

Επομένως ορίζοντας, $\forall m \in \mathbb{N}$, $p_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

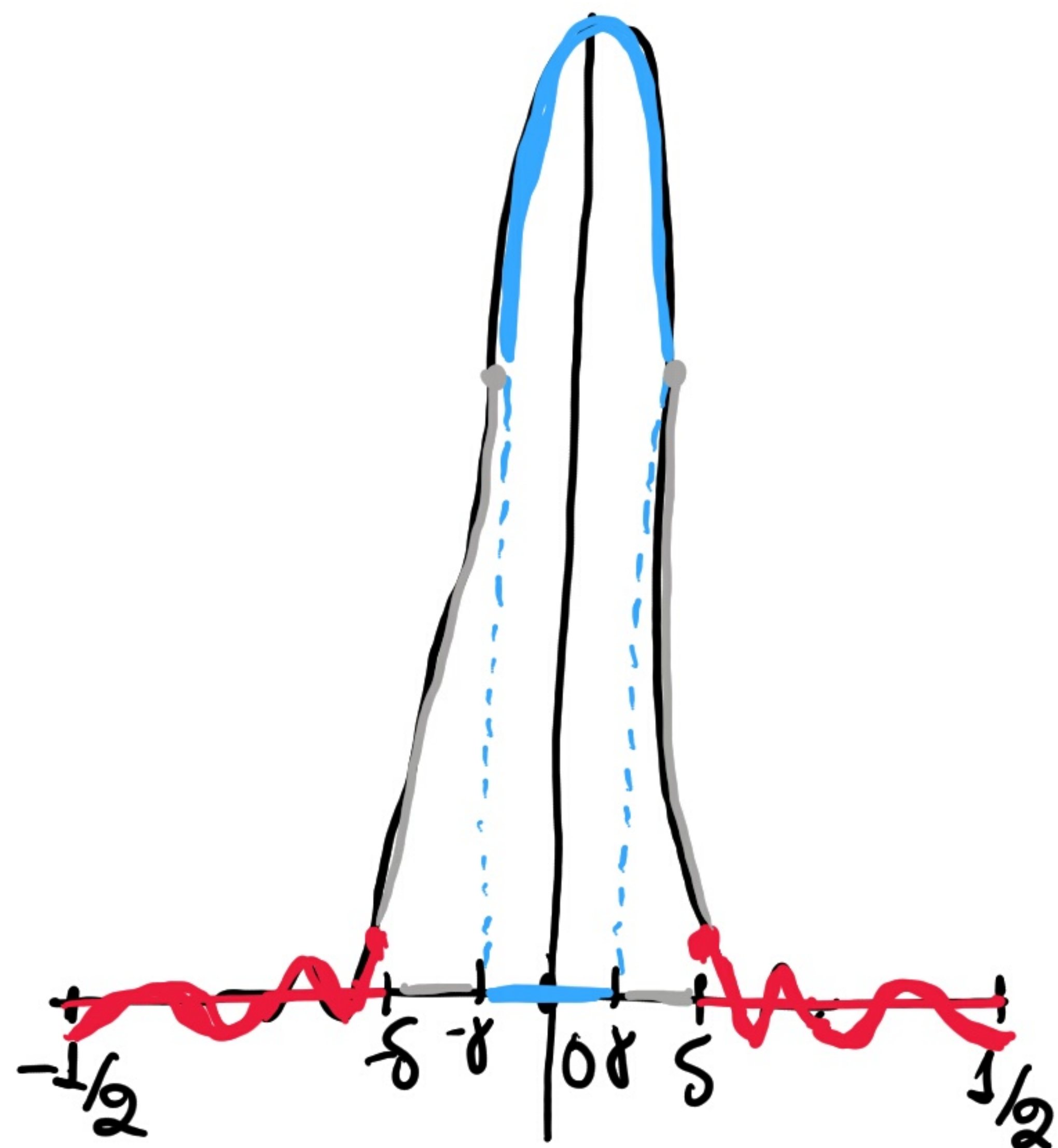
$$p_m(x) = (p(x))^m = (\cos(2nx) + \varepsilon)^m \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(p_m : τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\forall m \in \mathbb{N}$), έχουμε:

έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_m(x) > \overset{\text{τεράδιο}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^m}, & \forall |x| \leq \delta \\ p_m(x) > \overset{\text{OK}}{0}, & \forall \delta \leq |x| \leq \delta. \\ |p_m(x)| < \overset{\text{αμελητέο}}{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^m}, & \forall \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

p_m για μεγάλο m



$$\text{Άρα, } 0 = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) p_m(x) d\lambda(x)$$

$$= \int_{|x| \leq \delta} f(x) p_m(x) d\lambda(x) \quad // \text{ } I_m$$

$$+ \int_{\delta \leq |x| \leq \delta} f(x) p_m(x) d\lambda(x) \quad // \text{ } II_m$$

$$+ \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} f(x) p_m(x) d\lambda(x) \quad // \text{ } III_m$$

$$\forall m \in \mathbb{N}.$$

• $I_m \rightarrow +\infty$ καθώς $m \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
 \int_{|x| \leq \delta} \underbrace{f(x)}_{> \frac{f(0)}{2}} \underbrace{p_m(x)}_{\geq (1 + \frac{\varepsilon}{2})^m} d\lambda(x) &\geq \int_{|x| \leq \delta} \underbrace{\frac{f(0)}{2} \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{2})^m}_{\text{σταθ.}} d\lambda(x) = \\
 &= \frac{f(0)}{2} \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{2})^m \cdot \cancel{2\delta} \\
 &= \underbrace{f(0) \cdot \delta}_{\text{σταθ.} > 0} \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{2})^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty .
 \end{aligned}$$

- $\text{III}_m \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow +\infty$:

$$|\text{III}_m| = \left| \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} f(x) p_m(x) d\lambda(x) \right| \leq \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |f(x)| \cdot |p_m(x)| d\lambda(x).$$

$$|p_m(x)| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall \delta \leq |x| \leq 1/2$$

$$\Rightarrow |f(x)| \cdot |p_m(x)| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall \delta \leq |x| \leq 1/2.$$

Επομένως, $\forall m \in \mathbb{N}$: $|f(x)| \cdot |p_m(x)| \leq |f(x)| \quad \forall \delta \leq |x| \leq 1/2$,

$$\text{όπου} \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |f(x)| d\lambda(x) \leq \|f\|_{L^1(\pi)} < +\infty.$$

Αρα, and Θεώρημα Κυριαρχημένης Σειράς,

$$|I_m| \leq \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} |f(x)| \cdot |p_m(x)| d\lambda(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq 1/2} 0 d\lambda(x) = 0.$$

Αρα, $I_m \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow +\infty$.

- $I_m \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}:$

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \delta} \underbrace{f(x)}_{> \frac{f(0)}{2} > 0} \cdot \underbrace{p_m(x)}_{> 0} d\lambda(x) \geq 0.$$

Επομένως, $0 = \underset{\downarrow +\infty}{I_m} + \underbrace{II_m}_{\geq 0} + \underset{\downarrow 0}{III_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, άτοπο!

Άρα, $f(0) = 0$.

■

Στην εργασία που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε αυτo το Θεώρημα για να εξασφαλίσουμε πως, όταν $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$ και $f \in C(\mathbb{T})$,

τότε $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{T}$.

→ Όταν $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$:

→ Θεώρημα: Έστω $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ακολουθία στο $\mathbb{C}$, με $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty$.

Ορίζουμε $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $g \in C(\mathbb{T})$, και μάλιστα τα μερικά αθροίσματα

$s_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, με $s_N(x) := \sum_{k=-N}^N a_k e^{2\pi i k x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

συγκλίνουν ομοιόμορφα στη g .

