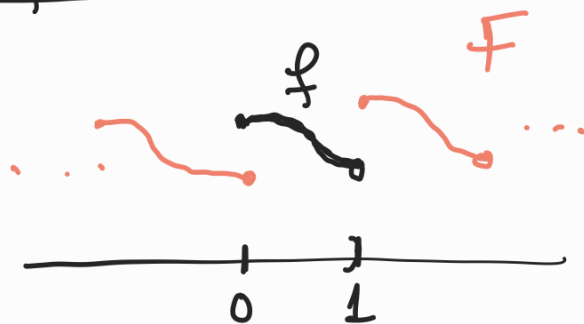


→ 1-περιοδικές συναρτήσεις:

Κάθε $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$

επεκτείνεται με μοναδικό
τρόπο σε κάποια 1-περιο-
δική $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$



Επίσης, κάθε 1-περιοδική $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ έχει έναν
διαφορετικό περιορισμό $f := F|_{[0,1)} : [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$.

(Δ $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 1-περιοδική $\iff f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$).

Αντλ., υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία

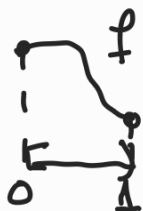
$\{1\text{-περιοδικές } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\} \longleftrightarrow \{f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}\}$.

→ Ορισμός: Λέμε ότι μια $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι
συνεχής (παραγωγίσιμη, συνεχώς παραγωγίσιμη, κλπ)

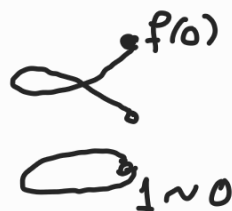
"δύο κύκλοι π " αν η 1-περιοδική της
επέκταση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής (παρα-
γωγίσιμη, συνεχώς παραγωγίσιμη, κλπ).

→ Αντλ., πρακτικά, η $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής

στον π $\xrightarrow{\text{op}}$ γίνεται συνεχής αν εστιάσουμε
 τα άκρα του $[0,1)$ ώστε
 να φτιάξουμε κύκλο.



$\xrightarrow{0 \sim 1}$



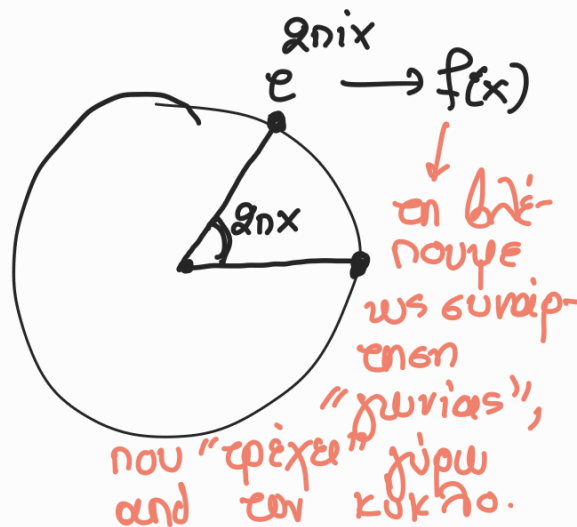
→ And now approaching our;

$$\pi := \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$$

Ορίζουμε $\tilde{f} : \pi \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tilde{f}(e^{2\pi i x}) = f(x),$$

$$\forall x \in [0,1).$$



Λέμε ότι η f είναι συνεχής στον π

$\Leftrightarrow$ η $\tilde{f}$ είναι συνεχής.

