

→ Η μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ Lebesgue-μετρήσιμο}\}.$$

→ Μια $f: \underbrace{(X, \mathcal{A}, \mu)}_{\substack{\text{χώρος} \\ \text{μέτρου}}} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμη

$$\text{αν: } f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}, \quad \forall a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

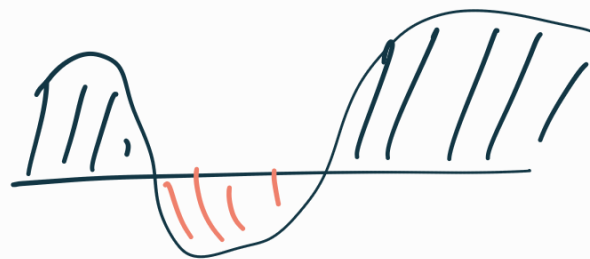
→ Μια $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη

$$\text{αν: η } u := \operatorname{Re} f \text{ και η } v := \operatorname{Im} f$$

είναι μετρήσιμες. ($f = u + iv$)

→ Μια $\overset{\text{μετρήσιμη}}{f}: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται ολοκλήρωσιμη

$$\text{αν: } \int_X |f| d\mu < +\infty.$$



Τότε, ορίζεται το $\int_X f d\mu$, και μάθησες:

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

→ Μια μετρήσιμη $f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολοκλήρωσιμη αν: οι $u := \operatorname{Re} f$ και $v := \operatorname{Im} f$ είναι ολοκλήρωσιμες, δηλ: $\int_X |u| d\mu < +\infty$ και

$\int_X |v| d\mu < +\infty$. Ισχύει, η f είναι ολοκλήρωσιμη $\iff \int_X |f| d\mu < +\infty$:

$\int f = u + iv$, u, v πραγμ. συναρτήσεις $\Rightarrow$
 $|f| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$. Και:

$$|u|, |v| \leq \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \leq |u| + |v|$$

$$\Rightarrow \int_X |u| d\mu, \int_X |v| d\mu \leq \int_X \underbrace{\sqrt{|u|^2 + |v|^2}}_{|f|} d\mu \leq \int_X |u| d\mu + \int_X |v| d\mu$$

Αρα: • Αν $\int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow u, v$ ολοκληρώσιμες $\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη.

• Αν f ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \int_X |u| d\mu + \int_X |v| d\mu < +\infty$
 $\Rightarrow \int_X |f| d\mu < +\infty$

Μήτρικη: $\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$:

Απόδ.: $\int_X f d\mu = r \cdot e^{i\theta}$, για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$
 και $r = \left| \int_X f d\mu \right|$.

$$\begin{aligned}
 \text{Άρα: } \mathbb{R}_{\geq 0} \ni \left| \int_X f d\mu \right| &= r = r e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta} \\
 &= \int_X f d\mu \cdot e^{-i\theta} \\
 &= \int_X \underbrace{f e^{-i\theta}}_{\text{Re}(f e^{-i\theta}) + i \cdot \text{Im}(f e^{-i\theta})} d\mu \in \mathbb{R} \\
 &= \int_X \text{Re}(f e^{-i\theta}) d\mu \geq 0 \\
 &= \left| \int_X \text{Re}(f e^{-i\theta}) d\mu \right| \\
 &\leq \int_X \underbrace{|\text{Re}(f e^{-i\theta})|}_{\leq |f e^{-i\theta}| = |f| \cdot \underbrace{|e^{-i\theta}|}_1 = |f|} d\mu \\
 &\leq \int_X |f| d\mu.
 \end{aligned}$$

→ Οι χώροι L^p , $1 \leq p < +\infty$:

$$\begin{aligned}
 \rightarrow L^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \left\{ f: (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{C} : \right. \\
 &\quad \left. f \text{ μετρήσιμη και } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}
 \end{aligned}$$

όπου: $f \sim g$ αν: $f = g$ μ -σ.η.

(δηλ: $\mu(\{x \in X: f(x) \neq g(x)\}) = 0$).

→ Ορίζουμε $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$,
 $\forall f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

→ $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.

⚠ • $\|f - g\|_p = 0 \iff \int_X |f - g|^p d\mu = 0$

$\iff |f - g| = 0 \text{ } \mu\text{-}\sigma\text{-}\pi.$

$\iff f = g \text{ } \sigma\omega\nu \text{ } L^p(X, \mathcal{A}, \mu).$

• $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Ειδικές περιπτώσεις:

① $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{L}([0, 1]), \lambda) :$

↙ το Lebesgue-μετρήσιμα
υποσύνολα του $[0, 1]$

$L^p([0, 1]) := \left\{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ μετρήσιμη και } \int_{[0, 1]} |f|^p d\lambda < +\infty \right\} \sim$

δπου $f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ } \lambda\text{-}\sigma\chi\epsilon\delta\acute{o}\nu \text{ } \kappa\alpha\iota \text{ } x \in [0, 1].$

$$\|f\|_p := \left(\int_{[0,1]} |f|^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Συν ειδική περίπτωση που για $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι Riemann ολοκλήρωση, τότε

