

Τώρα αποδεικνύουμε το παρακάτω:

→ Πρόταση: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$, το $f * g(x)$ ορίζεται καλά για λ -σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, και

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Απόδειξη: Πρώτα $\Theta \Delta \Theta$ το $\int_0^1 f(x-y)g(y)d\lambda(y)$ ορίζεται καλά
για λ -σχεδόν κάθε $x \in [0,1)$. Η $f(x-\cdot)g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μετρή-
σιμη $\forall x \in \mathbb{R}$, άρα αρκεί $N \Delta \Theta$

$$\underbrace{\int_0^1 |f(x-y) \cdot g(y)| d\lambda(y)}_{\substack{= \\ H(x) \geq 0}} < +\infty \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν κάθε } x \in [0,1)$$

Άρα, αρκεί $N \Delta \Theta$ $\int_0^1 H(x) d\lambda(x) < +\infty$, δηλ. ότι

$$\int_{x \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} |f(x-y) \cdot g(y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) < +\infty.$$

Αυτό θα δίνει με το Θεώρημα Tonelli:

Ορίσουμε $\phi: [0,1) \times [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\phi(x,y) := f(x-y) g(y).$$

Η ϕ είναι μετρήσιμη, επειδή:

• Η $g: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη

$$\Rightarrow \eta \tilde{g}: [0,1)^2 \rightarrow \mathbb{C},$$

$\tilde{g}(x,y) := g(y) \quad \forall (x,y) \in [0,1)^2$, είναι μετρήσιμη (αληθές).

• If $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ is measurable

$$\Rightarrow \text{there exists } \tilde{f}: [0,1)^2 \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\tilde{f}(x,y) := f(x-y) \quad \forall (x,y) \in [0,1)^2,$$

is measurable (Fubini's theorem).

Therefore, $|f| \geq 0$ and measurable $\xRightarrow{\text{Tonelli}}$

$$\Rightarrow \int_{[0,1)^2} |f| d\lambda_2 = \int_{x \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} |f(x,y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{y \in [0,1)} \left(\int_{x \in [0,1)} \underbrace{|f(x-y)| \cdot |g(y)|}_{\text{"}} d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y \in [0,1]} |g(y)| \cdot \underbrace{\left(\int_{x \in [0,1]} |f(x-y)| d\lambda(x) \right)}_{\substack{= \\ \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}}} d\lambda(y) = \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \int_{y \in [0,1]} |g(y)| d\lambda(y) \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} < +\infty.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_{x \in [0,1]} \underbrace{\left(\int_{y \in [0,1]} |f(x-y)| |g(y)| d\lambda(y) \right)}_{= H(x) (\geq 0)} d\lambda(x) < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{y \in [0,1]} |f(x-y) \cdot g(y)| d\lambda(y) < +\infty \text{ για } \lambda\text{-σχεδόν} \\
\text{κάθε } x \in [0,1]$$

(όπως επιθυμούσαμε).

Άρα, η $f * g(x)$ ορίζεται καλά για λ -σχεδόν κάθε $x \in [0, 1)$.

Τώρα:

- $f * g(x+1) = f * g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} :$

$$f * g(x+1) = \int_0^1 \underbrace{f(x+1-y)}_{f(x-y)} g(y) d\lambda(y) = f * g(x).$$

Άρα, η $f * g$ είναι 1-περιοδική.

- $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}$:

$$\int_{x \in [0,1)} |f * g(x)| d\lambda(x) = \int_{x \in [0,1)} \left| \int_{y \in [0,1)} f(x-y) \cdot g(y) d\lambda(y) \right| d\lambda(x)$$

$$\leq \int_{x \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} |f(x-y)| \cdot |g(y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

and so by Tonelli's theorem

$$= \int_{y \in [0,1)} \left(\int_{x \in [0,1)} |f(x-y)| \cdot |g(y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y \in [0,1)} |g(y)| \cdot \left(\int_{x \in [0,1)} |f(x-y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}} \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

$\triangle$ Στο το βήμα της ανόδδειξης, δείξαμε και ότι, $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$, η

$$\phi: [0,1)^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi(x,y) = f(x-y)g(y)$$
 ανήκει στον $L^1([0,1)^2)$.

