



$$(X^*, w^*)$$

: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Έχουμε δει ότι η $\tau: X \hookrightarrow X^{**}$,

$$\text{με } \tau(x): X^* \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\tau(x)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*,$$

είναι ισομετρική εμφύτευση του X μέσα στον X^{**} .

Δηλ., $\forall x \in X$, η γρ. $\tau(x): (X^*, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής

νόρμες τελεστών

$$(\text{δηλ. } \tau(x) \in X^{**}) \quad \text{και} \quad \|\tau(x)\| = \|x\|.$$

νόρμα στον X .

Υπενθυμίζουμε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **αυτοσυνώνης** αν η τ είναι επί (δηλ. $\tau(X) = X^{**}$), δηλ. αν κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f: (X^*, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι υπολογισμός κάθε $x^* \in X^*$ σε κάποιο σημείο του X .

- Ορίσαμε την w^* -τοπολογία στον X^* ως τη μικρότερη τοπολογία τ στον X^* ώστε κάθε $\tau(x): (X^*, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής, $\forall x \in X$
(δηλ., ως τη μικρότερη τοπολογία τ στον X^* που περιέχει ως $(\tau(x))^{-1}(U)$, $\forall U \subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$ ανοικτό, $\forall x \in X$). Άρα:

$\rightsquigarrow \tau_{w^*} \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$: Αν A w^* -ανοιχτό $\subseteq X^*$,
 τότε A $\|\cdot\|$ -ανοιχτό, αφού κάθε
 μία από τις παραπάνω αντιστροφές
 εικότες είναι $\|\cdot\|$ -ανοιχτή στον X^*

(αφού κάθε $\tau(x): (X^*, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής, $\forall x \in X$).

$$\rightsquigarrow \tau(X) \subseteq (X^*, w^*)^*$$

● Έχουμε δει ότι, $\forall x_0^* \in X^*$, $\mathcal{U}_{x_0^*} = x_0^* + \mathcal{U}_0$, και ότι η

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X^*: \underbrace{|x^*(x_i)|}_{\tau(x_i)(x^*)} < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του $0 \in X^*$. Άρα, n

$$B_{x_0^*} := x_0^* + B_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x^* \in X^* : \underbrace{|x^*(x_i) - x_0^*(x_i)|}_{\tau(x_i)(x^* - x_0^*)} < \varepsilon \} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του x_0^* , $\forall x_0^* \in X^*$.

Άρα, ο (X^*, w^*) είναι **τοπικά κυρτός**, με τοπολογία την αδρανή
τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{P} := \{|\tau(x)| : x \in X\}$
ημινορμών στον X^* .

⊙ $\tau(X) = (X^*, w^*)^*$:

$\boxed{\subseteq}$: Έχει ελεγχθεί, προκύπτει από τον ορισμό της w^* -τοπολογίας.

$\boxed{\supseteq}$: Έστω $f \in (X^*, w^*)^*$, δηλ. $f: (X^*, w^*) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχής. Αφού $\circ (X^*, w^*)$ είναι τοπικό κυρτός, και

η w^* -τοπολογία παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{P} = \{| \tau(x) | : x \in X\}$ ημινορμών στον X^* , $\exists n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ και $c > 0$ ώστε:

$$|f| \leq c \cdot (|\tau(x_1)| + \dots + |\tau(x_n)|),$$

δηλ. ώστε: $|f(x^*)| \leq c \cdot (|\tau(x_1)(x^*)| + \dots + |\tau(x_n)(x^*)|), \forall x^* \in X^*$.

Άρα, $\bigcap_{i=1}^n \ker \tau(x_i) \subseteq \ker f$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ με } \boxed{f = \lambda_1 \tau(x_1) + \dots + \lambda_n \tau(x_n)} \\ = \tau(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \in \tau(X).$$



Στο παραπάνω χρησιμοποιήθηκε το εξής Λήμμα:

→ Λήμμα: Έστω $g, f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{K}$ γραμμικές, με $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i \subseteq \ker g$. Τότε,

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε: $g = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$.

Απόδ.: Αποδείξτε ότι ισχύουν τα σημειώματα του Α. Γαυρόπουλου. ■

⊙ Τι σημαίνει ω^* -σύγκλιση; Έστω $(x_i^*)_{i \in I}$ δίκτυο στον X^* , και $x_0^* \in X^*$. Τότε:

$$x_i^* \xrightarrow{\omega^*} x_0^* \iff \underbrace{x_i^*(x)}_{\tau(x)(x_i^*)} \xrightarrow{1.1} \underbrace{x_0^*(x)}_{\tau(x)(x_0^*)}, \quad \forall x \in X.$$

Απλ. : αδυνάτης* σύγκλιση σημαίνει σύγκλιση κατά σημείο. 