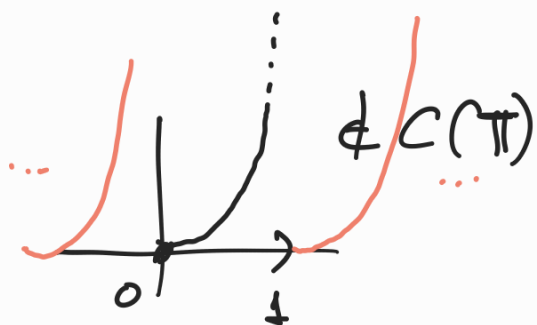
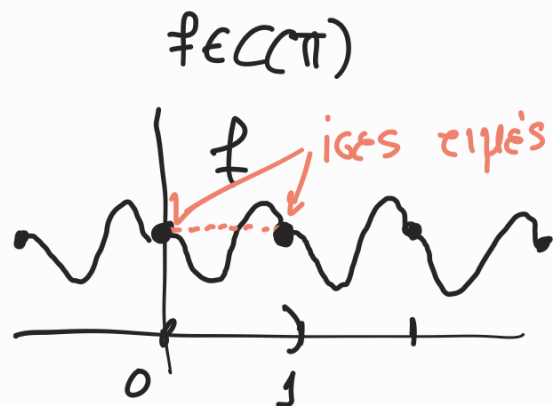
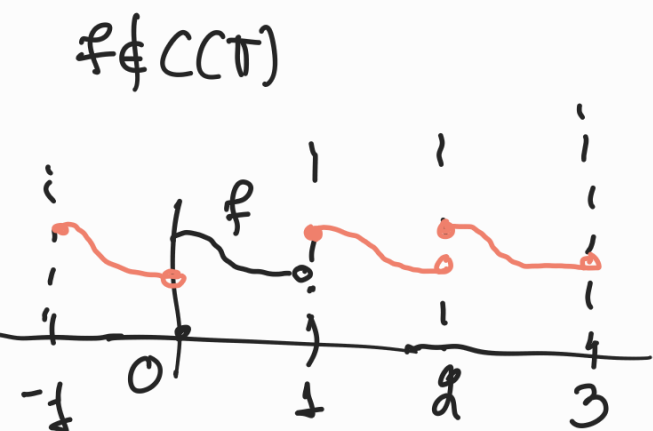
Αυτό είναι ισοδύναμο με τον ορισμό που ήδη
 δώσαμε (δηλ. με το ότι η 1-περιοδική επέκταση
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ της f είναι συνεχής.)

→ Ορισμοί:

- $C(\pi) := \{f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C} : \text{η 1-περιοδική επέκταση}$
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ της f είναι συνεχής}

$$\simeq \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ συνεχής και } f(0)=f(1) \}$$

$$\simeq \{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : F \text{ 1-περιοδική και } F \text{ συνεχής} \}$$

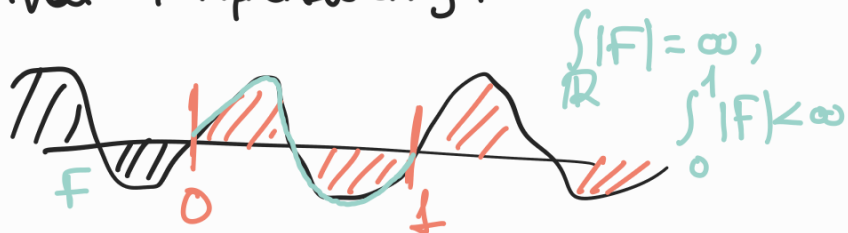


- $C^k(\mathbb{T}) := \{ f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C} : \text{η 1-περιοδική επέκταση } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ της } f \text{ έχει } \geq k \text{ συνεχείς παραγώγους} \}$.

$$\simeq \{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : F \text{ 1-περιοδική και έχει } \geq k \text{ συνεχείς παραγώγους} \}.$$

- $\mathcal{R}(\mathbb{T}) := \{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : F \text{ 1-περιοδική και η } F|_{[0,1]} \text{ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη} \}$.
- $\iff \int_0^1 F(x) dx \text{ ορίζεται καλά (Riemann)}$

- $\text{Step}(\pi) := \{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : F \text{ 1-περιοδική και η } F|_{[0,1)} \text{ είναι κλιμακωτή} \}$.



