

$$\begin{aligned}
 (\text{Ανδρ. } \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
 &= \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\|x\|^2} + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{0} + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\|y\|^2}
 \end{aligned}$$

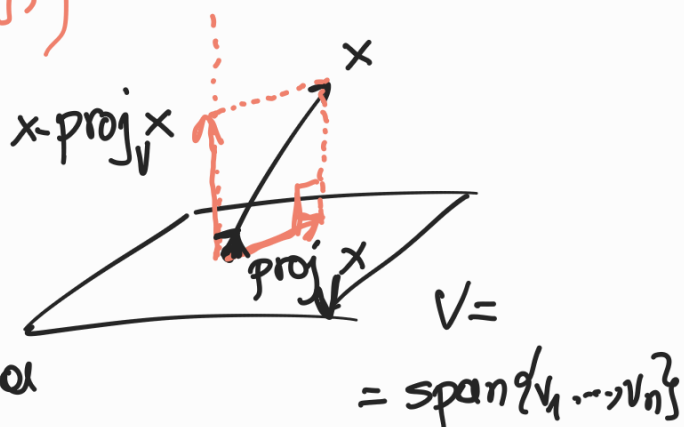
→ Ορισμός: Έστω $V \leq X$, πεν. διαστάσεων.
↓
 υπόχωρος

Έστω $V = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$, όπου το $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα στον X

$$\begin{aligned}
 & (v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j, \\
 & \|v_i\| = 1 \quad \forall i)
 \end{aligned}$$

Ορίζουμε:

$$\text{proj}_V x := \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i$$



⚠ Όποιο ορθοκανονικό σύστημα $\{v_1, \dots, v_n\}$ και αν επιλέξω, με $V = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$, η $\text{proj}_V x$ δεν θα αλλάξει. (Θα φανεί σε λίγο.).

→ Πρόταση: Έστω $V \leq X$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ ορθοκ. σύστημα με $V = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$. Τότε:

$$(i) \text{proj}_V x \in V, \quad x - \text{proj}_V x \perp V$$

$$(\text{δηλ. } \langle x - \text{proj}_V x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in V).$$

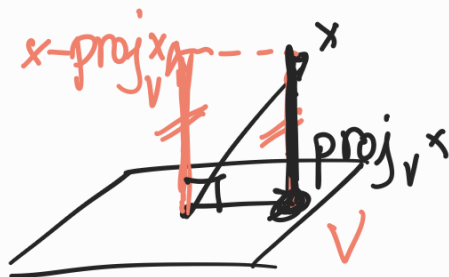
$$(ii) \text{proj}_V x \perp x - \text{proj}_V x.$$

$$(iii) \| \text{proj}_V x \| = \left(\sum_{i=1}^n | \langle x, v_i \rangle |^2 \right)^{1/2} \leq \| x \|^2$$

$$(iv) \| x - \text{proj}_V x \| = \min_{y \in V} \| x - y \|. \quad \text{Μάλιστα,}$$

$$\| x - \text{proj}_V x \| \leq \| x - y \|,$$

$$\forall y \in V \text{ με } y \neq \text{proj}_V x.$$



⚠️ Άρα, η $\text{proj}_V x$ είναι το μοναδικό διάνυσμα του V που βρίσκεται πιο κοντά στο x (σε σχέση με όλα τα άλλα διανύσματα του V). Άρα, η $\text{proj}_V x$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής ορθοκανονικής βάσης $\{v_1, \dots, v_n\}$ στον V .

$$\underline{\text{Ανδ.}}: \langle x - \text{proj}_V x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in V:$$

$$V = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow \text{αρκεί ΝΑΟ}$$

$$\langle x - \text{proj}_V x, v_i \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \langle x - \text{proj}_V x, v_i \rangle &= \left\langle x - \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x, v_j \rangle}_{\in \mathbb{C}} v_j, v_i \right\rangle \\ &= \langle x, v_i \rangle - \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle x, v_j \rangle}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\substack{= 0, \\ \forall j \neq i}} \\ &= \langle x, v_i \rangle - \langle x, v_i \rangle \cdot \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{= 1} = 0. \end{aligned}$$

