

Άρα, $f(y_0) = \lambda a$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| = 1$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot y_0\right) = a, \text{ όπου } \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 1, y_0 \in W \xrightarrow[\text{ισορρ.}]{W} \frac{1}{\lambda} y_0 \in W.$$

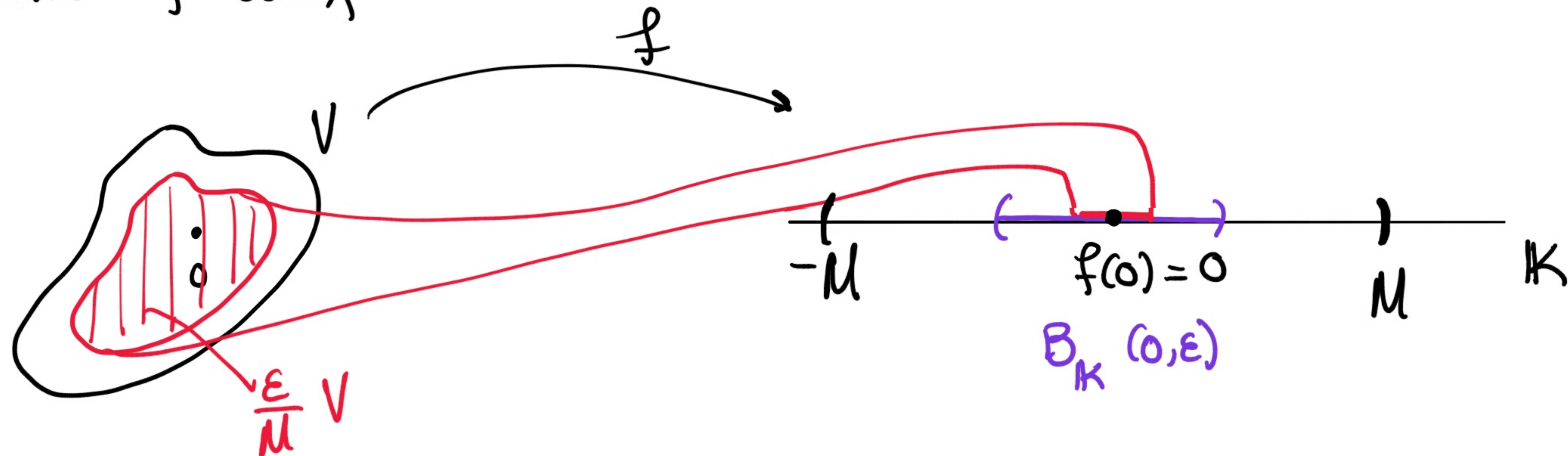
Αφού $(x + V_0) \cap \ker f = \emptyset$ (✖), είναι αδύνατον να ισχύει ότι

$$f(V_0) = \mathbb{K} \quad (\text{γιατί τότε θα είχαμε και } f(x + V_0) = f(x) + f(V_0) = \mathbb{K}).$$

Άρα, $f(V_0)$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

(δ) $\Rightarrow$ (ε): Υπάρχει $V \in \mathcal{V}_0$ ώστε $f(V)$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Θα δώ f συνεχής στο $0 \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$.



$$\exists M > \varepsilon : f(V) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, M)$$

$$\longrightarrow f\left(\frac{\varepsilon}{M} \cdot V\right) = \frac{\varepsilon}{M} \cdot f(V) \subseteq \frac{\varepsilon}{M} \cdot B_{\mathbb{K}}(0, M) = B_{\mathbb{K}}(0, \varepsilon).$$

Τέλος: $\frac{\varepsilon}{M} \cdot V \in \mathcal{N}_0$ ($0 \in V \Rightarrow 0 \in \frac{\varepsilon}{M} \cdot V$, και (X, τ) γλ

$$\text{άρα } \frac{\varepsilon}{N} \cdot \forall \in \mathcal{T}.$$

(ε) $\Rightarrow$ (α): Έστω $x_0 \in X$. Η f είναι συνεχής στο x_0 :

Έστω $\varepsilon > 0$. Ψάχνουμε περιοχή $\mathcal{U}_{x_0}$ του x_0 ώστε:

$$\forall x \in \mathcal{U}_{x_0}, \text{ να ισχύει ότι } \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{f(x-x_0)} < \varepsilon.$$

f συνεχής στο $0 \Rightarrow \exists \mathcal{U}_0$ ώστε:

$\forall y \in \mathcal{U}$, να ισχύει ότι $|f(y)| < \varepsilon$.