- $\forall 1 \leq p \leq +\infty$:

$$L^p(\pi) := \{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : F \text{ 1-περιοδική και η } F|_{[0,1)} \in L^p([0,1)) \} / \sim$$

$F|_{[0,1)}$ είναι Leb. μετρήσιμη, και $\int_{[0,1)} |F|_p d\lambda < +\infty$

$$\text{όπου } f \sim g \iff f = g \text{ κ.σ. λ-σ.π.}$$

$$\text{Ανλ.: } L^p(\pi) \simeq L^p([0,1)) \simeq L^p([0,1])$$

Εφοδισάζουμε των $L^p(\pi)$ με τη νόρμα

$$\|F\|_p := \left(\int_0^1 |F(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = \left(\int_a^{a+1} |F(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p}$$

συχνά: $\|F\|_{L^p(\pi)}$

F 1-περιοδική

$\forall$ διάστημα $[a, b)$ με $b-a=1$.

Συχνά, συμβολίζουμε

$$\|F\|_{L^p(\pi)} \text{ με } \left(\int_{\pi} |F|^p d\lambda \right)^{1/p}$$

$$(\text{εννοώντας } \int_{\mathbb{T}} G d\lambda := \int_0^1 G d\lambda)$$

Πχ: η $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{C}$, με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, $\in L^1(\mathbb{T})$, $\notin C(\mathbb{T})$.

• $p=\infty$: Ορίζουμε

$$L^\infty(\mathbb{T}) := \left\{ F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: F \text{ 1-περιοδική και } F \text{ ουσιαστικά φραγμένη} \right\} / \sim$$

$$\exists M \in \mathbb{R}: |F| \leq M \text{ } \lambda\text{-}\sigma.\pi.$$

η $F|_{[0,1)}$ είναι ουσιαστικά φραγμένη

$$\simeq L^\infty([0,1)),$$

$$\text{όπου } F \sim G \iff F=G \text{ } \lambda\text{-}\sigma.\pi.$$

$$\text{Ορίζουμε } \|F\|_\infty := \text{ess sup } |F|_{[0,1)} \stackrel{!}{=} \text{ess sup } |F|_{[a,b)},$$

$$\forall F \in L^\infty(\mathbb{T}).$$

$\forall [a,b) \text{ με } b-a=1.$

$$\text{Συμβολίζουμε: } \|F\|_{L^\infty(\mathbb{T})} := \|F\|_\infty.$$

F 1-περιοδική

$$\rightarrow \text{Πρόταση: } \bullet \forall 1 \leq p \leq +\infty, \quad \bullet (L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})})$$

είναι χώρος Banach.

• $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

- Ο $(L^2(\pi), \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Hilbert:
- η $\|\cdot\|_{L^2(\pi)}$ είναι η νόρμα που εισάγεται
- and το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\pi)} : (L^2(\pi))^2 \rightarrow \mathbb{C}$
- με: $\langle F, G \rangle_{L^2(\pi)} := \int_{\pi} F(x) \cdot \overline{G(x)} d\lambda(x)$
- $\left(= \int_0^1 F(x) \overline{G(x)} d\lambda(x) \right).$

Απόδειξη: • Οι ισχυρισμοί για όλους τους $L^p(\pi)$ προκύπτουν από τους αντίστοιχους ισχυρισμούς για τους $L^p([0,1]) \simeq L^p([0,1])$.

(Έστω $(f_n)_n$ ακολ. Cauchy στον $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$).

Επεκτείνουμε κάθε f_n στην $\tilde{f}_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$,

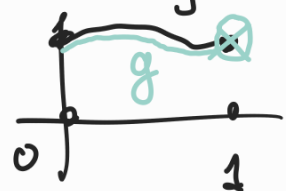
$$\text{με } \tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in [0,1), \\ 0, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Τότε, $(\tilde{f}_n)_n$ είναι ακολ. Cauchy στον

$(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$, άρα $\exists \tilde{g} \in L^p([0,1])$:

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{g}\|_p \rightarrow 0$$

$$\|f_n - g\|_p$$



όπου $\eta \quad g = \tilde{g}|_{[0,1]} \in L^p([0,1])$.