(iii) $x = \underbrace{\text{proj}_V x}_{\text{καίθετα}} + \underbrace{(x - \text{proj}_V x)}_{\text{καίθετα}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x\|^2 &= \|\text{proj}_V x\|^2 + \underbrace{\|x - \text{proj}_V x\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|\text{proj}_V x\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\text{proj}_V x\| \leq \|x\|.$$

και : $\text{proj}_V x = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle x, v_i \rangle}_{\in \mathbb{C}} \cdot v_i$

καίθετα ανά
δύο

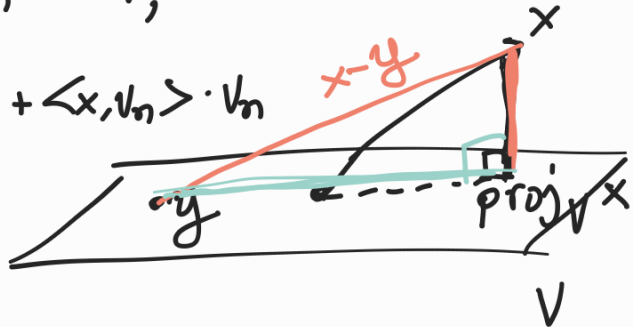
$$\Rightarrow \|\text{proj}_V x\|^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\|\langle x, v_i \rangle \cdot v_i\|}_{= |\langle x, v_i \rangle| \cdot \|v_i\|}^2$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2 \cdot \underbrace{\|v_i\|^2}_1 = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2.$$

(iv) Έστω $y = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n \in V$,

$$\mu \in y \neq \text{proj}_V x = \langle x, v_1 \rangle \cdot v_1 + \dots + \langle x, v_n \rangle \cdot v_n$$

$\Rightarrow \exists i : d_i \neq \langle x, v_i \rangle.$



Και: $x - y = \underbrace{(x - \text{proj}_V x)}_{\text{κάθετα}} + \underbrace{(\text{proj}_V x - y)}_{\in V}$

$$\Rightarrow \|x - y\|^2 = \|x - \text{proj}_V x\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_V x - y\|^2}_{\geq 0 \text{ αφού } y \neq \text{proj}_V x}$$

$$\geq \|x - \text{proj}_V x\|^2 \Rightarrow \|x - y\| \geq \|x - \text{proj}_V x\|.$$

• 4 : $\text{proj}_V x - y = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\langle x, v_i \rangle - d_i)}_{\text{κάθετα}} \cdot v_i$

$$\Rightarrow \|\text{proj}_V x - y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle - \underline{d_i}|^2 \geq 0.$$

Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$.

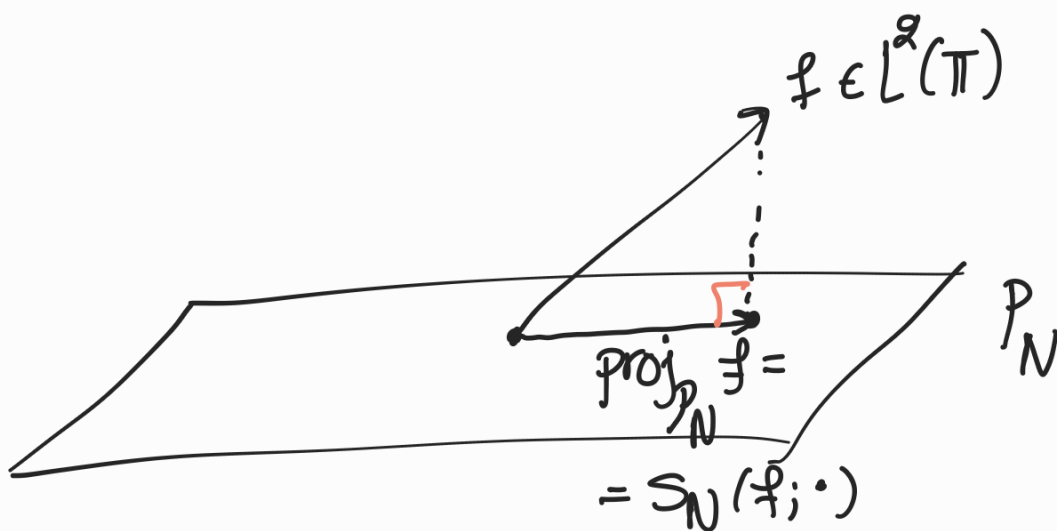
$$S_N(f; \cdot) = \sum_{k=-N}^N \underbrace{\hat{f}(k)}_{\parallel \langle f, \phi_k \rangle} \cdot \phi_k$$