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης: } C([0,1]) &:= \left\{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C} : \right. \\ &\quad \left. f \text{ συνεχής} \right\} \\ &\subseteq L^p([0,1]), \quad \forall 1 \leq p < +\infty. \end{aligned}$$

$$(2) \quad (X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda) \quad . \text{ Τότε:}$$

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \begin{array}{l} f \text{ μετρήσιμη και} \\ \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda < +\infty \end{array} \right\} / \sim$$

$$\begin{aligned} 0 \quad (L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) &\text{ είναι χώρος με νόρμα,} \\ \text{όπου} \quad \|f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

$$\triangle \quad C(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ συνεχής} \right\}.$$

$$0 \quad C(\mathbb{R}) \not\subseteq L^p(\mathbb{R}), \text{ για κανένα } 1 \leq p < +\infty.$$

$$n \quad f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{έχει}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$$

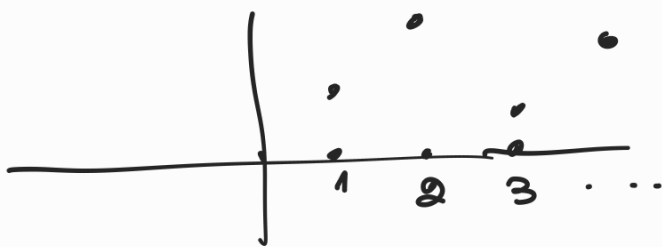
③ $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, όπου ν το μέτρο

ορισμένο: $\nu(A) = \# A$, $\forall A \subseteq \mathbb{N}$:

$$\forall 1 \leq p < +\infty:$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p$$

$$\ell^p := L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu) = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{N}} |f|^p d\nu < +\infty \right\}$$



$$= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right. \\ \left. \text{και} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

Ο $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα, όπου:

$$\forall f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\nu \right)^{1/p} \\ = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p},$$

$$\text{δηλ.} \quad \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

→ Ορισμός: Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης

μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που
 παράγεται από τη $\|\cdot\|$. Ισοδύναμα: αν
 κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που είναι Cauchy
 στον $(X, \|\cdot\|)$ $(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} :$
 $\forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon)$

συγκλίνει στο $(X, \|\cdot\|)$ (δηλ. $\exists \underline{x} \in X$
 ώστε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, δηλ. $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Λήμμα: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε,

ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach



$\forall$ ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X με
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$

συγκλίνει στον X ως προς τη $\|\cdot\|$

(δηλ. $\exists x \in X : \|s_N - x\| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$,

όπου $s_N := \sum_{n=1}^N x_n, \forall N \in \mathbb{N}$).

(δηλ. κάθε ακολουθία συγκλίνουσα σειρά
 στον $(X, \|\cdot\|)$ συγκλίνει στον $(X, \|\cdot\|)$.)

Αντίστροφο: $(\implies)$ $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. ✓

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X , ώστε
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. ΘΑΘ: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει
στον $(X, \|\cdot\|)$,

δηλ. ότι η $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $(X, \|\cdot\|)$,

όπου $s_N := x_1 + \dots + x_N$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Αρκεί (αφού $(X, \|\cdot\|)$ Banach) ΝΑΘ

η $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy
στον $(X, \|\cdot\|)$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\forall n > m$,

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &= \|x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n\| \\ &\leq \|x_{m+1}\| + \|x_{m+2}\| + \dots + \|x_n\| \\ &= |t_n - t_m|, \text{ όπου} \end{aligned}$$

$$t_N := \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_N\|, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$, έχουμε ότι $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$
συγκλίνει στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα είναι Cauchy
στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Άρα, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$,

$$|t_n - t_m| < \varepsilon \implies \|s_n - s_m\| < \varepsilon \text{ ενίσχυση.}$$

$(\impliedby)$ Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον

$(X, \|\cdot\|)$. Θαό η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε

$(X, \|\cdot\|)$. Από η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy,

αρκεί ΝΑΟ έχει υποακολουθία που συγκλίνει
σε $(X, \|\cdot\|)$. Επίσης,

$$\bullet \exists n_1 : \forall n, m \geq n_1, \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \exists n_2 > n_1 : \forall n, m \geq n_2, \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^2}.$$

$$\left(\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet \exists n_3 > n_2 : \forall n, m \geq n_3, \|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^3}$$

$$\left(\|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2} \right)$$

$\vdots$

Έτσι βρίσκουμε $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ υποακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{ώστε: } \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

$$\begin{array}{l} \xRightarrow{\text{υπόθεση}} \sum_{k=1}^{+\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \overset{\text{ως προς}}{\overbrace{\uparrow}} \overset{\text{τη } \|\cdot\|}{=} x, \text{ για κάποιο } x \in X \end{array}$$

Δηλαδή, η $(s_M)_{M \in \mathbb{N}}$, όπου

$$s_M := (\cancel{x_{n_2}} - x_{n_1}) + (\cancel{x_{n_3}} - \cancel{x_{n_2}}) + (\cancel{x_{n_4}} - \cancel{x_{n_3}}) + \dots \\ \dots + (\cancel{x_{n_{M+1}}} - \cancel{x_{n_M}}), \\ = x_{n_{M+1}} - x_{n_1}$$

ικανοποιεί: $\|s_M - x\| \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$,

δηλ. $\|x_{n_{M+1}} - \underbrace{x_{n_1} - x}_{-(x_{n_1} + x)}\| \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$,

δηλ. $x_{n_{M+1}} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} x_{n_1} + x \in X$.