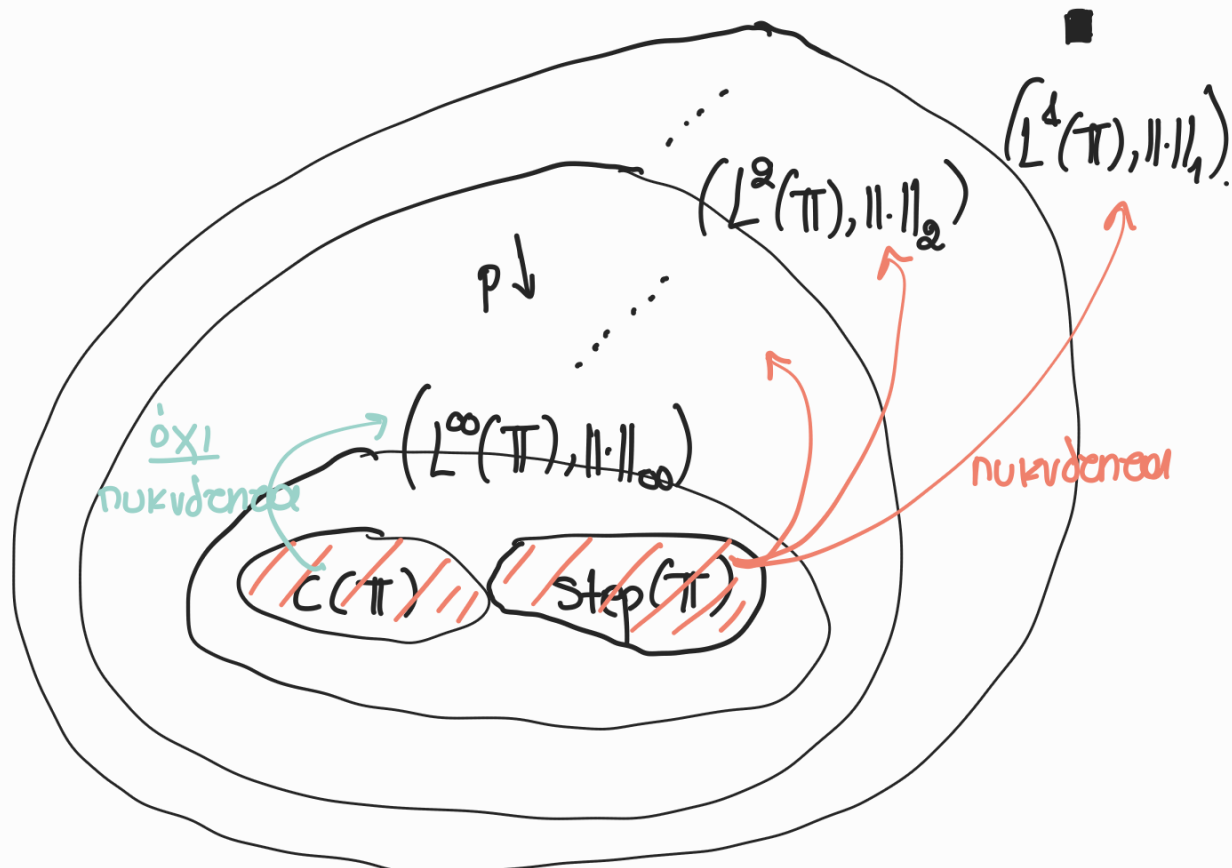
- $C(\pi) \simeq \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ συνεχής, και } f(0)=f(1) \} =: C_0$

$$\forall f, g \in C(\pi), \|f - g\|_\infty = \|f|_{[0,1]} - g|_{[0,1]}\|_\infty$$

Άρα, αρκεί ΝΑΟ ο $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι Banach.

Αυτό ισχύει, επειδή ο C_0 είναι κλειστός υπόχωρος του $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, ο οποίος είναι Banach.

→ Εικόνα:



Παρατηρούμε ότι το $L^2(\pi)$ είναι πυκνό στον $(L^1(\pi), \|\cdot\|_1)$.

→ Ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{T})$:

→ Ορισμός: $\forall n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε

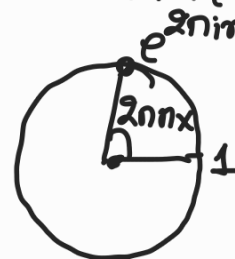
$$\phi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\text{με } \phi_n(x) = e^{2\pi i n x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Το n αποκαλείται η συχνότητα της ϕ_n .