$$= \sum_{k=-N}^N \langle f, \phi_k \rangle \cdot \phi_k.$$

$$= \text{proj}_{\mathcal{P}_N} f, \quad \text{όπου}$$

$$\mathcal{P}_N = \text{span} \{ \phi_{-N}, \dots, \phi_0, \dots, \phi_N \}$$

= ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού $\leq N$.



Αν τα παραπάνω, εφαρμοσμένα στον $L^2(\mathbb{T})$, έχουμε:

→ Πρόταση: Έστω $f \in L^2(\pi)$. Τότε:

(i) $\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f; \cdot) = \text{proj}_{\mathcal{P}_N} f$.

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}, \|f - S_N(f; \cdot)\|_2 = \min_{p \in \mathcal{P}_N} \|f - p\|_2$.

Μάλιστα, έχει $S_N(f; \cdot)$ αυστηρά μικρότερη απόσταση από την f , σε σχέση με όλα τα άλλα $p \in \mathcal{P}_N$.

(iii) $\forall N \in \mathbb{N}, \|S_N(f; \cdot)\|_2 = \left(\sum_{k=-N}^N |\underbrace{\langle f, \phi_k \rangle}_{\hat{f}(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_2$

(iv) $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\pi)}$

δηλ.

$$\|(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2} \leq \|f\|_{L^2(\pi)}.$$

(Ανισότητα Bessel).

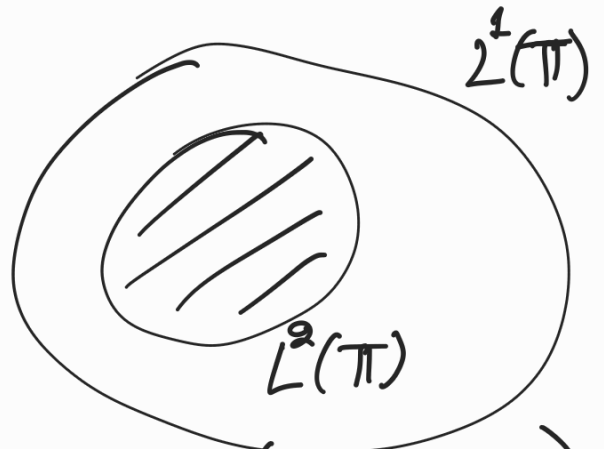
Τελικά, θα δείχθει η ισότητα. (Parseval)

→ Παρατήρηση: Bessel: $\forall f \in L^2(\pi)$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) \longrightarrow 0 \text{ καθώς } |k| \longrightarrow \infty$$

Άρα, αυτή είναι μία άλλη απόδειξη του
Λήμματος Riemann-Lebesgue, για $f \in L^2(\mathbb{T})$.



Μέσω πυκνότητας του $L^2(\mathbb{T})$ στον $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$,
αποδεικνύουμε εκ νέου το Λήμμα για όλες
τις $f \in L^1(\mathbb{T})$.

→ Κοιτάξτε πόσον η $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ καθορίζει την f ;

Θεώρημα (i) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική, μετρήσιμη,

με $\int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty$. Έστω ότι $\hat{f}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Τότε, $f(x_0) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ όπου η f είναι
συνεχής.

(ii) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδικές, μετρήσιμες,
με $\int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty, \int_{[0,1]} |g| d\lambda < +\infty$.

Έστω ότι $\hat{f}(k) = \hat{g}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Τότε, $f(x_0) = g(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ όπου και η f
και η g είναι συνεχείς.

→ Πόρισμα: Έστω $f, g \in C(\mathbb{T})$, με

$$\hat{f}(k) = \hat{g}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Τότε, $f = g.$

Ανδρ. Θεωρήματος: Αρκεί το (i).

