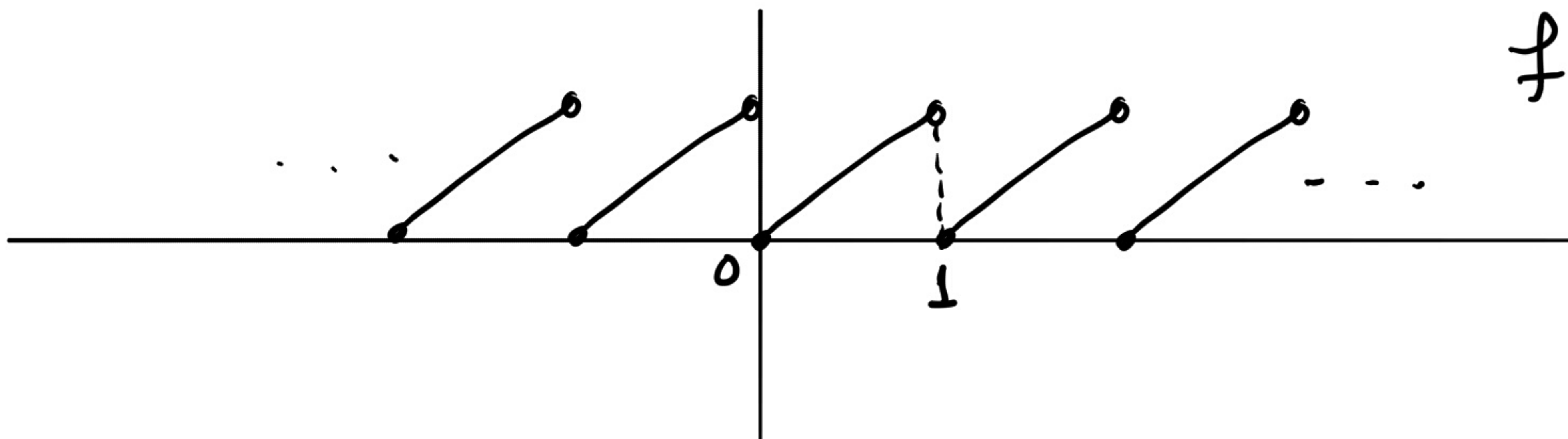


→ Άσκηση: Έστω η 1-περιοδική $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, με $f(x) = x \quad \forall x \in (0, 1)$.

Βρείτε με τι ισχύει η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ συνεχής συνάρτηση (ως προς x);

Λύση: Η f έχει το εξής γράφημα:



Συμβολίζουμε $Sf(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Η Sf είναι 1-περιοδική. Άρα, αρκεί να βρούμε τον τώνο της στο $[0,1)$.

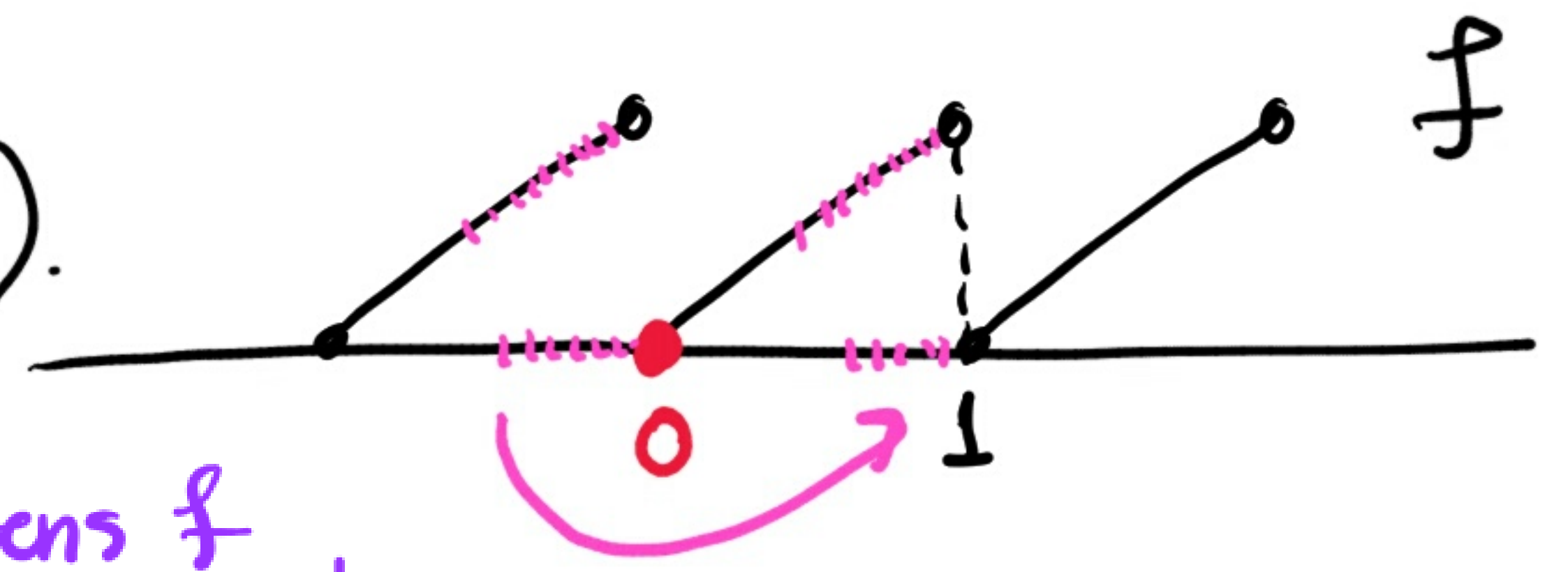
- Σε κάθε $x \in (0,1)$, η f είναι παραγωγίσιμη. Άρα,

$$Sf(x) = x, \quad \forall x \in (0,1).$$

- Μένει να βρούμε το $Sf(0)$.