Boole's identities over $\mathbb{R}$: Έστω $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε:

$$\textcircled{1} \quad f * g(x) = \int_a^b f(x-y) g(y) d\lambda(y), \quad \forall a < b \text{ με } b-a=1.$$

$$\textcircled{2} \quad (f+g) * h = f * h + g * h.$$

$$\textcircled{3} \quad f * g = g * f.$$

$$\textcircled{4} \quad (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$\textcircled{5} \quad \int_{[0,1)} f * g d\lambda = \int_{[0,1)} f d\lambda \cdot \int_{[0,1)} g d\lambda.$$

Απόδειξη: $\textcircled{1}$ Άσκηση (από το βιβλίο).

$$\textcircled{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g) * h(x) = \int_0^1 (f+g)(x-y) h(y) d\lambda(y) =$$

$$= \int_0^1 [f(x-y) + g(x-y)] h(y) d\lambda(y)$$

$$= \int_0^1 f(x-y) h(y) d\lambda(y) + \int_0^1 g(x-y) h(y) d\lambda(y)$$

$$= f * h(x) + g * h(x).$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_0^1 \overbrace{f(x-y)}^{=u} g(y) d\lambda(y)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} d\lambda(y) = -d\lambda(u) \\ = \\ y = x-u \end{matrix} \int_x^{x-1} f(u) g(x-u) (-d\lambda(u)) \end{aligned}$$

$$= \int_{x-1}^x g(x-u) f(u) d\lambda(u)$$

$$\stackrel{\substack{\text{το } [x-1, x) \\ \text{έχει μήκος 1}}}{=} g * f(x).$$

$$\textcircled{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f * (g * h)(x) = \int_{y \in [0,1)} f(x-y) \cdot (g * h)(y) d\lambda(y) =$$

$$= \int_{y \in [0,1)} \underbrace{f(x-y)}_{\text{circled}} \cdot \left(\int_{z \in [0,1)} g(y-z) \cdot h(z) d\lambda(z) \right) d\lambda(y) =$$

$$\stackrel{\text{Fubini!}}{=} \int_{z \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} \underbrace{f(x-y) g(y-z)}_{\text{circled}} h(z) d\lambda(y) \right) d\lambda(z) =$$

$$= \int_{z \in [0,1]} h(z) \cdot \left(\int_{y \in [0,1]} f(x-y) \underbrace{g(y-z)}_u d\lambda(y) \right) d\lambda(z)$$

$\underline{\underline{d\lambda(y) = d\lambda(u)}}$
 $y = u + z$
 $x - y =$
 $x - (u + z)$
 $= (x - z) - u$

$$\int_{z \in [0,1]} h(z) \cdot \left(\underbrace{\int_{-z}^{-z+1} f(x-z-u) g(u) d\lambda(u)}_{f * g(x-z)} \right) d\lambda(z)$$

$$= (f * g) * h(x).$$

$$\textcircled{5} \quad \int_{x \in [0,1)} f * g(x) d\lambda(x) = \int_{x \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} f(x-y) g(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

Fubini!

$$\int_{y \in [0,1)} \left(\int_{x \in [0,1)} f(x-y) \underbrace{g(y)}_{\text{circled}} d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{y \in [0,1)} g(y) \cdot \left(\underbrace{\int_{x \in [0,1)} f(x-y) d\lambda(x)}_{\text{bracketed}} \right) d\lambda(y)$$

$$= \int_{[0,1)} f d\lambda \cdot \int_{[0,1)} g d\lambda.$$

$\int_{[0,1)} f d\lambda$

⚠ Το ⑤ μας λέει ότι, παρ'ότι η $f * g$ "δίνει" ως f και g με έναν περιήλοτο τρόπο, το $\int_0^1$ ως ζευγαλώνει.