 Αυτό δείχνει και πόσο πιο "αδύναμη" είναι η αδυνάτης* σύγκλιση σε σχέση με τη $\|\cdot\|$ -σύγκλιση στον X^* .

Αποδ. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $x_i^* \xrightarrow{w^*} x_0^* \quad \forall x \in X$,
 η $\tau(x) : (X^*, w^*) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ είναι συνεχής,
 άρα $\underbrace{\tau(x)(x_i^*)}_{\parallel \text{ } \parallel \text{ } x_i^*(x)} \longrightarrow \underbrace{\tau(x)(x_0^*)}_{\parallel \text{ } \parallel \text{ } x_0^*(x)}$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $x_i^{\#}(x) \xrightarrow{|\cdot|} x_0^{\#}(x), \forall x \in X$.

ΘΔΟ $x_i^{\#} \xrightarrow{w^{\#}} x_0^{\#}$.

Έστω $\mathcal{U}$ $w^{\#}$ -περιοχή του $x_0^{\#}$ στον $X^{\#}$.

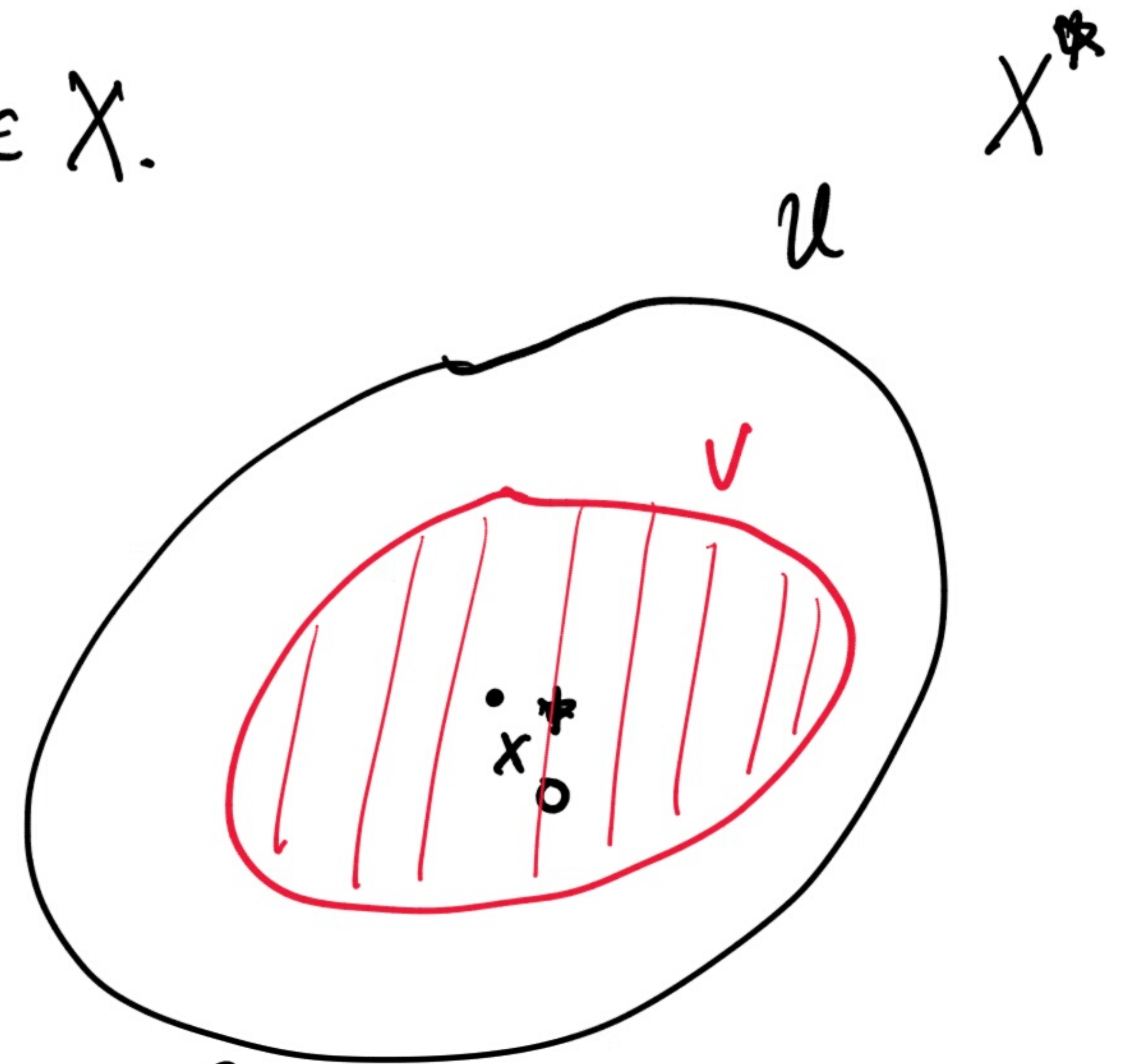
ΘΔΟ για μεγάλα $i \in I$, $x_i^{\#} \in \mathcal{U}$:

