

Ανάλυση II, Φυλλάδιο 2

Προθεσμία παράδοσης: 28 Μαΐου 2025. Παραδίδετε 5 από τις ασκήσεις.

1. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπικά κυρτός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία ημινορμών που παράγει την $\mathcal{T}$. Ο στόχος αυτής της άσκησης είναι ναδειχθεί ότι ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετριοποιήσιμος.

Έστω $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $(0, +\infty)$ με $c_n \rightarrow 0$. Σάς δίνεται (δε χρειάζεται να το αποδείξετε) ότι η $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$d(x, y) := \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)} \quad \text{για κάθε } x, y \in X,$$

είναι καλά ορισμένη μετρική στον X .

- a) Έστω $0 < \varepsilon < \max_{n \in \mathbb{N}} c_n$ και $x \in X$. Δείξτε ότι $d(x, 0) < \varepsilon$ αν και μόνο αν

$$p_n(x) < \frac{\varepsilon}{c_n - \varepsilon} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \varepsilon < c_n.$$

- b) Δείξτε ότι η οικογένεια των ανοιχτών μπαλών $\{B(0, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < \max_{n \in \mathbb{N}} c_n\}$, όπου $B(0, \varepsilon) := \{x \in X : d(x, 0) < \varepsilon\}$, αποτελεί βάση περιοχών της $\mathcal{T}$.
- c) Εξηγήστε γιατί ο $(X, \mathcal{T})$ είναι μετριοποιήσιμος.

2. Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό.

- a) Έστω $x \in K$. Δείξτε ότι $x \in \text{ex}(K)$ αν και μόνο αν: για κάθε $y, z \in K$ με $x = \frac{y+z}{2}$, έχουμε ότι $y = z = x$.
- b) Έστω ότι ο X είναι εφοδιασμένος με μία νόρμα $\|\cdot\|$, και ότι το K είναι συμπαγές στον $(X, \|\cdot\|)$. Δείξτε ότι

$$K \setminus \text{ex}(K) = \left\{ x \in K : x = \frac{y+z}{2} \text{ για κάποια } y, z \in K \text{ με } \|y - z\| > 0 \right\}$$

και ότι το $\text{ex}(K)$ είναι G_δ -σύνολο μέσα στο K (δηλαδή, ότι το $\text{ex}(K)$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών υποσυνόλων του K [με τη σχετική τοπολογία]).

(Υπόδειξη: Δείξτε ότι το $K \setminus \text{ex}(K)$ είναι F_σ , δηλαδή αριθμήσιμη ένωση κλειστών.)

3. a) Δείξτε ότι $\text{ex}(\widetilde{B}_{\ell^\infty}) = \{x \in \ell^\infty : |x(i)| = 1 \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}\}$.
- b) Έστω $X := C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$. Βρείτε τα στοιχεία του συνόλου $\text{ex}(\widetilde{B}_X)$, και χρησιμοποιήστε το θεώρημα Krein-Milman για να αποφανθείτε ότι ο $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι αυτοπαθής, και επιπλέον ότι δεν είναι ο δυϊκός κανενός χώρου.

4. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, και έστω $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο των κανονικών μέτρων πιθανότητας $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ (όπου με $\mathcal{B}(X)$ συμβολίζουμε τη Borel σ -άλγεβρα στον X). Δείξτε ότι

$$ex(\mathcal{M}(X)) = \{\delta_x : x \in X\},$$

όπου το δ_x είναι το μέτρο Dirac στο $x \in X$, δηλαδή $\delta_x : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ με $\delta_x(A) = 0$ αν $x \notin A$ και $\delta_x(A) = 1$ αν $x \in A$.

(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι, αν $\mu \in ex(\mathcal{M}(X))$, τότε κάθε Borel σύνολο $C \subseteq X$ ικανοποιεί ή ότι $\mu(C) = 0$ ή ότι $\mu(C) = 1$.)

5. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε το μέτρο Borel μ_n στο $[0, 1]$ ως

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$$

(όπου με δ_x συμβολίζουμε το μέτρο Dirac στο $x \in [0, 1]$). Βρείτε το w^* -όριο της ακολουθίας $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. a) Δείξτε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος ενός αυτοπαθούς χώρου $(Y, \|\cdot\|)$ είναι επίσης αυτοπαθής.
b) Έστω K άπειρο, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Σταθεροποιούμε μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του K , και ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $T : \ell^1 \rightarrow C(K)^*$ ως εξής: για κάθε $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \ell^1$,

$$T(y)(f) := \sum_{n=1}^{+\infty} y_n f(x_n) \quad \text{για κάθε } f \in C(K).$$

- (i) Δείξτε ότι πράγματι $T(y) \in C(K)^*$ για κάθε $y \in \ell^1$.
(ii) Δείξτε ότι η T είναι ισομετρία.
(iii) Δείξτε ότι ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι αυτοπαθής.
7. a) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $x \in X$, και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} x$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X , με $y_n \in \text{conv}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.
b) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ αυτοπαθής, με την ιδιότητα ότι η $(\widetilde{B}_X, w)$ είναι μετριοποιήσιμη. Έστω $K \subset X$ $\|\cdot\|$ -κλειστό, κυρτό και φραγμένο, και έστω $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή¹ και $\|\cdot\|$ -συνεχής. Δείξτε ότι, αν η f είναι κάτω φραγμένη, τότε έχει ελάχιστη τιμή.
Υπόδειξη: Το (a) μπορεί να φανεί χρήσιμο εδώ.

¹Λέγοντας ότι η f είναι κυρτή εννοούμε ότι $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $t \in [0, 1]$. Επαγωγικά, η ανάλογη ανισότητα ισχύει για κυρτούς συνδυασμούς τυχαίων στοιχείων του X .