Ανλ., η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$
συγκλίνει ομοιόμορφα σε
μια συνεχή συνάρτηση

και (ii) $\hat{g}(k) = a_k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: $\bullet \forall x \in \mathbb{R}$, η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$ συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k e^{2\pi i k x}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty. \text{ Άρα, } \underline{\text{συγκλίνει}} \text{ (δηλ. } g(x) \in \mathbb{C}).$$

$\bullet$ Η $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον

$$(\underline{C(\mathbb{T})}, \|\cdot\|_\infty) : \forall n > m, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} a_k e^{2\pi i k x} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m+1 \leq |k| \leq n} |a_k| = |t_n - t_m|, \text{ όπου, } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$t_N := \sum_{k=-N}^N |a_k|.$$

Επομένως, $\forall n, m \in \mathbb{N}, \|s_n - s_m\|_\infty \leq |t_n - t_m|. \quad (*)$

Αφού η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < +\infty$, η $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, άρα είναι

Cauchy στον $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ $\xRightarrow{(*)}$ η $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον

$(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

• $C(\mathbb{T}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι Banach. Άρα, $\exists$ $h \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\underline{\|s_N - h\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0}.$$

• Αυτό συνεπάγεται και κ.σ. σύγκλιση:

$$s_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Όμως,

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2\pi i k x} \xrightarrow[\text{op}]{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x} = g(x).$$

Άρα, $g(x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Δηλ., $\|s_N - g\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

• $\hat{g}(k) = a_k \quad \forall k \in \mathbb{Z} :$

Πρώτον, $\|s_N - g\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \implies \boxed{\hat{s}_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \hat{g}(k)}, \forall k \in \mathbb{Z} :$

$$\left| \forall k \in \mathbb{Z}, |\hat{s}_N(k) - \hat{g}(k)| = \left| \int_0^1 (s_N(x) - g(x)) e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \right| \right.$$

$$\left. \leq \int_0^1 |s_N(x) - g(x)| d\lambda(x) \leq \|s_N - g\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \right]$$

Τώρα, έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για όλα τα $N \in \mathbb{N}$,

το $s_N(x) = \sum_{m=-N}^N a_m e^{2\pi i m x}$ είναι τριγωνομετρικό πολυ-

ώνυμο, άρα
$$\hat{s}_N(m) = \begin{cases} a_m, & |m| \leq N \\ 0, & |m| > N. \end{cases}$$

Άρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N \geq |k|$, $\hat{s}_N(k) = a_k$ (σταθερά).

Άρα,
$$\left. \begin{array}{l} \hat{s}_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_k \\ \text{Όμως } \hat{s}_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \hat{g}(k) \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{g}(k) = a_k.$$

⚠ Μπορούμε να δείξουμε και απευθείας ότι $\|g - s_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$,
και να υπολογίσουμε κάθε $\hat{g}(k)$ με τον ορισμό του (βλ. ΘΚ2).

→ Συμβολισμός: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall x \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με

$$Sf(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

τη σειρά Fourier της f στο x .

→ Πόρισμα: Έστω 1-περιοδική $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, μερήςμερη, με $\int_{(0,1)} |f| d\lambda < +\infty$.

Έστω δε $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$. Τότε, η $Sf \in C(\mathbb{T})$,

και μάλιστα $\|S_N(f; \cdot) - Sf\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Επίσης,

$$f(x) = Sf(x) \quad \left(= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου η f είναι συνεχής.

Απόδ: Έχουμε ότι $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$. Επομένως, εφαρμόζοντας το τελευταίο Θεώρημα για $a_k = \hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε ότι

- $Sf \in C(\mathbb{T})$
- $\|s_N(f; \cdot) - Sf\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.
- $\hat{Sf}(k) = a_k = \hat{f}(k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Αφού $Sf \in C(\mathbb{T})$, προκύπτει ότι $f(x) = Sf(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ όπου η f είναι συνεχής.