Αυτό το κάνει πιο ισχυρά ο μετασχηματισμός $\wedge$:

! → Πρόταση: Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε,

$$\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

⚠ Για $k=0$, παίρνουμε: $\widehat{f * g}(0) = \hat{f}(0) \hat{g}(0)$,

δηλαδή: $\int_{[0,1)} f * g \, d\lambda = \int_{[0,1)} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1)} g \, d\lambda$ (η ιδιότητα ⑤).

Ανάλυση: $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f * g}(k) = \int_{x \in [0,1)} f * g(x) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)$$

$$= \int_{x \in [0,1)} \left(\int_{y \in [0,1)} f(x-y) g(y) d\lambda(y) \right) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)$$

Fubini!

$$\int_{y \in [0,1)} g(y) \left(\int_{x \in [0,1)} f(x-y) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \right) d\lambda(y)$$

" $f_{-y}(k)$, όπου $f_{-y}(x) := f(x-y)$
 $e^{2\pi i k (-y)} \widehat{f}(k)$ $\forall x \in \mathbb{R}$:
μεταφορά της f
και $-y$.

$$= \int_{y \in (0,1)} g(y) \cdot e^{-2\pi i x y} \hat{f}(x) d\lambda(y)$$

$$= \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x).$$

■



Είδαμε ότι η συνέλιξη $f * g(x)$ δίνεται από "μέσους όρους"

της f στο $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, με "βάρος" την ανακλίση $g(-\cdot)$ της g .

Παρόμοια, ισχύει και με $g * f(x)$, άρα δίνεται από "μέσους όρους" της

g στο $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$, με "βάρος" $f(-\cdot)$. Ο, μέσοι όροι των f και

g , λογικά, πρέπει να λειτουργούν πιο "ομαλά" από τις f, g .

Δηλαδή, αν χένει περιμένουμε η $f \circ g$ να έχει καλύτερες ιδιότητες από τις f και g .

Θα δούμε τώρα ότι τα $S_N(f; \cdot)$ είναι συνεκτίξεις της f με κατάλληλες $\underbrace{D_N}_{\rightarrow \text{συνθήκες του Dirichlet}}$.

→ O nupinas cou Dirichlet: 'Esau $f \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$s_N(f; x) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \left(\int_0^1 f(y) e^{-2\pi i k y} d\lambda(y) \right) e^{2\pi i k x}$$

$$= \int_0^1 f(y) \cdot \left(\sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k (x-y)} \right) d\lambda(y)$$

$\therefore D_N(x-y)$

$$= f * D_N(x), \quad \text{donc}$$

$$D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

H D_N ονομάζεται ο πυρήνας του Dirichlet στο N .

→ Κλειστός τύπος για το D_N :

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \\ 2N+1, & \forall x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

→ Ansatz: $\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-N}^N (e^{2\pi i x})^k \\ &= e^{-2\pi i N x} \cdot \sum_{k=0}^{2N} \underbrace{(e^{2\pi i x})^k}_{=\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{2N} \\ &= \frac{\lambda^{2N+1} - 1}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

$$= e^{-2\pi i N x} \cdot \frac{(e^{2\pi i x})^{2N+1} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} = \frac{e^{2\pi i (N+1)x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{2\pi i x} - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2ni \cdot \frac{1}{2}x}} \cdot \left(e^{2ni(N+\frac{1}{2})x} - e^{-2ni(N+\frac{1}{2})x} \right)}{\cancel{e^{nix}} \cdot \left(e^{nix} - e^{-nix} \right)}$$

$$= \frac{\cancel{2i} \sin \left(2n(N+\frac{1}{2})x \right)}{\cancel{2i} \sin (\pi x)}$$

$$= \frac{\sin \left((2N+1) \pi x \right)}{\sin (\pi x)}$$

Για $x=0$: $D_N(0) = \sum_{k=-N}^N \underbrace{e^{2\pi i \cdot k \cdot 0}}_1 = 2N+1.$

Αφού η D_N είναι 1-ηεριοδική (αθροισμα εκθετικών),

$$D_N(x) = 2N+1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

πλερασμένο
αθροισμα
εκθετικών ■

→ Πρόταση: $\forall N \in \mathbb{N}$, το D_N είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο,