Παρατηρούμε ότι $f \in C$ τα $f^+(x_0), f^-(x_0), df^+(x_0), df^-(x_0)$:

$$\bullet f^+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{"} \\ x \\ \text{στο } (0,1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad (\in \mathbb{C}).$$



ο $\lim_{x \rightarrow 1^-} x+1$ απεργει του 0 = 1

$$\bullet f^-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \stackrel{\substack{\rightarrow 1 := \\ f \text{ 1-ner.}}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{"} \\ x \\ \text{στο } (0,1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \quad (\in \mathbb{C}).$$

$$\bullet df^+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f^+(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad (\in \mathbb{C})$$

- $df^-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f^-(0)}{x - 0} =$

$f(x) = x + 1$
αριστερά του 0

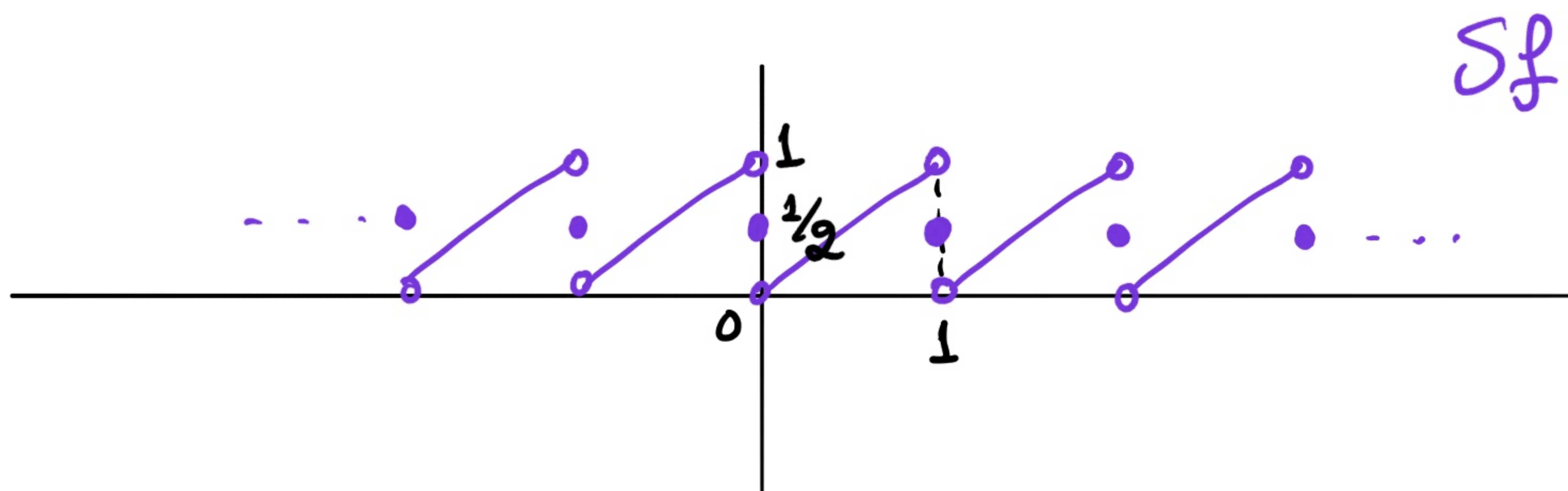
$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1) - 1}{x} = 1 \quad (\in \mathbb{C})$$

Άρα, $Sf(0) = \frac{f^+(0) + f^-(0)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$

Άρα, η $Sf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι η 1-οριστική συνάρτηση
με

$$Sf(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$$

Η S_f έχει ποιοτικό γράφημα:



Βλέπουμε πως $S_f \notin C(\mathbb{T})$.



→ Άσκηση: Έστω η 1-περιοδική $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, με $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0, 1)$.

Βρείτε με τι ισούται η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ συνεχής συνάρτηση (ως προς x);

! $\rightarrow$ Θεώρημα Dini (γενική μορφή): Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική,
 με $\int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι, για κάποιον

$a \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι

$$\int_0^{1/2} \left| \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - a \right| \cdot \frac{1}{t} d\lambda(t) < +\infty.$$

Τότε,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = a.$$

⚠ And as αποδείξεις των ανήλων μορφών του Θ. Dini που έχουμε δει, προκύπτει ότι: αν η f είναι δεξιά και αριστερά Lipschitz συνεχής στο x_0 , τότε

$$\int_0^{1/2} \left| \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \right| \cdot \frac{1}{t} dt < +\infty.$$

Άρα, οι ανήλες μορφές του Θ. Dini που έχουμε δει προκύπτουν and en γενική μορφή.

