήσεις
στον L^1)

$$\text{Ολο } \widehat{f * g_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{f * g}, \text{ ενώ } \widehat{f} \cdot \widehat{g_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

• Αρκεί: $\underbrace{f * g_n}_{\in L^2} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \underbrace{f * g}_{\in L^2}$, καθώς $\underbrace{\widehat{f * g_n}}_{\substack{\text{ισομ. σκω} \\ L^2}} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{f * g}$. Και όμως:

$$\|f * g_n - f * g\|_2 = \|f * (g - g_n)\|_2 \leq \|f\|_1 \|g - g_n\|_2 \xrightarrow{\downarrow 0} 0.$$

• Αρκεί $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g \Rightarrow \widehat{g_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{g}$. Άρα,

$$\|\widehat{f} \cdot \widehat{g_n} - \widehat{f} \cdot \widehat{g}\|_2 = \|\widehat{f}(\widehat{g_n} - \widehat{g})\|_2 \leq \underbrace{\sup |\widehat{f}|}_{< +\infty} \cdot \|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

αρκεί $f \in L^1 \Rightarrow \widehat{f}$ φραγμένος ($\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$)
($\widehat{f}$ συνεχής και $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$ ως $|x| \rightarrow \infty$). Άρα: $\widehat{f} \cdot \widehat{g_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

$$\text{Άρα } f * g = \widehat{f} \cdot \widehat{g} \text{ λ.σ.π.}$$

④ Χρησιμοποιούμε ότι $\forall f \in L^1, g \in L^2: f * g = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ λ.σ.π.
για ν.δ.ο. $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.

Πομπή: Plancherel $\|f * g\|_2 \xrightarrow{\text{Plancherel}} \|\widehat{f * g}\|_2 = \|\widehat{f} \cdot \widehat{g}\|_2 \leq$
 $\underbrace{\sup |\widehat{f}|}_{< +\infty} \cdot \|\widehat{g}\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2.$

$$\left(\forall \xi \in \mathbb{R}^n: |\widehat{f}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) d\lambda(x) \right| \leq \int |e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)| d\lambda(x) \leq \|f\|_1 \right)$$

($f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ convex, v.a. $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, $\hat{f}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$)

⑤ Es sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\hat{f}(\xi) = 0, \forall \xi \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$

v.S.o. $\|f'\|_2 \leq \|f\|_2$.

Wort:

$$\|f'\|_2 \stackrel{f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}{=} \|\hat{f}'\|_2 = \left[\int |\hat{f}'(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} (2\pi i \xi)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{-\frac{1}{10}}^{\frac{1}{10}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\stackrel{10}{\leq} 4\pi^2 \xi^2 \leq 4\pi^2 \cdot \frac{1}{100} < 1$$

$$\leq \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$