⚠ $\phi_0 = 1$, και $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\phi_n(x) = \cos(2\pi n x) + i \cdot \sin(2\pi n x)$$



Παρατηρήσεις:

① Κάθε ϕ_n είναι 1-περιοδική:

$$\phi_n(x+1) = e^{2\pi i n (x+1)} = e^{2\pi i n x} \cdot \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1, \text{ επειδή } n \in \mathbb{Z}} = e^{2\pi i n x} = \phi_n(x).$$

Καθώς το x τρέχει από 0 ως το 1,
το $2\pi n x$ τρέχει n φορές γύρω από τον κύκλο,
αριστερόστροφα όταν $n > 0$, δεξιόστροφα όταν
 $n < 0$.

② Κάθε $\phi_n \in C(\mathbb{T})$, άρα: $\phi_n \in L^p(\mathbb{T})$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$.

③ Κάθε $\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$, και μάλιστα $\|\phi_n\|_2 = 1$:

$$\|\phi_n\|_2^2 = \int_{[0,1]} |\phi_n|^2 d\lambda = \int_0^1 \underbrace{|e^{2nin x}|^2}_1 dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$(4) \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle_{\pi} = \begin{cases} 1, & \text{av } n=m \\ 0, & \text{av } n \neq m \end{cases} :$$

$$\leadsto \text{Av } n=m, \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle \phi_n, \phi_n \rangle = \|\phi_n\|_2^2 = 1.$$

$$\leadsto \text{Av } n \neq m, \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^1 \phi_n(x) \cdot \overline{\phi_m(x)} dx$$

$$\begin{aligned} & e^{i\theta} \\ & \theta = 2nm x \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 e^{2nin x} \cdot \overline{e^{2nim x}} dx$$

$$= \int_0^1 e^{2nin x} \cdot e^{-2nim x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{2ni(n-m)x} dx$$

$$\underline{n \neq m} \quad \frac{1}{2ni(n-m)} \cdot \int_0^1 \left(e^{2ni(n-m)x} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{2ni(n-m)} \cdot \left[e^{2ni(n-m)x} \right]_0^1 = 0.$$

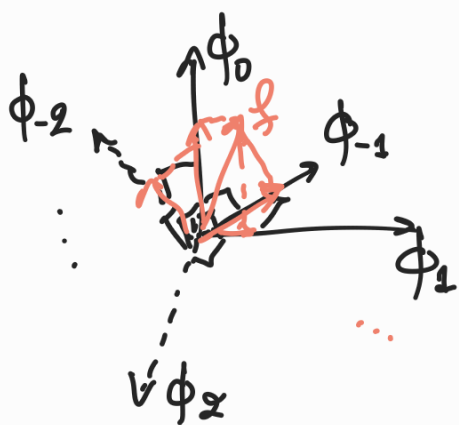
$$\left(\text{v } e^{2ni(n-m)x} = \phi_{n-m} \text{ (circ 1-nep.)} \right)$$

$$\triangle \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \int_0^1 \phi_n = 0 \quad \left(\int_0^1 e^{2nin x} dx = 0 \right).$$

Συμπέρασμα: Το $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί ορθοκανονικό
 σύστημα στον $(L^2(\mathbb{T}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}}, \|\cdot\|_2)$.

(Υπενθύμιση: Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Λέμε ότι ένα
 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, υποσύνολο του X , αποτελεί ορθοκανονικό
σύστημα αν: $\langle x_n, x_m \rangle = \begin{cases} 0, & \forall n \neq m \\ \underbrace{1}_{\substack{\text{δπου } \|\cdot\| \text{ η} \\ \text{επαχόμενη νόρμα}}} & \forall n = m \end{cases}$

$(L^2(\mathbb{T}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$



$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

! (θα
 δείξει)

Μακροπρόθεσμα, θα δείξουμε το εξής:

→ Θεώρημα: Το $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική

βάση του $L^2(\mathbb{T})$, δηλ.: $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$,

έχουμε ότι $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \phi_n$ στον $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$