$\exists n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$V := \bigcap_{j=1}^n \{x^{\#} \in X^{\#} : |x^{\#}(x_j) - x_0^{\#}(x_j)| < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}.$$

$\forall j=1, \dots, n, x_i^{\#}(x_j) \xrightarrow{|\cdot|} x_0^{\#}(x_j) \implies \exists \kappa_j \in I$ ώστε,

$$\forall \kappa \geq \kappa_j, |x_{\kappa}^{\#}(x_j) - x_0^{\#}(x_j)| < \varepsilon.$$



Επιλέγουμε $k_0 \in I$ ώστε $k_0 \geq k_1, \dots, k_0 \geq k_n$

(υπάρχει τέτοιο k_0 , καθώς το $(I, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο).

Τότε, $\forall k \geq k_0$, έχουμε ότι
$$\left\{ \begin{array}{l} |x_k^*(x_1) - x_0^*(x_1)| < \varepsilon \\ \vdots \\ |x_k^*(x_n) - x_0^*(x_n)| < \varepsilon \end{array} \right\},$$

άρα ότι $x_k^* \in V \subseteq \mathcal{U}$.

■

⊙ Η w^* -τοπολογία αποδίδει συμπαγεια σε σπραντα $\subseteq X^*$.

! → Θεώρημα (Alaoglu): Η $(\tilde{B}_{X^*}, w^*)$ είναι συμπαγής.



Σε οποιοδήποτε $(Y, \|\cdot\|)$ χώρο με νόρμα,

η $\tilde{B}_Y$ είναι $\|\cdot\|$ -συμπαγής $\iff \dim Y < +\infty$.

Ενίς, $\dim X^* < +\infty \iff \dim X < +\infty$. Άρα, οποτεδήποτε

$\dim X = +\infty$, η $\tilde{B}_{X^*}$ δεν είναι $\|\cdot\|$ -συμπαγής. Είναι όμως w^* -συμπαγής. Άρα, κάθε διάνυσμα έχει w^* -συγκλίνον υποδίκτυο, κλπ.

→ Υπενθυμίζουμε ηρώτα καί που θα χρειαστεί στην ανόδειξη:

Η τοπολογία γινόμενο: Έστω (X_i, τ_i) τ.χ. $\forall i \in I$, όπου το I είναι κάποιο σύνολο δεικτών.

Ορίζουμε την τοπολογία γινόμενο τ_{prod} στον $X := \prod_{i \in I} X_i$

ως τη μικρότερη τοπολογία τ στον X ώστε κάθε προβολή

$\pi_i: (X, \tau) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$ να είναι συνεχής. Δηλ.,

$\tau_{\text{prod}} :=$ η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει ως
 $\pi_i^{-1}(U_i)$, $\forall i \in I$, $\forall U_i \in \tau_i$.

Η τ_{prod} αποκαλείται και η **τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης** στον X , καθώς ένα δίκτυο συγκλίνει στον

$(X, \tau_{\text{prod}}) \iff$ συγκλίνει κατά συντεταγμένη.

! $\rightarrow$ Ανδδ. (του **Θ. Alaoglu**): Θεωρούμε την απεικόνιση

$$G : (\tilde{B}_{X^*}, w^*) \longrightarrow \left(\prod_{x \in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|), \tau_{\text{prod}} \right),$$

$$x^* \longrightarrow \underbrace{(x^*(x))_{x \in X}}_{\text{το σύνολο τιμών του } x^*, \text{ "διατεταγμένο"}}$$

το σύνολο τιμών του x^* , "διατεταγμένο".