Έστω f όπως στις υποθέσεις, συνεχής σε
κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θάδο $f(x_0) = 0.$

Αρκεί να δείξουμε ότι $x_0 = 0$:

$\tilde{f}(x) := f(x + x_0) \Rightarrow$ η $\tilde{f}$ ικανοποιεί τις
υποθέσεις ($\hat{\tilde{f}}(k) = e^{2\pi i k \cdot x_0} \cdot \underbrace{\hat{f}(k)}_0 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$)
και είναι συνεχής στο 0.

Άρα, αν έχουμε δείξει ότι $\tilde{f}(0) = 0,$
τότε $f(x_0) = 0.$

Έστω λοιπόν ότι η f είναι συν. στο 0,

και : $f(0) > 0.$ (Αρκεί να υποθέσουμε ότι
η f είναι πραγματική).

$$\exists \epsilon > 0 : \hat{f}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \int_{[0,1]} f \bar{\phi}_k d\lambda = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]} f \cdot p d\lambda = 0, \quad \forall p \text{ επιγινόμετρος πολυώνυμοι}$$

$$\text{Έστω } p(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot p(x) d\lambda(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \cdot \underbrace{\int_0^1 f(x) \cdot e^{2\pi i k x} d\lambda(x)}_{\hat{f}(k) = 0}$$

$$= 0.$$

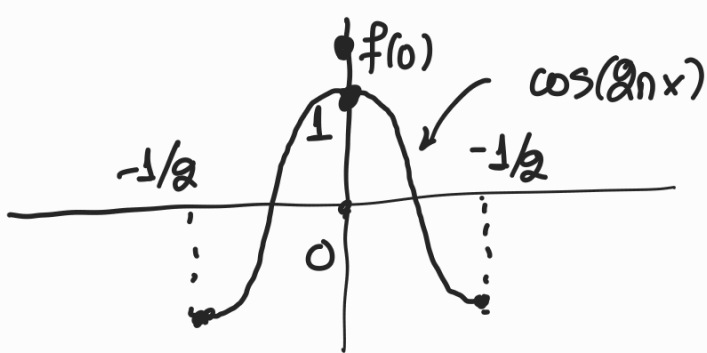
Σχόλιο: Για κάποιο, $\Theta > 0$, λόγω του ότι $f(0) > 0$,

$\exists (p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ακοή επιγ. πολυωνύμων ώστε

$$\int_0^1 f(x) \cdot \underbrace{p_m(x)}_{\text{"}} d\lambda(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$(\cos(2\pi x) + \epsilon)^m,$$

για κατάλληλο $\epsilon > 0$.