■

→ Πόρισμα: Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ με $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

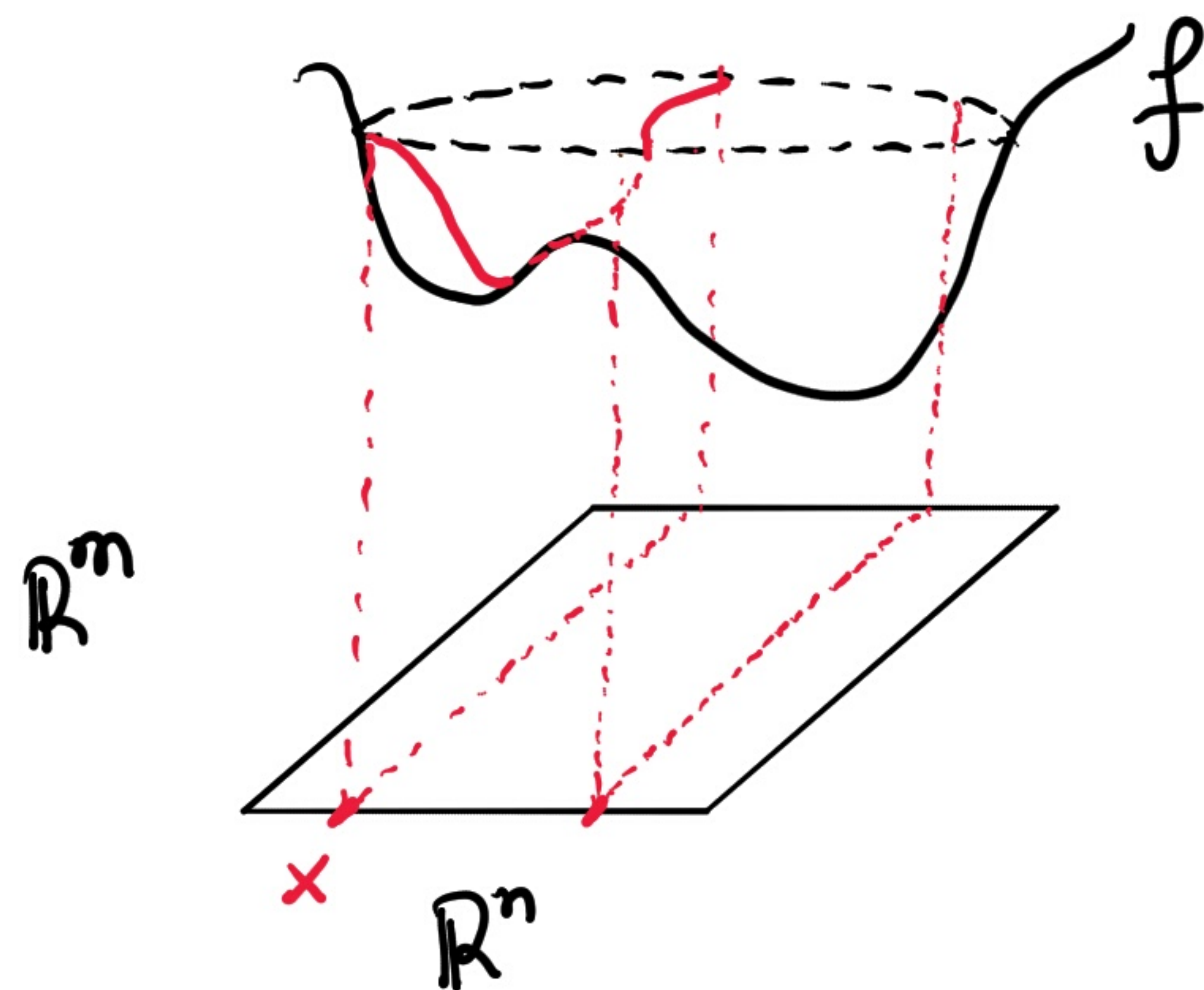
Τότε,
$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