Απόδ. Θεωρήματος: Έστω $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$S_N(f; x_0) - a = f * D_N(x_0) - a = \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) - a =$$

$$= \int_0^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) + \underbrace{\int_{-1/2}^0 f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y)}_{-y := u} - a$$

$$= \int_0^{1/2} f(x_0 - y) D_N(y) d\lambda(y) + \int_0^{1/2} f(x_0 + y) D_N(y) d\lambda(y) - a$$

$$= \int_0^{1/2} [f(x_0+y) + f(x_0-y)] D_N(y) d\lambda(y) - a \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_0^{1/2} D_N(y) d\lambda(y)}_{=1/2}$$

$$= 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{f(x_0+y) + f(x_0-y)}{2} - a \right] \cdot \frac{1}{\sin(\pi y)} \cdot \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y)$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} g_{x_0}(y) \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y)}_{=: I_N},$$

δνου

$$g_{x_0}(y) := \begin{cases} \left[\frac{f(x_0+y) + f(x_0-y)}{2} - a \right] \cdot \frac{1}{\sin(\pi y)} & , 0 < y < \frac{1}{2} , \\ 0 & , -\frac{1}{2} \leq y \leq 0 . \end{cases}$$

Παράμοια με τις αυτές μορφές του Θ. Dini, δείχνουμε ότι

$g_{x_0} \in L^1(\pi)$ (πάλι χρησιμοποιούμε ότι, για μικρά $y > 0$,
 $\sin(\pi y) \sim \pi y$).

Άρα, $I_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Άρα, $S_N(f; x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a$. ■

Προκύπτει άμεσα το παρακάτω:

! → Θεώρημα τωναύτητας του Riemann: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περι-
οδική, με $\int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty$.

Έστω ότι $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$,

όπου το I είναι κάποιο ανοιχτό διάστημα.

Τότε, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = 0 \quad \forall x \in I$.

Απόδ: $f|_I$ παραγωγίσιμη $\xrightarrow{\text{Θ. Dini}}$ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = f(x) = 0 \quad \forall x \in I$.
■



Παρά το Θεώρημα τοπικότητας του Riemann αποδεικνύεται
τόσο εύκολα (δεδομένου του Θ. Dini), φαίνεται παράδοξο:

η f παίρνει ό,τι τιμές θέλει στο $[0,1) \setminus I$,

και αυτό επηρεάζει τον ορισμό κάθε συντελεστή Fourier

$$\hat{f}(k) \quad \left(= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \right).$$

Όμως, η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, για κάθε $x \in I$, δεν
επηρεάζεται από αυτές τις τιμές (επ. f εκτός του I).

→ Για να ισχύει ότι

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = f(x_0) \quad (*)$$

σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, δεν αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0

(υπάρχουν αντεπαδείγματα!). Το Θ. Dini έχει κάποια

έγγρα υπόθεση ομαλότητας της f στο x_0 , για να εξασφαλίσει την (*).

Δηλαδή, εν γένει, είναι δύσκολο η f να είναι συνεχής στο

x_0 , αλλά να ισχύει ότι

$$S_N(f; x_0) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} f(x_0).$$

Όμως, ίσως οι μέσοι όροι των $s_N(f; x_0)$ να συμπεριφέρονται καλύτερα. Και πράγματι, θα δούμε πως, αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε

$$\frac{s_0(f; x_0) + \dots + s_{N-1}(f; x_0)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

ο μέσος όρος των πρώτων N μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f

(Θεώρημα του Fejér).

Αυτοί οι μέσοι όροι της σειράς Fourier λέγονται οι Cesàro μέσοι της.

→ Ορισμός: Έστω σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ ή $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$.

Έστω $s_N := a_0 + a_1 + \dots + a_N$ και $s_N := \sum_{k=-N}^N a_k$ (Περίπτωση 2)
(Περίπτωση 1)

ω N -οστό μερικό άθροισμα της σειράς, $\forall N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ο N -οστός Cesàro μέσος της σειράς είναι ο μέσος όρος

$$\sigma_N := \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1}}{N}$$

των πρώτων N μερικών αθροισμάτων της σειράς, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει κατά Cesàro** σε κάποιο s όταν:

$$\sigma_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} s .$$



Φυσικά, αν $s_N \rightarrow s$, τότε και $\sigma_N \rightarrow s$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: είναι πιο εύκολο για τους μέσους όρους των μερικών αθροισμάτων να έχουν όριο, από το να έχουν τα ίδια τα μερικά αθροίσματα (καθώς οι μέσοι όροι γενικώς έχουν πιο εξομαλυσμένη συμπεριφορά)

→ Παράδειγμα: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο $\frac{1}{2}$.

Πράγματι: $s_0 = 1$,

$$s_1 = 1 + (-1) = 0,$$

$$s_2 = s_1 + 1 = 1,$$

$$s_3 = s_2 + (-1) = 0, \text{ κ.κ.}$$

$$\Rightarrow s_N = \begin{cases} 1, & N \text{ άρτιος} \\ 0, & N \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Αρα, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_N = \frac{s_0 + \dots + s_{N-1}}{N} = \begin{cases} \frac{1+0+1+0+\dots+1+0}{N} = \frac{1}{2}, & N \text{ άρτιος} \\ \frac{1+0+1+0+\dots+1+0+1}{N} = \frac{\frac{N-1}{2} + 1}{N}, & N \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & N \text{ άρτιος} \\ \frac{N+1}{2N}, & N \text{ περιττός} \end{cases} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Νε βάση των ορισμών της κατά Cesàro αλφοειμότητας, αν $f \in L^1(\mathbb{T})$,

τότε η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ συγκλίνει κατά Cesàro σε κάποιο S

αν τα

$$\sigma_N(f; x_0) := \frac{S_0(f; x_0) + \dots + S_{N-1}(f; x_0)}{N}$$

έχουν όριο S (καθώς ο $\sigma_N(f; x_0)$ είναι ο μέσος όρος των

πρώτων N μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, $\forall N \in \mathbb{N}$).