• Η G είναι καλά ορισμένη:

$$\forall x^* \in \tilde{B}_{X^*}, \text{ ισχύει ότι } G(x^*) \in \prod_{x \in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|),$$

καθώς, $\forall x \in X, |x^*(x)| \leq \underbrace{\|x^*\|}_{\leq 1} \cdot \|x\| \leq \|x\|$, και άρα $x^*(x) \in \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$.

• Η G είναι 1-1:

$$\text{Για } x_1^*, x_2^* \in \tilde{B}_{X^*}, \quad G(x_1^*) = G(x_2^*) \Rightarrow (x_1^*(x))_{x \in X} = (x_2^*(x))_{x \in X}$$

$$\Rightarrow x_1^*(x) = x_2^*(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow x_1^* = x_2^*.$$

• Η $\mathcal{G}$ είναι αμφισυνεχής, δηλ. $\underbrace{x_i^\# \xrightarrow{w^\#} x_0^\#}_{\text{στον } \tilde{B}_{X^\#}} \iff \underbrace{\mathcal{G}(x_i^\#) \xrightarrow{\tau_{\text{prod}}} \mathcal{G}(x_0^\#)}_{\text{στον } \prod_{x \in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)}$:

Έστω $(x_i^\#)_{i \in I}$ δίκτυο στον $\tilde{B}_{X^\#}$, και έστω $x_0^\# \in \tilde{B}_{X^\#}$. Τότε:

$$\begin{aligned} x_i^\# \xrightarrow{w^\#} x_0^\# &\iff x_i^\#(x) \rightarrow x_0^\#(x) \quad \forall x \in X \\ &\iff \mathcal{G}(x_i^\#) \xrightarrow{\tau_{\text{prod}}} \mathcal{G}(x_0^\#). \end{aligned}$$

• And Θ. Tychonoff, ο $Y := \left(\prod_{x \in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|), \tau_{\text{prod}} \right)$ είναι συμπαγής.

Άρα, αρκεί ΝΔΟ $\mathcal{G}(\tilde{B}_{X^\#})$ κλειστό στον Y . (Πράγματι, τότε

θα ισχύει και ότι $\mathcal{G}(\tilde{B}_{X^*})$ συμπαγές στον $\mathcal{Y}$,

και άρα η $\tilde{B}_{X^*} = \underbrace{\mathcal{G}^{-1}}_{\substack{\text{συνεχής στον } \mathcal{Y}}} \left(\underbrace{\mathcal{G}(\tilde{B}_{X^*})}_{\text{συμπαγές στον } \mathcal{Y}} \right)$ θα είναι w^* -συμπαγής.

↓
συνεχής: $\mathcal{Y} \rightarrow (B_{X^*}, w^*)$

Έστω ακολουθία $(x_i^*)_{i \in I}$ δίκτυο στην $\mathcal{G}(\tilde{B}_{X^*})$, με $\mathcal{G}(x_i^*) \xrightarrow{\tau_{\text{prod}}} (\lambda_x)_{x \in X}$,

για κάποιο $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{Y} = \prod_{x \in X} \tilde{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$. Θάδο $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{G}(\tilde{B}_{X^*})$.

Πράγματι: $\underbrace{\mathcal{G}(x_i^*)}_{(x_i^*(x))_{x \in X}} \xrightarrow{\tau_{\text{prod}}} (\lambda_x)_{x \in X} \implies \forall x \in X, \quad x_i^*(x) \xrightarrow{1.1} \lambda_x.$

Ορίζουμε $x^* : X \rightarrow \mathbb{K}$ με
 $x^*(x) := \lambda_x, \quad \forall x \in X.$

Τότε :

• x^* γραμμική, ως κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων.

• $x^* \in \tilde{B}_{X^*} : \quad \forall x \in X, \quad |x^*(x)| = |\lambda_x| = \left| \lim x_i^*(x) \right|$
 $\leq \sup_{i \in I} \underbrace{|x_i^*(x)|}_{\leq} \leq \|x\|.$
 $\underbrace{\|x_i^*\|}_{\leq 1} \cdot \|x\| \leq \|x\|$

Άρα, $x^* \in \tilde{B}_{X^*}.$

Επομένως, $(\hat{\lambda}_x)_{x \in X} = (x^\#(x))_{x \in X} = G(x^\#) \in G(\tilde{B}_{X^\#})$. ■

→ Άσκηση: Έστω $1 < p < +\infty$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. ΝΔΟ $\exists$ $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ υποακολουθία της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ώστε: $\forall$ κύβο Q στον $\mathbb{R}^n$ και $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ (όπου $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$),