και μάλιστα η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

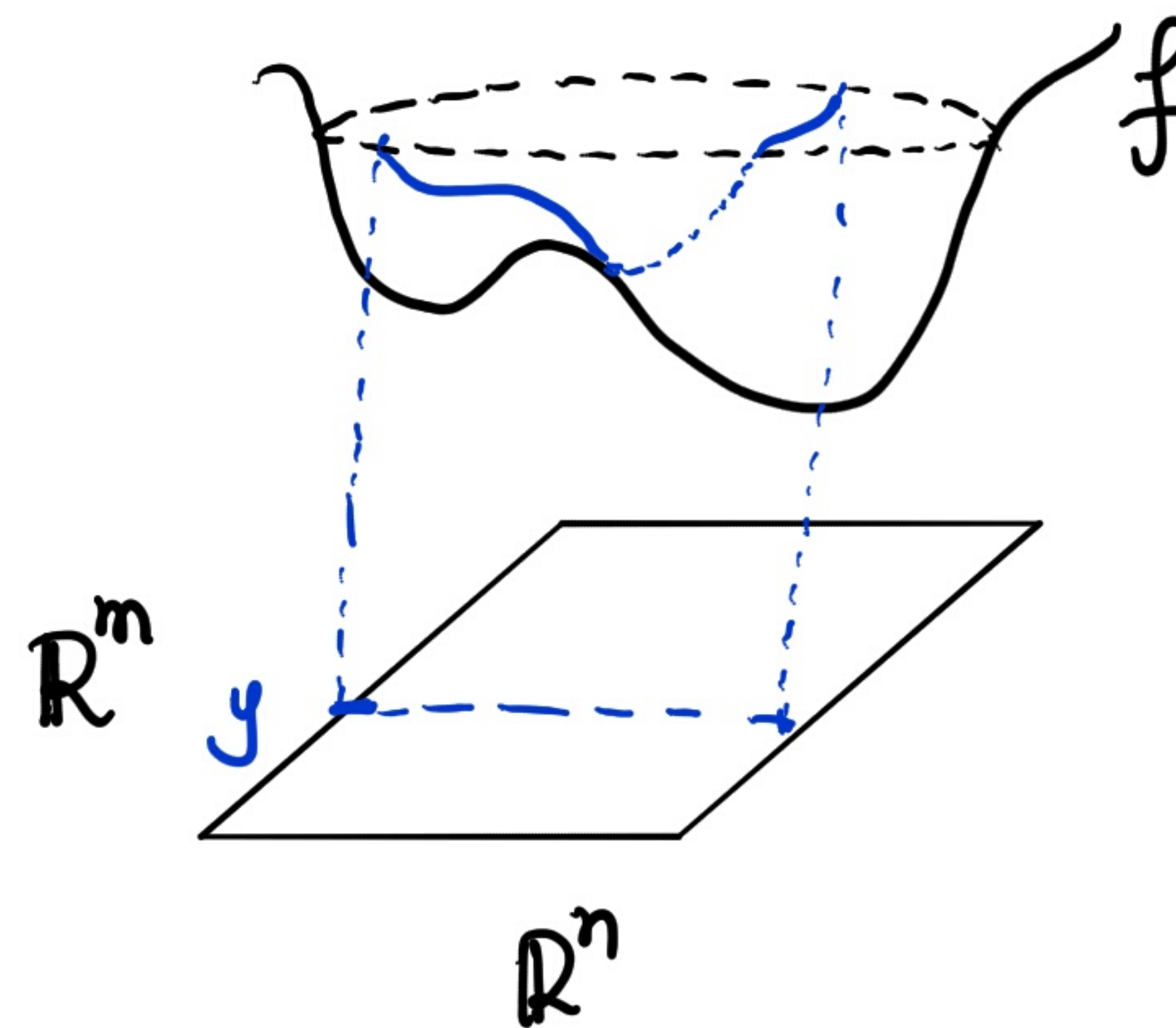
→ Άσκηση: Έστω η 1-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
με $f(x) = |x| \quad \forall x \in [-1/2, 1/2)$. Βρείτε τη σειρά Fourier
της f , και δείξτε ότι $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

→ Τα θεωρήματα Tonelli και Fubini στον $\mathbb{R}^d$:

Αυτά μας δίνουν συνθήκες υπό τις οποίες μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά δύο ολοκληρωμάτων.



$$x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\nu(y)$$



$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\mu(x)$$

→ Θεώρημα Tonelli (μη αρνητικές f):

Έστω $f: (\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}), \lambda_{n+m}) \rightarrow \underline{[0, +\infty]}$ μετρήσιμη. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(x) \right) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

⚠ Αυτά μας λέει ότι πάντα μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά των ολοκληρωμάτων για μη αρνητικές συναρτήσεις, υπό μία συνθήκη που βεβαιώνει ότι τα ολοκληρώματα έχουν νόημα.