άρα $D_N \in C(\mathbb{T})$. Η D_N είναι άρτια, και

→ ηηλίο περιττων

$$\int_{[0,1)} D_N d\lambda = 1$$

$$\rightarrow \int_0^1 D_N(x) dx = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 \underbrace{e^{2\pi i k x}}_{\rightarrow 0, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} dx = \int_0^1 \underbrace{e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x}}_1 dx = 1.$$

→ Παρατήρηση: για $x \in [-1/2, 1/2)$,

$$D_N(x) = 0 \iff \sin((2N+1)\pi x) = 0$$

$$\iff (2N+1)x = k \in \mathbb{Z}$$

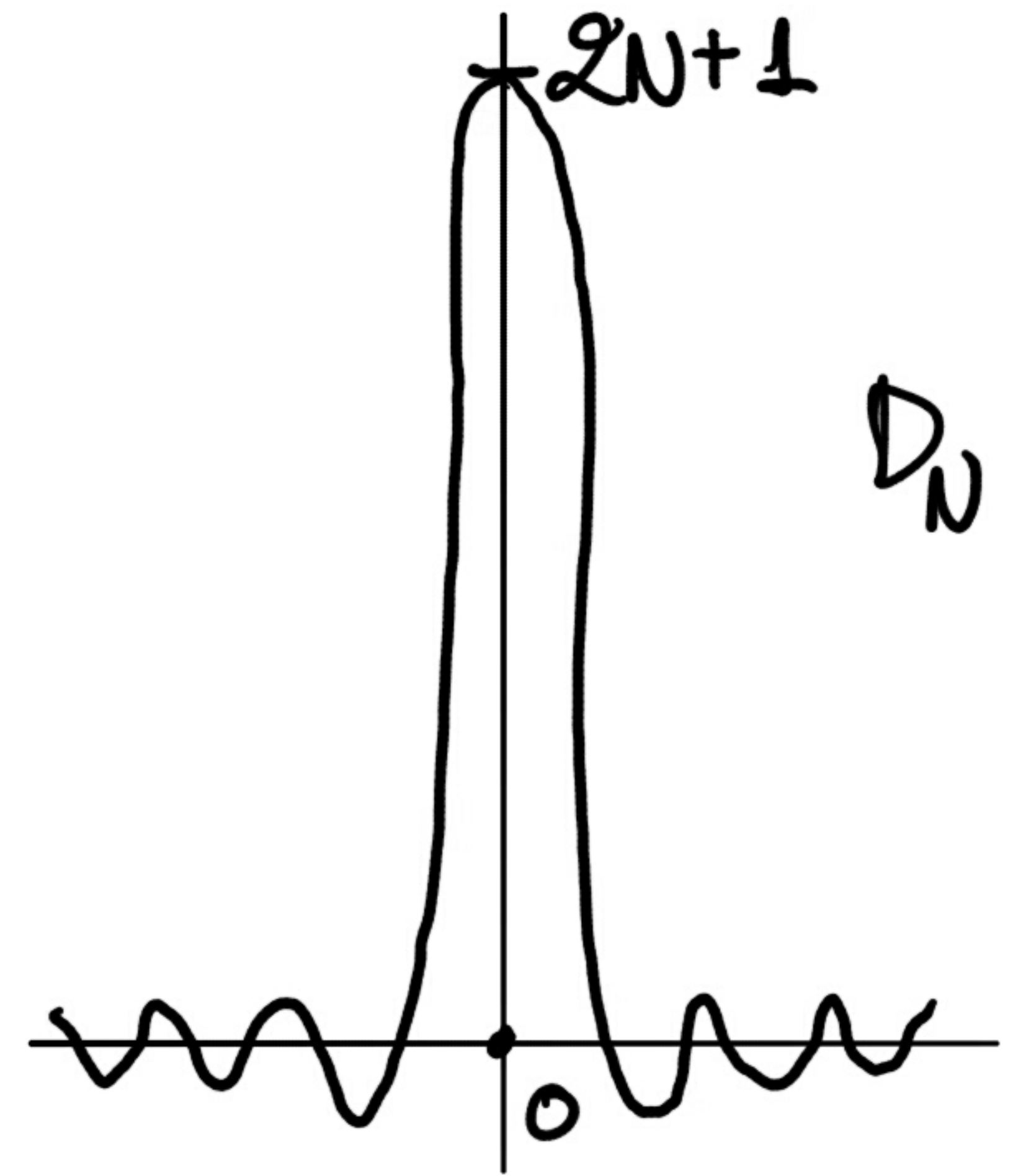
$$\iff x = \frac{k}{2N+1} \in [-1/2, 1/2).$$