Θεώρημα του Fejér

: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{(0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

(i) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ τα $f^+(x_0)$, $f^-(x_0)$, τότε

$$\sigma_N(f; x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2}.$$

(ii) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε

$$\sigma_N(f; x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x_0).$$

(iii) Αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε

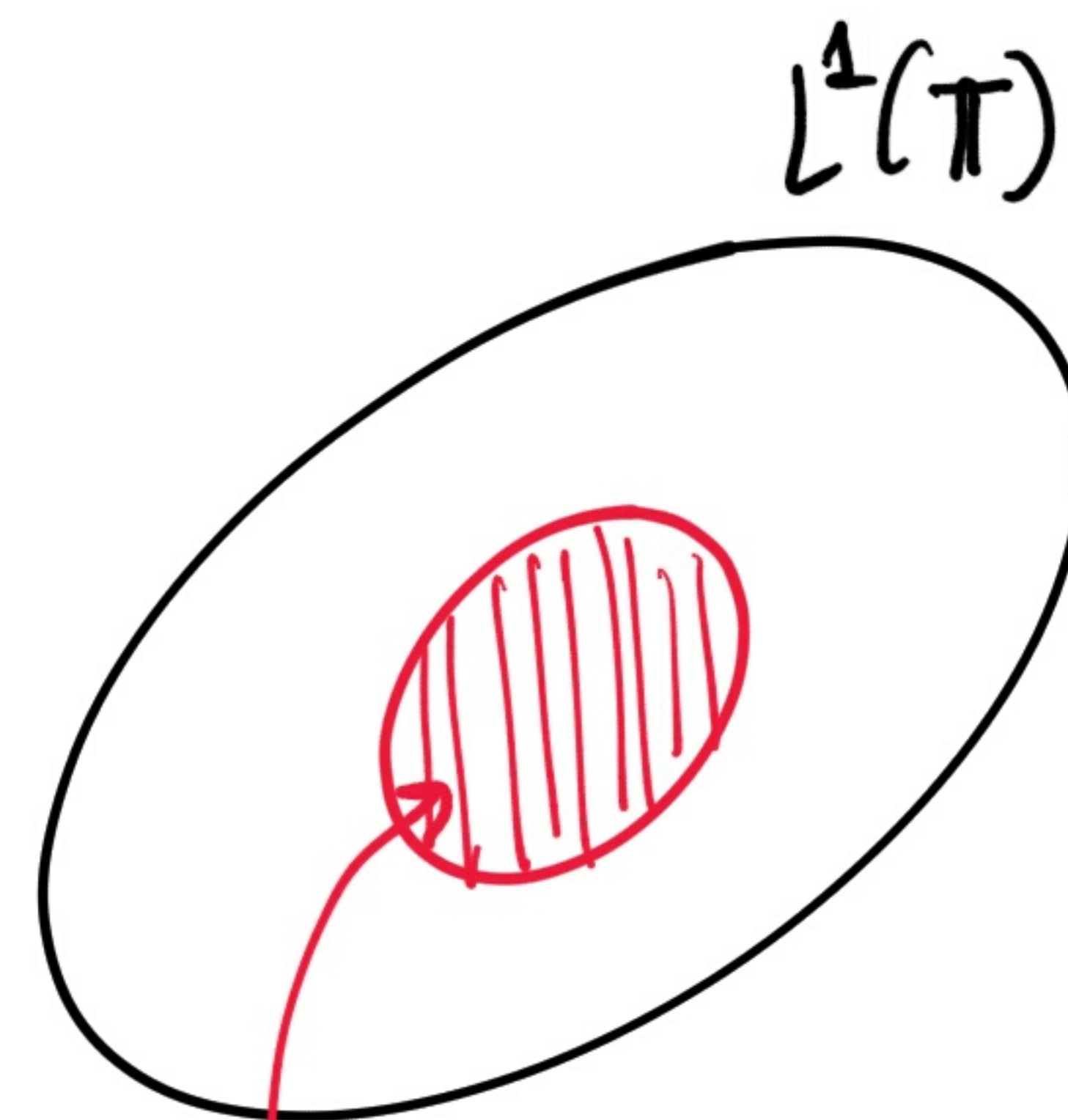
$$\| \sigma_N(f; \cdot) - f \|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

(iv) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\| \sigma_N(f; \cdot) - f \|_{L^1(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

(v) Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, για κάποιο $1 < p < +\infty$, τότε

$$\| \sigma_N(f; \cdot) - f \|_{L^p(\mathbb{T})} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$



$L^p(\mathbb{T}), p > 1$

→ η f είναι πιο "εξοδικομένη"

μεγαλύτερη από την $\| \sigma_N(f; \cdot) - f \|_{L^1(\mathbb{T})}$, άρα ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Fejér παδιακά. Το μυστικό είναι ότι, όπως έχουμε δει

$$s_N(f; x) = f * D_N(x), \text{ όπου } D_N \text{ ο πυρήνας του Dirichlet,}$$

έτσι ισχύει και ότι

$$s_N(f; x) = f * F_N(x), \text{ όπου } F_N \text{ ένας αλθός πυρήνας,}$$

ο πυρήνας του Fejér, με

καλύτερες ιδιότητες από τον πυρήνα του Dirichlet.

→ Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_{[0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

Παρατηρούμε ότι, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_N(f; x) = \frac{s_0(f; x) + s_1(f; x) + \dots + s_{N-1}(f; x)}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot (f * D_0(x) + \dots + f * D_{N-1}(x))$$

$$= f * \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n \right)}_{=: F_N}(x).$$

Επομένως, ορίζουμε, $\forall N \in \mathbb{N}$, τον **πυρήνα** F_N του Fejér στο N
ως εξής: $F_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\text{με} \quad F_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$

→ Παρατήρηση: $\forall N \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι:

- F_N τριγωνομετρικό πολυώνυμο (ως γραμμικός συνδυασμός των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $D_0, \dots, D_{N-1}$).
- $F_N \in C(\mathbb{T})$ (ως τριγ. πολυώνυμο).
- F_N άρτια (αφού κάθε $D_0, \dots, D_{N-1}$ είναι άρτια).

$$\odot \int_{[0,1)} F_N d\lambda = 1$$

$$\begin{aligned} \left(\int_{[0,1)} F_N d\lambda &= \int_{[0,1)} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n \right) d\lambda \right. \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\int_{[0,1)} D_n d\lambda}_{=1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{1}{N} \cdot N = 1 \left. \right). \end{aligned}$$

$$\odot F_N \geq 0 ! \quad \text{Μάλλον,}$$

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(N\pi x)}{N \sin^2(\pi x)} & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ N & , \quad x \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$



Η τελευταία ιδιότητα δεν είναι καθόλου προφανής : ένας γραμμικός συνδυασμός τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και άρα εν γένει παίρνει και μιγαδικές τιμές. Εδώ, ο

$$f_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$$

δχι μόνο παίρνει αποκλειστικά πραγματικές τιμές, αλλά είναι και όλες ≥ 0 .

Απόδ: Αποδεικνύουμε τον κλειστό τύπο για τον F_N :

Έστω $x \in \mathbb{R}$.

• Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε
$$F_N(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{D_n(x)}_{2n+1}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(2 \sum_{n=0}^{N-1} n + \sum_{n=0}^{N-1} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\cancel{2} \cdot \frac{[0 + (N-1)] \cdot N}{\cancel{2}} + N \right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left(\underbrace{(N-1)N + N}_{N[(N-1)+1] = N^2} \right) = N.$$

• $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= \frac{1}{N \cdot \sin(\pi x)} \cdot \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{e^{(2n+1)\pi i x}}_{e^{n\pi i x} \cdot (e^{2\pi i x})^n} \right)$$

$$= \frac{1}{N \cdot \sin(\pi x)} \cdot \operatorname{Im} \left(e^{n\pi i x} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} (e^{2\pi i x})^n}_{\frac{(e^{2\pi i x})^N - 1}{e^{2\pi i x} - 1}} \right)$$

$$= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \cdot \operatorname{Im} \left(e^{\pi i x} \cdot \frac{(e^{2\pi i x})^N - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \cdot \operatorname{Im} \left(\cancel{e^{\pi i x}} \cdot \frac{e^{\pi i N x}}{\cancel{e^{\pi i x}}} \cdot \frac{e^{\pi i N x} - e^{-\pi i N x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \right)$$

$$= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \cdot \operatorname{Im} \left(e^{\pi i N x} \cdot \frac{\cancel{2i} \sin(\pi N x)}{\cancel{2i} \sin(\pi x)} \right)$$

$$= \frac{1}{N \sin(\pi x)} \cdot \frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \cdot \underbrace{\operatorname{Im}(e^{i N \pi x})}_{= \sin(N\pi x)} = \frac{\sin^2(N\pi x)}{N \sin(\pi x)}$$



Η ιδιότητα του F_N σημαίνει πως, ενώ

$$\int_{[0,1)} D_N d\lambda = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \text{αλλά} \quad \int_{[0,1)} |D_N| d\lambda \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

για τους F_N έχουμε πολύ καλύτερη συμπεριφορά:

$$\int_{[0,1)} F_N d\lambda = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \text{και} \quad \int_{[0,1)} |F_N| d\lambda = \int_{[0,1)} F_N d\lambda = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Η αυτιά το λέει και $\sigma_N(f; x) = f * F_N(x)$ συμπεριφέρονται

πολύ καλύτερα and και $s_N(f; x) = f * D_N(x)$, καθώς $N \rightarrow +\infty$.