Τότε, η $\mathcal{U}_{x_0} := x_0 + \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{x_0}$ και

$\forall x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $x = x_0 + y$ για κάποιο $y \in \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\substack{\parallel \\ f(x-x_0)}} = |f(y)| < \varepsilon.$$

→ Πρόταση: (Έξτρα χαρακτηρισμός συνέχειας σε τοπικά κυρτούς χώρους)

Έστω (X, τ) τοπικά κυρτός χώρος. Ξέρουμε ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, που διαχωρίζει σημεία, ώστε $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$

(δηλ., ώστε η $\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0 , $\forall x_0 \in X$).

Έστω $f: (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ γραμμική. Τότε, η f είναι
συνεχής $\iff \exists c > 0, n \in \mathbb{N}$ και $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ ώστε:

$$|f(x)| \leq c \cdot (p_1(x) + \dots + p_n(x)) \quad \forall x \in X.$$

Ανδδ: ($\Leftarrow$) Αρκεί να δο f συνεχής στο 0 (αφού (X, γ) γγχ).

Έστω $\varepsilon > 0$. $p_1, \dots, p_n$ συνεχείς στο 0 (όλες οι $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχείς $p: (X, \gamma) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$).

Αρα, $\exists \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \in \mathcal{N}_0$ ώστε:

$$p_1(\mathcal{U}_1) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, \frac{\varepsilon}{nc}), \dots, p_n(\mathcal{U}_n) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, \frac{\varepsilon}{nc}).$$

Τότε, $\eta \mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \in \mathcal{N}_0$, και $\forall x \in \mathcal{U}$ έχουμε:

$$|f(x)| \leq c \cdot (p_1(x) + \dots + p_n(x)) < c \cdot \underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{nc} + \dots + \frac{\varepsilon}{nc} \right)}_{n \text{ φορές}} = \cancel{c} \frac{\varepsilon}{\cancel{c}} = \varepsilon.$$

$(\Rightarrow)$ f συνεχής $\Rightarrow f$ συνεχής στο 0. Άρα, $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{U}_0$ ώστε:

$$f(\mathcal{U}) \subseteq B_{\mathbb{K}}(0, 1), \text{ δηλ. ώστε:}$$

$$|f(x)| < 1, \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Ξέρουμε ότι $\exists n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε:

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}.$$

$$\text{Επομένως, } \left\{ \forall x \in X \text{ με } \begin{pmatrix} p_1(x) < \varepsilon \\ \vdots \\ p_n(x) < \varepsilon \end{pmatrix} \right\} \text{ έχουμε: } |f(x)| < 1.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$(*) \quad |f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max \{p_1(x), \dots, p_n(x)\} \quad \left(\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot (p_1(x) + \dots + p_n(x)) \right)$$

Πράγματι, έστω $x \in X$.

- Αν $f(x) = 0$, η $(*)$ ισχύει.

- Αν $f(x) \neq 0$, τότε $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1 \implies$

$$\implies \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ ώστε } p_i\left(\frac{x}{f(x)}\right) > \varepsilon$$

$$\implies |f(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot p_i(x) \text{ για αυτό το } (i) \implies (*).$$

→ Διαχωριστικά θεωρήματα σε $τ$ και σε τοπικά κυρτούς χώρους.

Για ανάλυση των εκφωνήσεων, θεωρούμε μόνο διανυσματικούς χώρους επί του $\mathbb{R}$.

→ Ορισμός: Έστω (X, τ) $τ$ επί του $\mathbb{R}$, και $A, B \subseteq X$.