$$\text{Αυτό συμβαίνει} \iff k \in \mathbb{Z} \cap [-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}]$$

$$\iff k \in \mathbb{Z} \cap [-N, N] \iff k = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N.$$

Άρα, η D_N μηδενίζεται $2N+1$ φορές στο $[-1/2, 1/2)$.

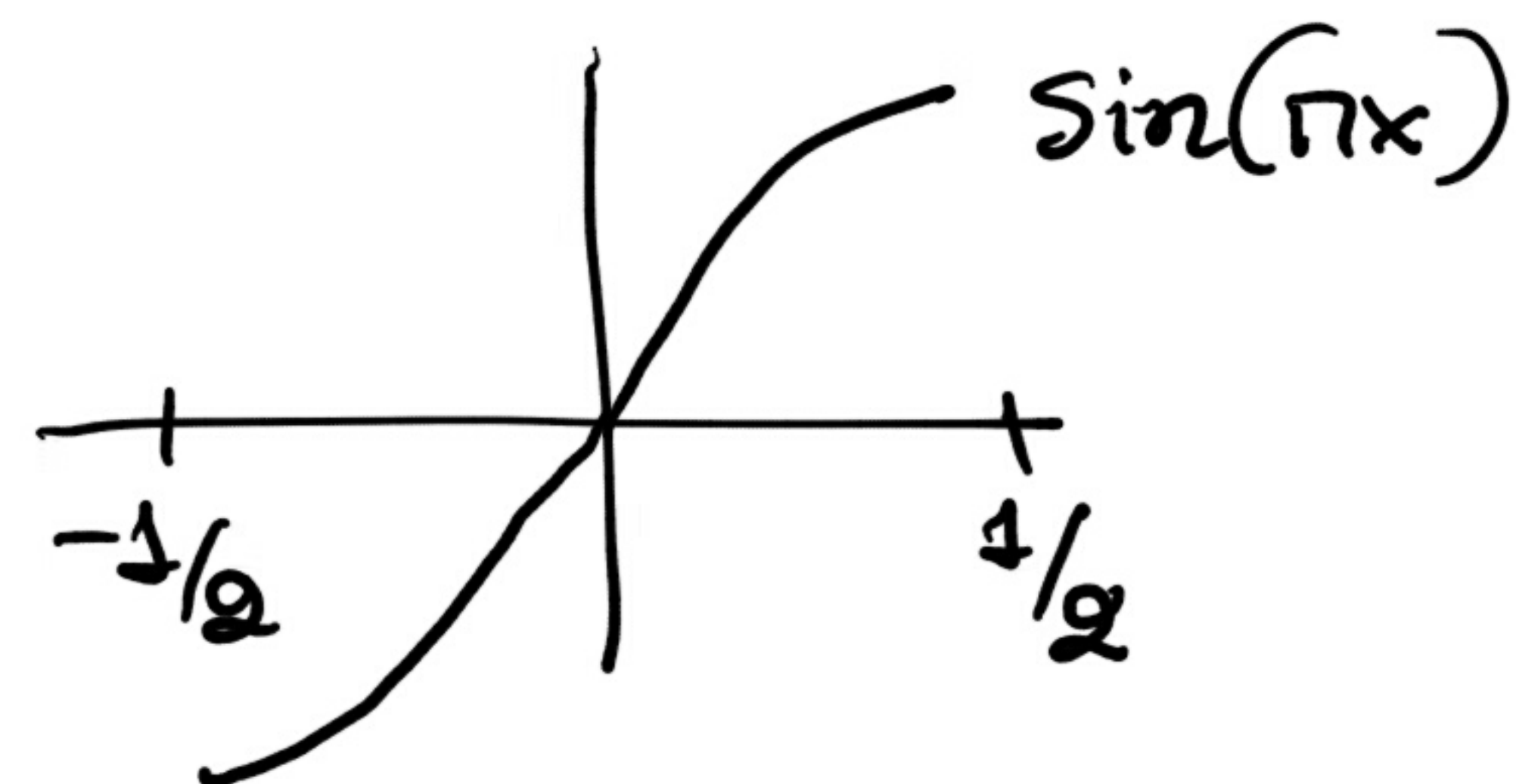
Μάλιστα, κάθε μία από αυτές αλληλάζει ηρόσημο (κωδός ο αριθμητής αλληλάζει ηρόσημο, ενώ ο παρονομαστής $\sin(\pi x)$ όχι).