δπου $c_n = \langle f, \phi_n \rangle \forall n$,

δηλ. $\left\| \sum_{n=-N}^N c_n \phi_n - f \right\|_2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Αν θέλουμε να συνεπαχθείται ότι:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|c_n \phi_n\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\
 \int_0^1 |f|^2 d\lambda &\stackrel{\text{Παράγωγος Θ.}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \cdot \underbrace{\|\phi_n\|_2^2}_1 \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_n \rangle|^2
 \end{aligned}$$

(1/2)

→ Συντελεστές και σειρά Fourier:



→ Ορισμός: Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

$$\int_0^1 |f| d\lambda < +\infty, \\ f \text{ μετρήσιμη}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε

$$\hat{f}(k) := \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x) \quad \left(= \int_0^1 f(x) \cdot \Phi_k(x) d\lambda(x) \right)$$

Ο $\hat{f}(k)$ είναι ο συντελεστής Fourier της f στο k (δηλ. υπολογισμένος στη συχνότητα k).

Η σειρά Fourier της f στο x ορίζεται ως

(η τωική σειρά, δηλ. το σύμβολο)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \cdot e^{2\pi i k x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\text{όπου } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{2\pi i k x},$$

αν το όριο υπάρχει).

Συμβολίζουμε το ότι "η f έχει σειρά Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{στο } x \quad \text{με:}$$

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

(Αυτά δε σημαίνει ότι $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ ισοδύναμο με $f(x)$: μπορεί να ληφθεί η $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ να μην συχλίνει καν.)

Συμβαίει όμως

$$S_N(f; x) := \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

το N -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f στο x .

→ Αναδιατύπωση των στόχων μας:

- (i) Κατά πόσον η $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ καθορίζει την f ;
- (ii) Για ποιές $f \in L^1(\mathbb{T})$, και για ποιά x , ισχύει ότι $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$;

(Δ Αρκούν και αν ισχύει η $\oplus$ σε κάθε x για κάποια f , και ανηλάθουμε την f σε ένα σημείο $x_0 \in (0, 1)$, τότε η σειρά Fourier μένει ίδια, αλλά η f έχει ανηλάθει στο x_0 , άρα

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x_0}$ δεν ισούται με την καινούργια τιμή στο x_0 .)

(ii) ΝΔΟ, $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$,

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) \phi_k \quad (\text{εξήγηση στον } (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)).$$

Αντ. , ΝΔΟ: το $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση στον $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}\|_2,$$

δηλ. $\wedge : (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ είναι ισομετρία.

Σχόλιο: Ξέρουμε πως αν $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

τότε ξέρουμε πως υπάρχει $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υποακολουθία της $(f_n)_n$, με

$$f_{k_n} \rightarrow f \quad \text{κ.σ. σ.π.}$$

Άρα, το ότι (λόγω (iii)) $\|S_N(f; \cdot) - f\|_0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ συνεπάγεται ότι $\exists$ υποακολουθία $(S_{k_N}(f; \cdot))_{N \in \mathbb{N}}$

ώστε $S_N(f; x) \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(x)$ για σχεδόν κάθε x ,
 και όχι ότι $S_N(f; x) \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(x)$ για σχεδόν κάθε $x \dots$

Όμως, ισχύει τελικά πως $\forall f \in L^2(\pi)$,
 πράγματι $S_N(f; x) \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(x)$ για σχεδόν
κάθε x
 Carleson (δε θα δειχθεί).

δηλ., $\forall f \in L^2(\pi)$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$ για
 σχεδόν κάθε x .

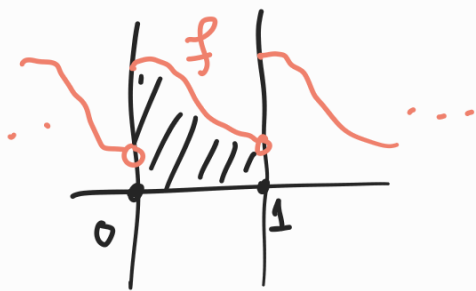
→ Παρατηρήσεις: $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)$

① Το $\hat{f}(k)$ ορίζεται καλά, $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) \cdot e^{-2\pi i k x}| d\lambda x &= \int_0^1 |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-2\pi i k x}|}_{\substack{= \\ 1}} d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} |f| d\lambda < +\infty \quad (f \in L^1(\pi)). \end{aligned}$$

② $\forall f \in L^2(\pi)$, $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) \underbrace{e^{-2\pi i k x}}_{\overline{\phi_k}} d\lambda(x) = \langle f, \phi_k \rangle$.