! → Μια ακριβή ιδιότητα του f_N :

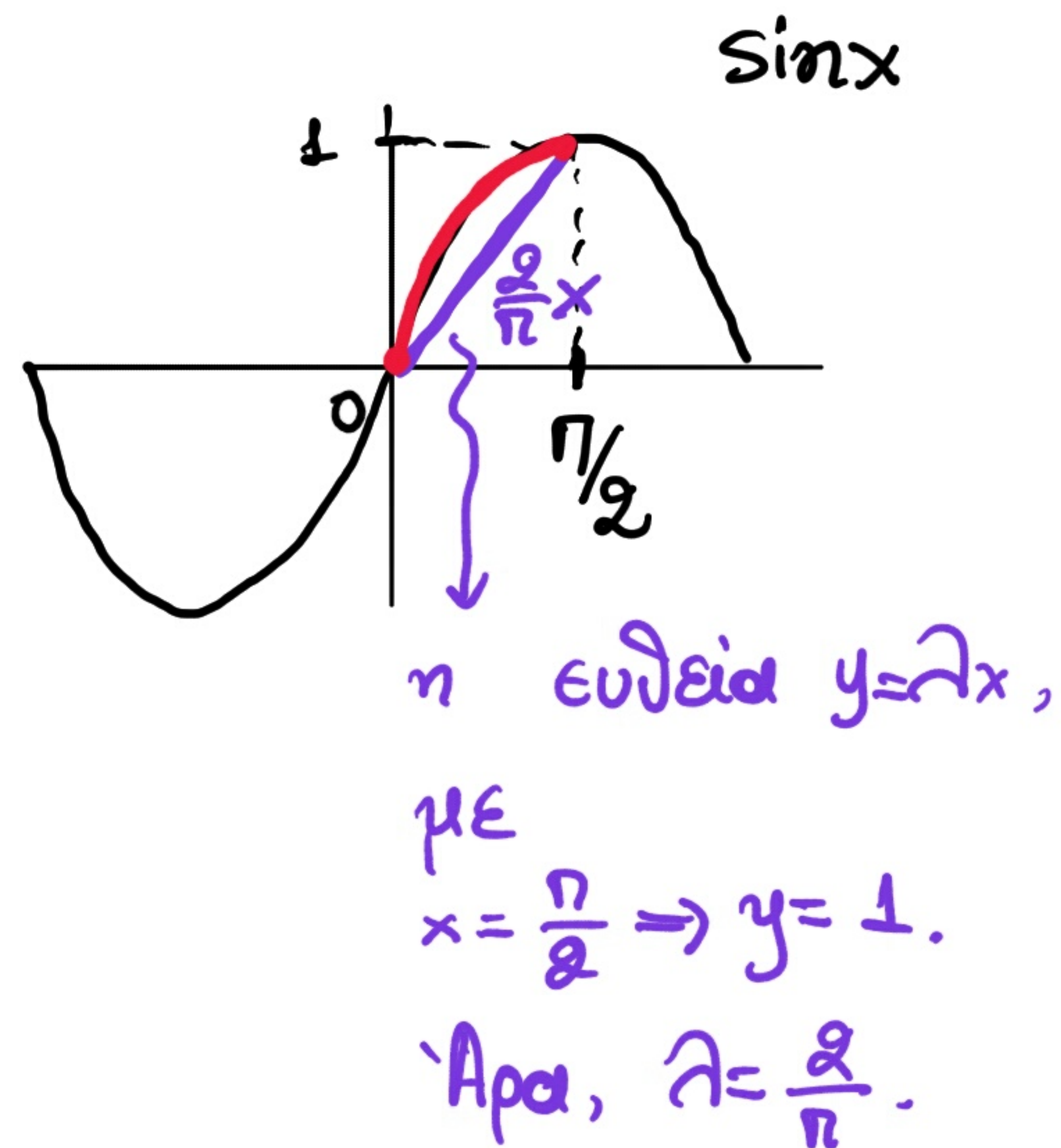
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi} \cdot x.$$

$$\text{Άρα, } \forall y \in (0, \frac{1}{2}), \quad \sin(\pi y) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \pi y \geq y.$$