→ Θεώρημα Fubini (ωχαίες f):

Έστω $f: (\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}), \lambda_{n+m}) \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη.

Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+m})$, δηλ., αν οποιοδήποτε and ca

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f| d\lambda_{n+m}, \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)| d\lambda_n(x) \right) d\lambda_m(y), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x)$$

είναι $< +\infty$

(αυτά είναι ίσα and Tonelli), τότε

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) d\lambda_n(x) \right) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) d\lambda_m(y) \right) d\lambda_n(x).$$

→ Συνελίξεις

→ Ορισμός: Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$f * g(x) = \int_0^1 f(x-y) g(y) d\lambda(y).$$

→ Πρόταση: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$, το $f * g(x)$ ορίζεται καλά για λ -σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, και

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Πριν δείξουμε την Πρόταση, προσπαθούμε να οπτικοποιήσουμε τη

συνέλιξη $f \star g(x)$.

→ Ορισμός 1:

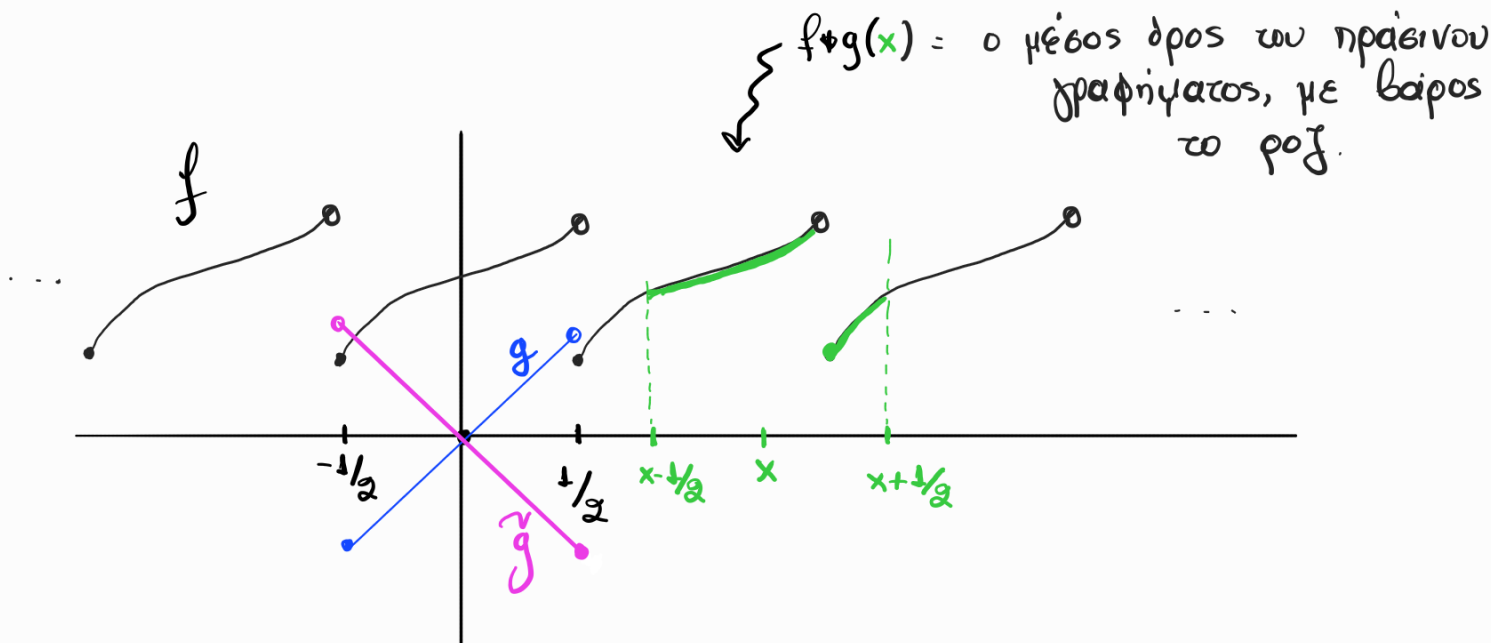
$$f \star g(x) = \int_0^1 f(x-y) g(y) d\lambda(y)$$