Άρα, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει υποκολουθία $(x_{n_M})_{M \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει στον $(X, \|\cdot\|)$.



→ Θεώρημα: $\forall 1 \leq p < +\infty$, $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.

Δηλ: Για κάθε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. Cauchy στον $(L^p, \|\cdot\|_p)$, υπάρχει $f \in L^p$ ώστε $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Απόδ.: Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολ. στον $L^p := L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$. Θάκο $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει

σε κάποια $f \in L^p$ (ως προς την $\|\cdot\|_p$).

Βήμα 1: ΘΔΟ $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{f_n(x)}_{\in \mathbb{C}}$ συγκλίνει για μ -σχεδόν κάθε $x \in X$.

Από το Λήμμα, αφού ο $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ είναι χώρος

Banach, αρκεί ΝΔΟ $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$

για μ -σχεδόν κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $F : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow [0, +\infty]$
με $F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \quad \forall x \in X$.

Παρατηρούμε ότι $F^p \geq 0$, άρα για ΝΔΟ
 $F^p < +\infty$ μ -σ.π., αρκεί ΝΔΟ $\int_X F^p d\mu < +\infty$

Και αυτό ισχύει: $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = |f_1| + |f_2| + \dots + |f_N| \quad \forall N \in \mathbb{N}, \text{ και:}$$

$$0 \leq S_N^p \nearrow F^p, \text{ άρα, από το Θ. Morderns}$$

Σύγκλισης, έχουμε:

$$\underbrace{\left(\int_X F^p d\mu \right)^{1/p}}_{\|F\|_p} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\int_X S_N^p d\mu \right)^{1/p}}_{\|S_N\|_p} \leq M, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty \right)$$

και ως: $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|s_N\|_p = \| |f_1| + \dots + |f_N| \|_p$

$$\leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_N\|_p$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p =: M < +\infty.$$

Άρα, $\int_X f^p d\mu \leq M^p < +\infty$

$$\xrightarrow{f \geq 0} f^p < +\infty \quad \mu\text{-σ.π.}$$

$$\longrightarrow f < +\infty \quad \mu\text{-σ.π.}$$

Λείπει να δείξουμε ότι $\exists f: (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$, ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } x \in X.$$

Βήμα 2: Θάδο $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$ στον L^p , δηλαδή:

αν $t_N := f_1 + \dots + f_N, \quad \forall N \in \mathbb{N},$

τότε $\|t_N - f\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ και $f \in L^p$.

• Δείχνουμε ότι $t_n \rightarrow f$ κ.σ. $\mu\text{-σ.π.}$

Θέλουμε: $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. Χρησιμοποιούμε:

$$|t_n|^p \rightarrow |f|^p \quad \text{κ.σ. } \mu\text{-σ.π.}$$

Επίσης: $|t_n|^p = |f_1 + \dots + f_N|^p \leq (|f_1| + \dots + |f_N|)^p$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|^p \right)^p = F^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

and προηγούμενο βήμα.

και : $\int_X |F^p| d\mu = \int_X F^p d\mu < +\infty$, πάλι, and
προηγούμενο βήμα.

Αρα, and Θ. κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\int_X |f|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_X |t_n|^p d\mu}_{\leq \int_X F^p d\mu} \leq \int_X F^p d\mu < +\infty.$$

Αρα, $f \in L^p$. (και κάθε $t_n \in L^p$).

• Θέλουμε: $\|t_n - f\|_p \rightarrow 0$, δηλ.

$$\int_X |t_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\rightsquigarrow t_n \rightarrow f \text{ κ.σ. } \mu\text{-σ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |t_n - f|^p \rightarrow 0 \text{ κ.σ. } \mu\text{-σ}.$$

$$\rightsquigarrow \forall n \in \mathbb{N}, |t_n - f|^p \leq (|t_n| + |f|)^p$$

$$\leq \left(2 \cdot \max\{|t_n|, |f|\} \right)^p$$

$$= 2^p \cdot \max\{|t_n|^p, |f|^p\}$$

$$\leq 2^p \cdot (|t_n|^p + |f|^p).$$

$$\leq 2^p \cdot (F^p + |f|^p), \text{ και}$$

$$\int_X 2^p \cdot (F^p + |f|^p) d\mu = 2^p \cdot \int_X F^p d\mu + 2^p \cdot \int_X |f|^p d\mu$$

$< +\infty$.

'Apo, and Θ . Kup. Significations,

$$\int_X |tn-f|^p d\mu \longrightarrow \int_X 0 d\mu = 0.$$