$$\cos(2\pi x) + \epsilon >> 1 + \epsilon/2$$

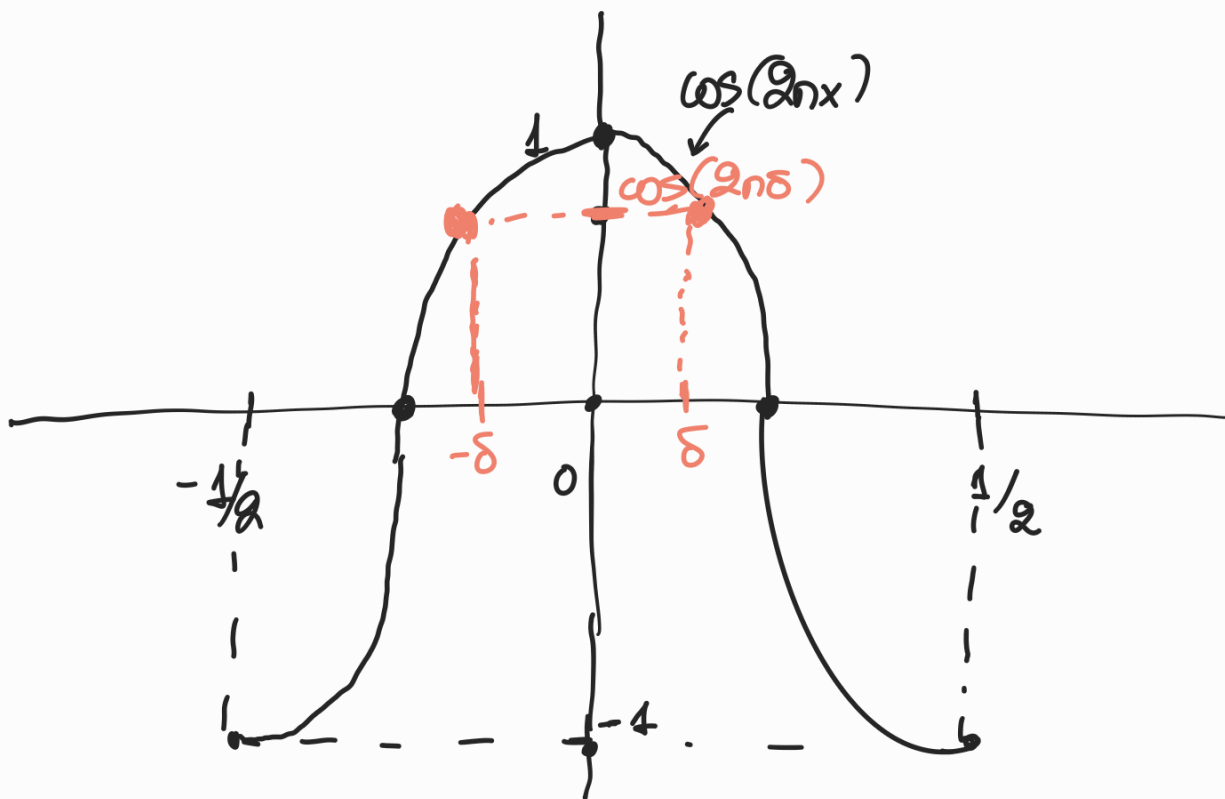
korci sto 0

$$\Rightarrow (\cos(2\pi x) + \epsilon)^n \rightarrow +\infty$$

korci sto 0.

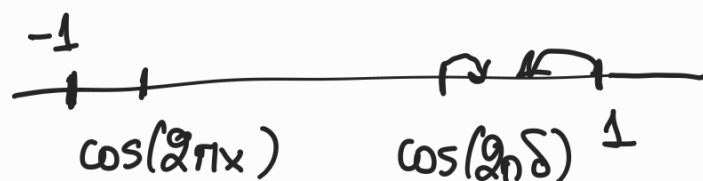
Επίσημα: f συν. στο 0, $f(0) > 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \text{ στο } [-\delta, \delta], f(x) > \frac{f(0)}{2} \quad (> 0)$$



$$\forall x \text{ με } \delta \leq |x| \leq 1/2,$$

$$-1 \leq \cos(2\pi x) \leq \cos(2\pi\delta) \leq 1$$



$$\text{Αρα, } \exists \epsilon > 0 : \cos(2\pi\delta) + \epsilon < 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\varepsilon}{2} < 1 - \cos(2n\delta)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon < \frac{2(1 - \cos(2n\delta))}{3}.$$

Συνεπώς αν $\varepsilon > 0$. Τότε, $\forall x$

$$\mu\epsilon \quad \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2} :$$

$$|\cos(2nx) + \varepsilon| < 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Πράγματι:

- $\forall \cos(2nx) + \varepsilon \geq 0$, τότε

$$|\cos(2nx) + \varepsilon| = \cos(2nx) + \varepsilon \leq \cos(2n\delta) + \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $\forall \cos(2nx) + \varepsilon < 0$, τότε

$$|\cos(2nx) + \varepsilon| = \underbrace{-\cos(2nx)}_{\leq 1} - \varepsilon \leq 1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Τώρα: για $x=0$, $\cos(2nx) + \varepsilon = 1 + \varepsilon$.

Άρα, $\exists \delta > 0$: $\forall x \mu\epsilon |x| \leq \delta$,

$$\cos(2nx) + \varepsilon > 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως, ορίζουμε $p(x) = \cos(2nx) + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(επιγ. πολυ.), και δείχνουμε:

$$\begin{cases} |p(x)| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ p(x) > 0 \\ p(x) > 1 + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad , \quad \begin{aligned} &\forall \delta \leq |x| \leq 1/2. \\ &\forall \delta \leq |x| \leq \delta. \\ &\forall |x| < \delta \end{aligned}$$