$$\overset{\substack{f, g \\ 1\text{-περιοδικές}}}{=} \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y) g(y) d\lambda(y)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} f(x+y) \underbrace{g(-y)}_{\substack{=: \\ \tilde{g}(y)}} d\lambda(y)$$

$\tilde{g}(y)$, η "ανάκλιση" της g ως προς τον y'

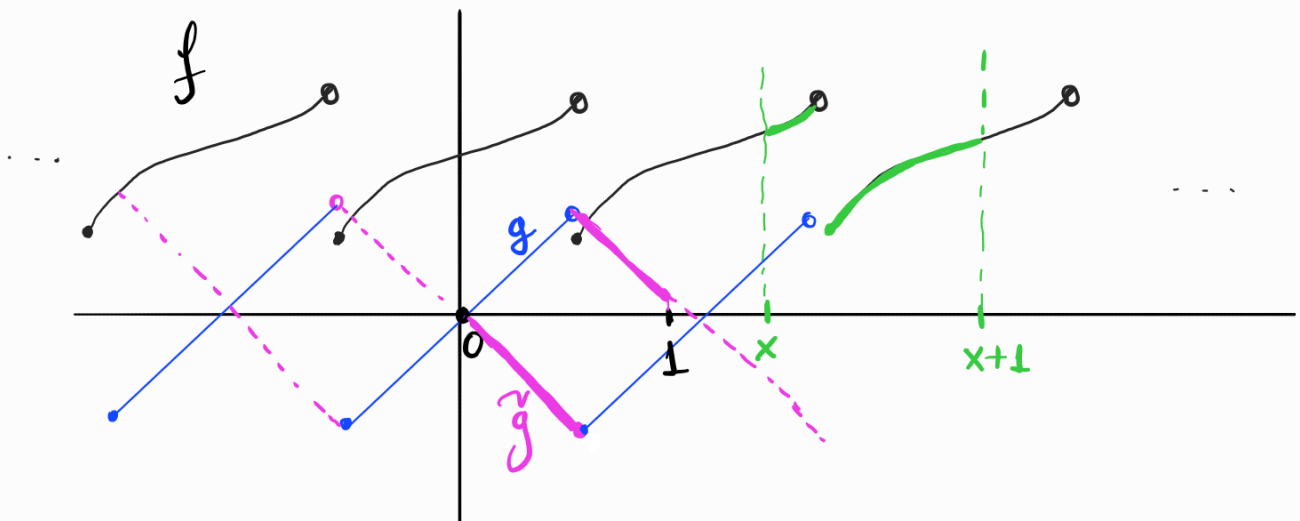
= ο "μέσος όρος" της f , με βάρος $\tilde{g}|_{[-1/2, 1/2]}$, σε ένα διάστημα μήκους 1 γύρω από το x .



→ Ολική Ολική 2:

$$\begin{aligned}
 f * g(x) &= \int_0^1 f(x-y) g(y) d\lambda(y) \\
 &= \int_{-1}^0 f(x+y) \underbrace{g(-y)}_{\tilde{g}(y)} d\lambda(y) \\
 f, g \downarrow \text{nep.} &= \int_0^1 f(x+y) \tilde{g}(y) d\lambda(y)
 \end{aligned}$$

= ο "μέσος όρος" της f ,
 στο $[x, x+1]$, με "βάρος"
 $\tilde{g}|_{[0,1]}$.



$f * g(x) =$ ο μέσος όρος του
 πράσινου γραφήματος,
 με βάρος το $\rho \circ f$.