$$\text{Επομένως, } \forall x \in (0, \frac{1}{2}),$$

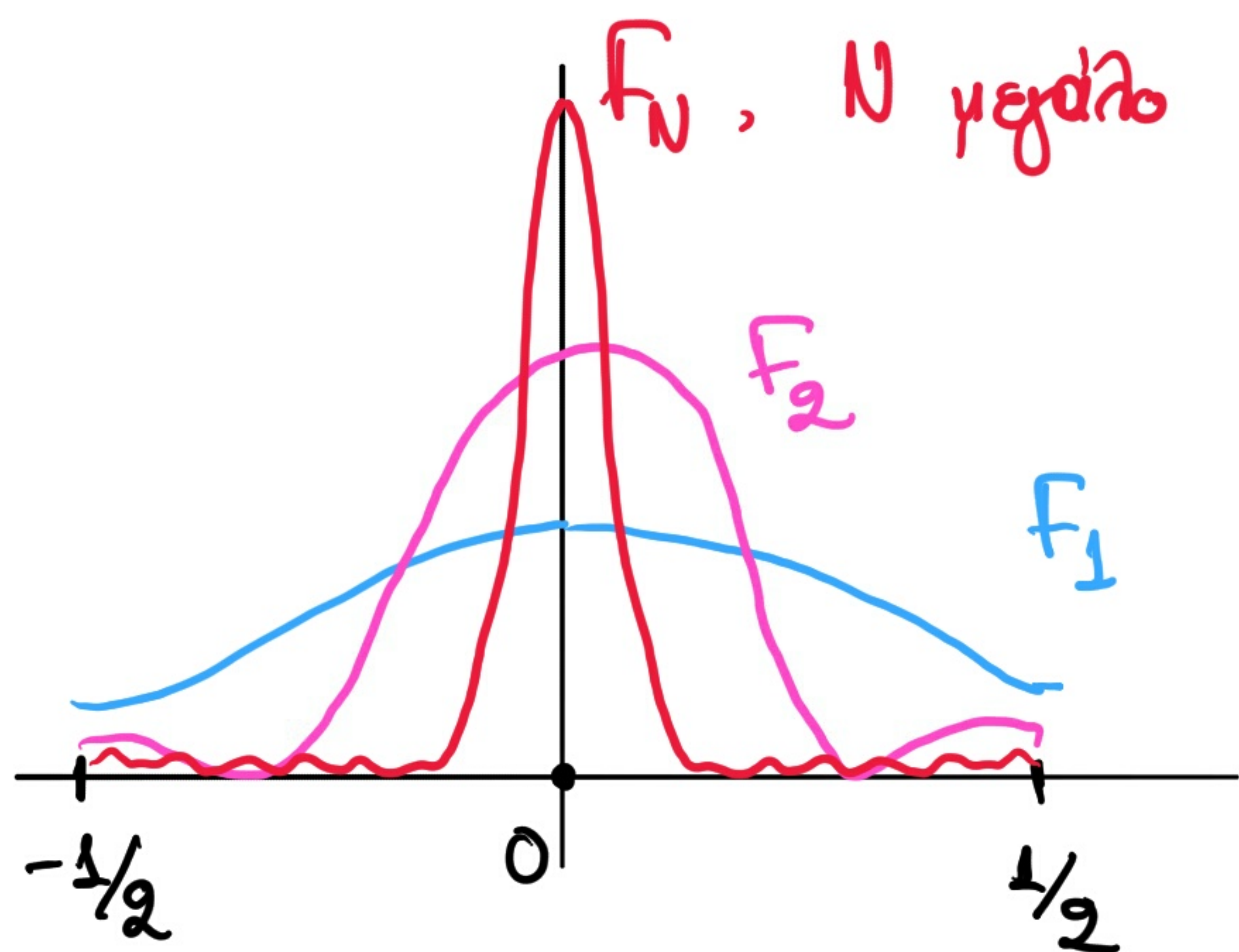
$$f_N(x) = \frac{\overbrace{\sin^2(N\pi x)}^{\leq 1}}{N \underbrace{\sin^2(\pi x)}_{\geq x^2}} \leq \frac{1}{Nx^2}.$$

Αφού η f_N είναι άρτια, έχουμε:





$$f_N(x) \begin{cases} = N, & x=0 \\ \leq \frac{1}{N x^2}, & \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\} \end{cases}$$



Δηλ., όσο το N μεγαλώνει, τόσο η μάζα $\downarrow$ κάτω από το γράφημα της $f_N (\geq 0)$ στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ αναδιαιτάσσεται, ώστε να συγκεντρώνεται όλο και περισσότερο γύρω από το 0. Αυτό γίνεται ακριβές με το παρακάτω Πρόβλημα:

→ Πρόβλημα: Έστω $\delta > 0$. Τότε,

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f_N(x) d\lambda(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Απόδ.: $\int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f_N(x) d\lambda(x) \stackrel{\text{f}_N \text{ άρτια}}{=} 2 \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \underbrace{f_N(x)}_{\leq \frac{1}{Nx^2}} d\lambda(x)$

$$\leq 2 \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Nx^2} d\lambda(x) = \frac{1}{N} \cdot \left[2 \int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx \right]$$

$\stackrel{||}{=} A < +\infty :$

$$\int_{\delta}^{1/2} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_{\delta}^{1/2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\delta}^{1/2} = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} < +\infty.$$

Άρα,
$$\int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} f_N(x) d\lambda(x) \leq \frac{A}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Θα αποδείξουμε κάποιους από τους ισχυρισμούς του Θεωρήματος του Fejér όχι μόνο για τα $s_N(f; \cdot) = f * F_N$,

αλλά για συνεπίξεις $f * K_N$ της f με πολύ πιο γενικούς πυρήνες K_N , για τους οποίους ισχύουν κάποιες από

ως παραπάνω ιδιότητες του f_N .

Ας δούμε πρώτα ένα μοντέλο του προβλήματος, που μας δίνει μια διαίσθηση για το ότι, στο περὶ του,

$f \neq f_N(x_0)$ " " μέσος όρος της f :
πολύ κοντά στο x_0

→ Μοντέλο του προβλήματος: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, με $\int_0^1 |f| d\lambda < +\infty$.