να ισχύει ότι :

$$\frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f_{k_n} g \, d\lambda \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{1.1} \frac{1}{\lambda(Q)} \cdot \int_Q f \cdot g \, d\lambda.$$

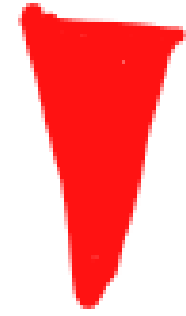
Λύση: Θυμηθείτε ότι η $T: (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p) \longrightarrow ((L^q(\mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|)$
 $f \longrightarrow T_f$, όπου

$$T_f(g) = \int f g d\lambda \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}^n), \text{ είναι ισομετρία και επι.}$$

Άρα, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη στον $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$

$\Rightarrow (T_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ φραγμένη στον $((L^q(\mathbb{R}^n))^*, \|\cdot\|)$

$\Rightarrow \exists M > 0 : T_{f_n} \in \underbrace{\widetilde{B}_{(L^q(\mathbb{R}^n))^*}}_{W^*-\text{συμπαγής}}(0, M)$

$\Rightarrow \exists$ υποακολουθία  $(T_{f_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$T_{f_{k_n}} \xrightarrow{\omega^*} x^*, \quad \text{για κάποιο } x^* \in (L^q(\mathbb{R}^n))^*.$$

Ξέρουμε ότι $x^* = T_f$, για κάποια $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Άρα, } T_{f_{k_n}} \xrightarrow{\omega^*} T_f \implies T_{f_{k_n}}(h) \longrightarrow T_f(h), \quad \forall h \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{δηλ. } \int f_{k_n} h \, d\lambda \longrightarrow \int f h \, d\lambda, \quad \forall h \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Αφού $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και Q κύβος στον $\mathbb{R}^n$ η $\frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\text{η προκύπτει ότι } \int f_{k_n} \frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \, d\lambda \xrightarrow{||\cdot||} \int f \frac{1}{\lambda(Q)} g \chi_Q \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

! Το ότι η ακολουθία $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει σε ένα w^* -συμπαγές
 ωστόση σημαίνει ότι έχει w^* -συγκλίνον υποδίκτυο, και όχι
 a priori w^* -συγκλίνουσα υποακολουθία.

Οέως, σεη προκειμένη περίπτωση, η $(\tilde{B}_{(L^q(\mathbb{R}^n))^*}(0, M), w^*)$
 είναι μετρικοποιήσιμη, και άρα η $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει ότως
 w^* -συγκλίνουσα υποακολουθία. Συγκεκριμένα, θα δούμε σε
 μέλλον ότι, για κάθε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$:

- Η $(\tilde{B}_{X^*}, w^*)$ είναι μετρικοποιήσιμη $\iff \circ (X, \|\cdot\|)$
 είναι διαχωρίσιμος,
- και
 • Η $(\tilde{B}_X, w)$ είναι μετρικοποιήσιμη $\iff \circ (X^*, \|\cdot\|)$
 είναι διαχωρίσιμος.

Εδώ, $p \neq 1 \implies q \neq +\infty \implies \circ (L^q(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_q)$ είναι
 διαχωρίσιμος, άρα η

$$(\tilde{B}_{(L^q(\mathbb{R}^n))^*}(0, M), w^*)$$

είναι μετρικοποιήσιμη.

⊙ Φραγμένα σύνολα στον $(X^*, \|\cdot\|)$:

→ Πρόταση: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach, και $A \subseteq X^*$. Τότε:

Το A είναι $\|\cdot\|$ -φραγμένο $\iff \{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$,
 $\forall x \in X$.
 $\downarrow$
νόρμα τελεστών

→ Απόδ.: $(\implies)$ A $\|\cdot\|$ φραγμένο $\implies \exists M > 0 : \|x^*\| \leq M \ \forall x^* \in A$.

Άρα, $\forall x \in X : |x^*(x)| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x^* \in A$
 $\implies \{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο.

$(\impliedby)$ $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ φραγμένο $\forall x \in X$, δηλ.

$\forall x \in X$, ισχύει ότι $\sup \{ |x^*(x)| : x^* \in A \} < +\infty$

$\implies$

$\sup \{ \|x^*\| : x^* \in A \} < +\infty$, δηλ. A $\|\cdot\|$ -φραγμένο.

Αρχή

Ομοιομορφου

Φράγματος

($X, \|\cdot\|$) Banach)

■