

Ασκήσεις στη διάσταση Hausdorff

1. Δείξτε τις εξής ιδιότητες της διάστασης Hausdorff:

a) Έστω $A \subseteq B$ στον $\mathbb{R}^d$. Τότε, $\dim_H A \leq \dim_H B$.

b) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, με $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε, $\dim_H A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim_H A_n$.

(Παρατηρήστε ότι αυτό ισχύει και όταν τα A_n είναι πεπερασμένα το πλήθος.)

2. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με μέτρο Lebesgue ίσο με 0, και διάσταση Hausdorff ίση με 1.

(Θυμόμαστε ότι, στον $\mathbb{R}^d$, σύνολα με θετικό μέτρο Lebesgue έχουν πλήρη διάσταση. Εδώ βλέπουμε ότι είναι δυνατόν η διάσταση να είναι πλήρης ακόμη και αν το μέτρο Lebesgue είναι 0.)

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz-συνεχής, με σταθερά Lipschitz $M \in [0, +\infty)$ (δηλαδή με $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$ για κάθε $x, y \in A$). Δείξτε ότι

$$H^s(f(A)) \leq M^s \cdot H^s(A), \quad \text{για κάθε } s \geq 0$$

και ότι

$$\dim_H f(A) \leq \dim_H A.$$

4. Έστω Π επίπεδο διάστασης k στον $\mathbb{R}^d$. Συμβολίζουμε με proj_Π την ορθογώνια προβολή των στοιχείων του $\mathbb{R}^d$ πάνω στο Π . Δείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$H^s(\text{proj}_\Pi(A)) \leq H^s(A) \quad \text{για κάθε } s \geq 0,$$

και

$$\dim_H \text{proj}_\Pi(A) \leq \dim_H A \quad \text{για κάθε } A \subseteq \mathbb{R}^d.$$

5. Δείξτε ότι το σύνολο $B := \{x^2 : x \in C\}$ έχει $\dim_H B \leq \frac{\log 2}{\log 3}$.

6. a) Έστω $s \geq 0$. Ένα μέτρο μ στη Borel σ -άλγεβρα του $\mathbb{R}^d$ λέγεται *μέτρο Frostman διάστασης* $\geq s$ αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\mu(B(x, r)) \leq c \cdot r^s, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^d \text{ και } r > 0.$$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι, αν υπάρχει μέτρο Frostman μ , διάστασης $\geq s$, ώστε $\mu(A) > 0$, τότε ισχύει και ότι $H^s(A) > 0$ (και άρα $\dim_H A \geq s$).

b) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, εξηγήστε ότι κάθε λεία k -διάστατη (με την έννοια της διαφορικής γεωμετρίας) πολλαπλότητα Σ στον $\mathbb{R}^d$ έχει $\dim_H \Sigma \geq k$.

7. Βρείτε τη διάσταση της χιονονιφάδας του Koch.

8. Έστω Γ συνεχής, απλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^d$ (όχι αναγκαστικά παραγωγίσιμη), με **πεπερασμένο** μήκος.

Συγκεκριμένα, το μήκος L της Γ ορίζεται ως το supremum των μηκών των πολυγωνικών γραμμών με κορυφές πάνω στη Γ . Δηλαδή, παίρνοντας κάποια παραμέτρηση $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ της Γ ,

$$L := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N} \text{ και } a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}.$$

Δείξτε ότι $H^1(\Gamma) = \frac{1}{2}L$ (και άρα $\dim_H \Gamma = 1$).

(Συγκρίνετε αυτό το αποτέλεσμα με το προηγούμενο για τη χιονονιφάδα του Koch: αυτή ήταν μια καμπύλη απείρου μήκους, με διάσταση Hausdorff μεγαλύτερη του 1.)