③ $\hat{f}(0) = \int_0^1 f(x) \cdot \underbrace{e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x}}_{=1} d\lambda(x) = \int_0^1 f(x) d\lambda(x)$



$$= \frac{\int_0^1 f(x) d\lambda(x)}{\lambda([0, 1])}$$

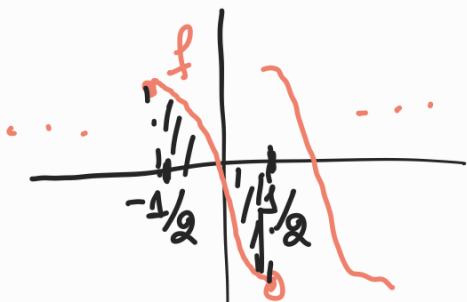
= ο μέσος όρος της f

στο $[0, 1]$.

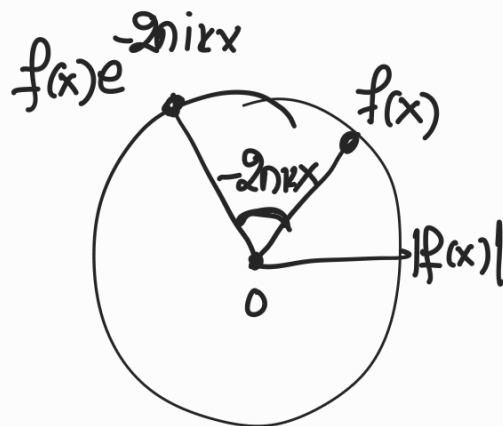
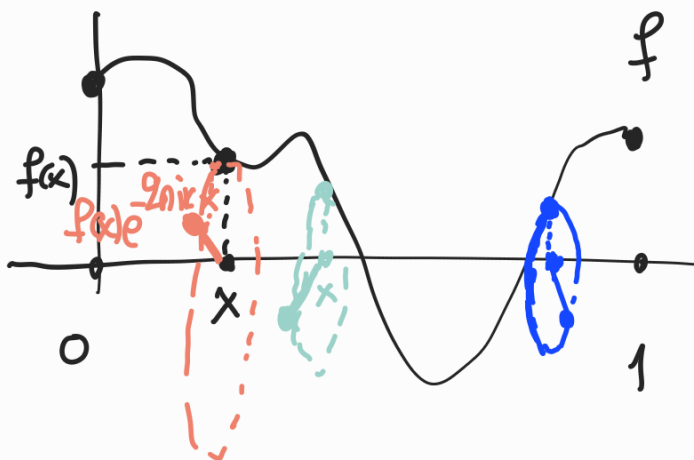
= ο μέσος όρος της f σε οποιοδήποτε $[a, b]$ με $b-a=1$.

π.χ. αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι περιττή,

$$\hat{f}(0) = 0.$$



$$(4) \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i k x} d\lambda(x)$$



Άρα, "επιβουμπ" κατανάλωση το γραφισμα της f ,
και τότε παίρνουμε ολοκλήρωμα πάνω από διάστημα
(μέσο όρο) μήκους 1.

Όσο μεγαλύτερο είναι το r , τόσο πιο "βίαια" σκρίβουμε το γράφημα της f .

$$\left(\begin{array}{l} z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \text{"} r_1 e^{i\theta_1} \text{"} \quad \text{"} r_2 e^{i\theta_2} \text{"} \\ r_1, r_2 > 0 \quad (r_1 = |z_1|, r_2 = |z_2|) \\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \left. \right)$$

⚠ And αυτό παντεύουμε πως $\hat{f}(r) \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \pm\infty$

Αυτό πράγματι ισχύει $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ (Λήμμα Riemann-Lebesgue).