Κάτι που ισχύει είναι ότι,

παράδειγμα που $\int_{[0,1)} D_N d\lambda = 1 \quad \forall N \in \mathbb{N},$

$$\int_{[0,1)} |D_N| d\lambda \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$



Μακροπρόθεσμα:

Θα δούμε πως αυτό σημαίνει πως θα $s_N(f; x) = f * D_N$

δε συμπεριφέρονται τόσο καλά (όσο ευσταθείας θα συμπεριφέ-
ρονταν αν θα $\int_{[0,1)} |D_N| d\lambda$ ήταν ομοιόμορφα φραγμένα).

• Σκέψεις: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $x \in \mathbb{R}$. Δομικά, θέλουμε

$$S_N(f; x) - f(x) \longrightarrow 0.$$

Ξέρουμε πλέον ότι $S_N(f; x) - f(x) = f * D_N(x) - f(x) =$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y) D_N(y) d\lambda(y) - \underbrace{f(x) \cdot \int_{-1/2}^{1/2} D_N(y) d\lambda(y)}_{=1}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-y) - f(x)] \cdot D_N(y) d\lambda(y) =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \boxed{\frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(\pi y)}} \cdot \sin((2N+1)\pi y) d\lambda(y).$$

$= g_x(y)$

Η $\sin((2N+1)\pi y)$ είναι γραμμικός συνδυασμός δύο εκθετικών συναρτήσεων υψηλής συχνότητας (τάξης μεγέθους N), δηλ.,

θα πρέπει $s_N(f; x) - f(x) \stackrel{''}{=} \hat{g}_x(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ ☺

πρακτικά
μειώνεται

! αυ! $\hat{g}_x \in L^1(\pi)$

Άρα, θα πρέπει να ψάξουμε συνθήκες υπό τις οποίες η

$$g_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$g_x(y) := \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(\pi y)} \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

είναι στον $L^1(\mathbb{T})$. Τέτοιες συνθήκες δίνει το Θεώρημα

του Dini. Θα ξεκινήσουμε με μια απλή περίπτωση του.

Παρατηρούμε ότι η $g_x \in L^1(\mathbb{T}) \iff \int_{(-\delta, \delta)} |g_x| d\lambda < +\infty$, για κάποιον δ μικρό, >0 (κωλύς μακριά από το 0 η g_x είναι τετριμμένα ολοκληρώσιμη). Όπως, κοντά στο 0, $\sin(\pi y) \sim \pi y \sim y$,

άρα $g_x(y) \sim \frac{f(x-y) - f(x)}{y}$ για y κοντά στο 0.

Άρα, αν η f είναι Lipschitz-συνεχής, τότε

$$|f(x-y) - f(x)| \leq M \cdot |y|, \quad \text{άρα}$$

$$|g_x(y)| \leq \frac{M \cdot |y|}{|y|} = M \quad \text{κοντά στο 0,}$$

άρα η g_x είναι ολοκληρώσιμη κοντά στο 0,

$$\text{άρα } s_N(f; x) \rightarrow f(x).$$