$\forall N \geq 2$, ορίζουμε $\phi_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ την 1-περιοδική συνάρτηση, η οποία στο $[-1/2, 1/2)$ παίρνει τις εξής τιμές:

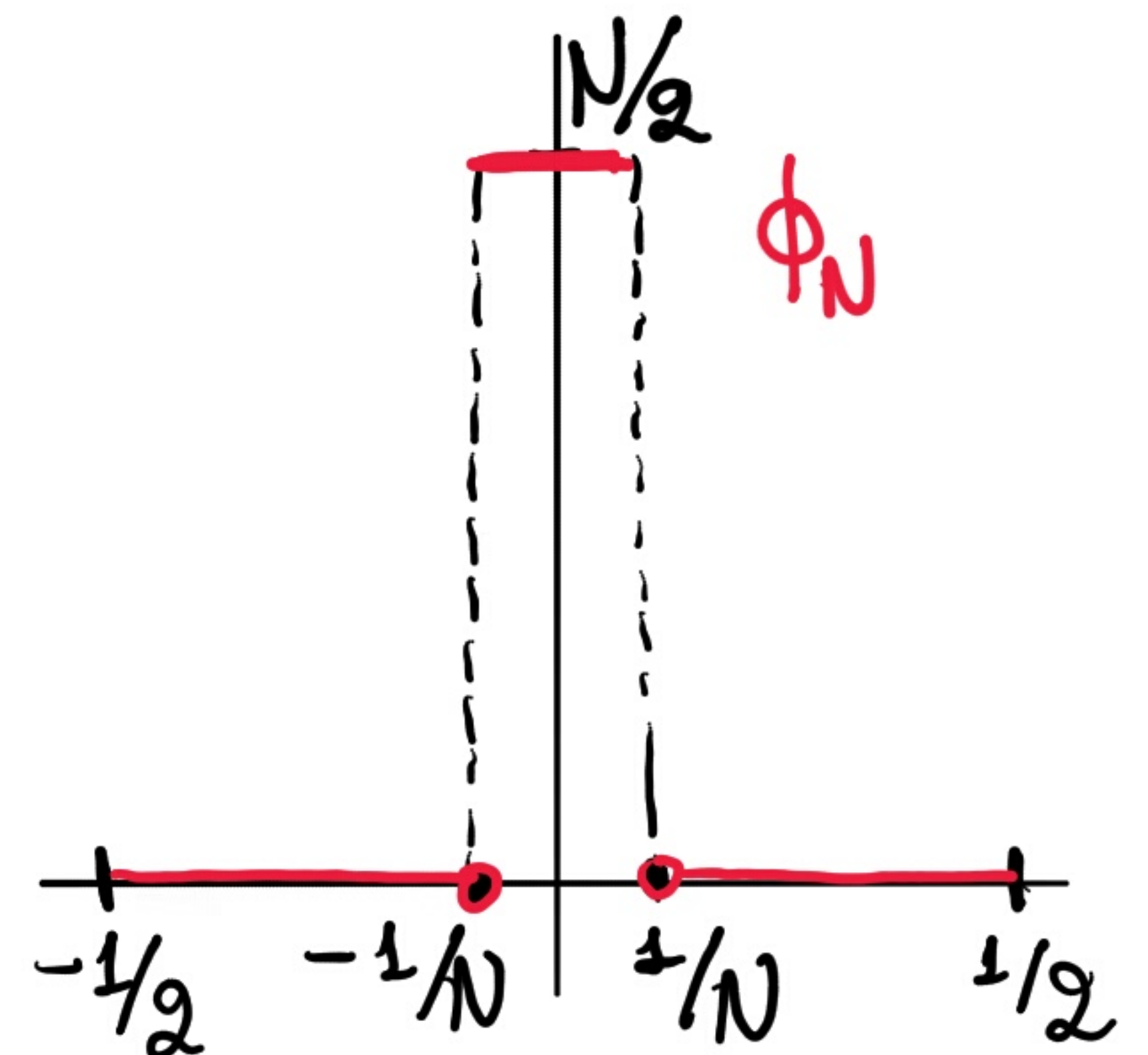
$$\phi_N(x) = \begin{cases} N/2, & x \in [-1/N, 1/N] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \frac{N}{2} \cdot \chi_{[-1/N, 1/N]}(x).$$

Όπως για τον πυρήνα του Fejér f_N ,

- ϕ_N άρτια και ≥ 0

- $\int_{[-1/2, 1/2]} \phi_N d\lambda = 1$

- $\forall 0 < \delta < \frac{1}{2}, \int_{\delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}} \phi_N(x) d\lambda(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$



$$\text{και, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underline{f * \phi_N}(x) = \int_{[-1/2, 1/2]} f(x-y) \phi_N(y) d\lambda(y)$$

$$= \int_{[-1/2, 1/2]} f(x-y) \cdot \frac{N}{2} \chi_{[-1/N, 1/N]}(y) d\lambda(y)$$

$$= \frac{N}{2} \cdot \int_{-1/N}^{1/N} f(x-y) d\lambda(y) \quad \begin{array}{l} x-y=:u \\ \underline{d\lambda(y) = -d\lambda(u)} \end{array}$$

$$= \frac{N}{2} \cdot \int_{x-1/N}^{x+1/N} f(u) d\lambda(u) \quad \begin{array}{l} \underline{I_N := [x - \frac{1}{N}, x + \frac{1}{N}]} \\ \underline{\lambda(I_N) = 2/N} \end{array} \quad \frac{1}{\lambda(I_N)} \cdot \int_{I_N} f d\lambda.$$

Επομένως, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f * \phi_N(x_0) = 0 \quad \text{μέσος όρος της } f \text{ στο } [x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N}].$$

Άρα, αν η f είναι συνεχής στο x_0 , είναι εύκολο ΝΔΟ

$$f * \phi_N(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x_0).$$