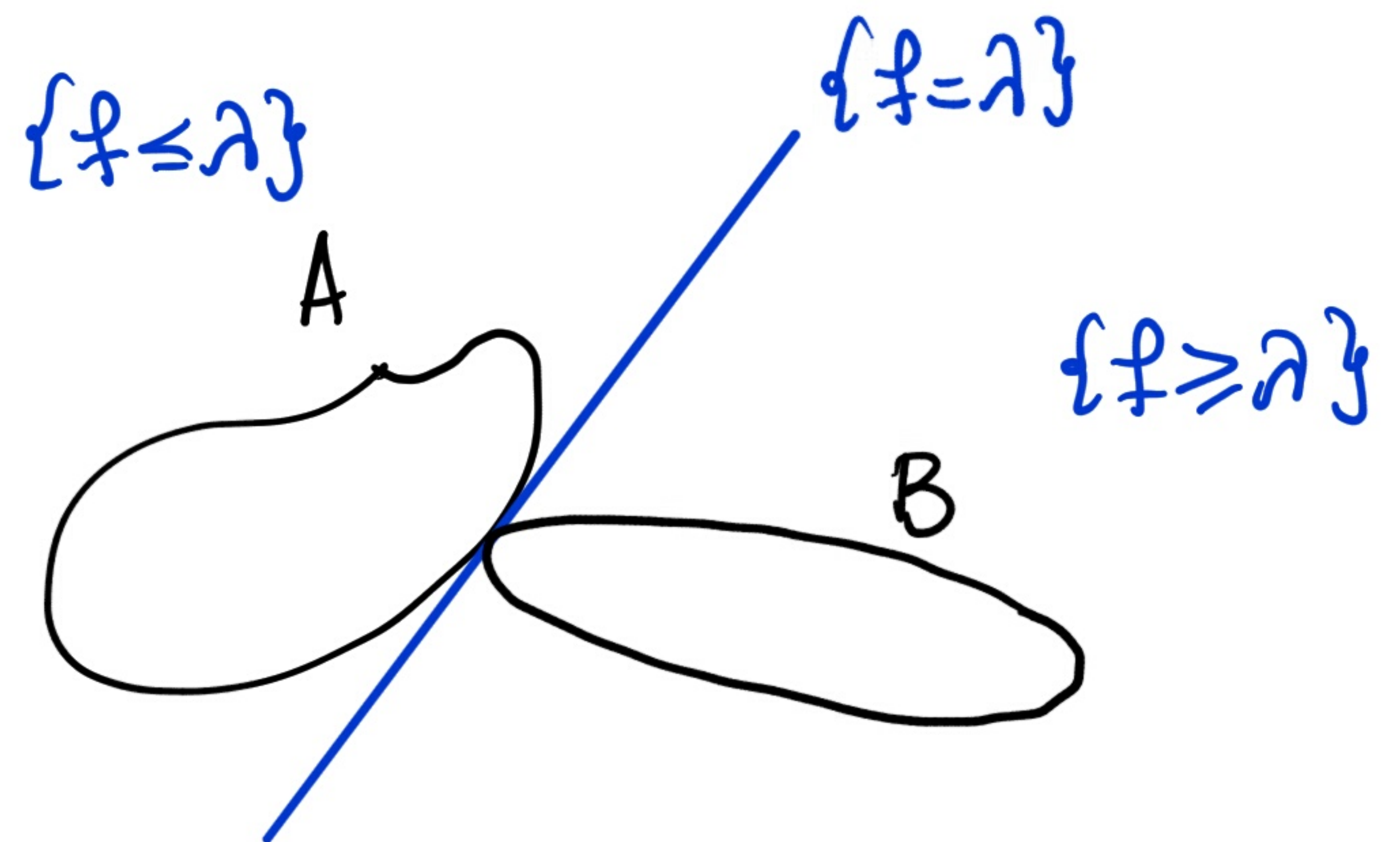
Λέμε ότι $\circ (X, \tau)^*$:

- Διαχωρίζει τα A, B αν

$\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$A \subseteq \{f \leq \lambda\},$$

$$B \subseteq \{f \geq \lambda\}.$$

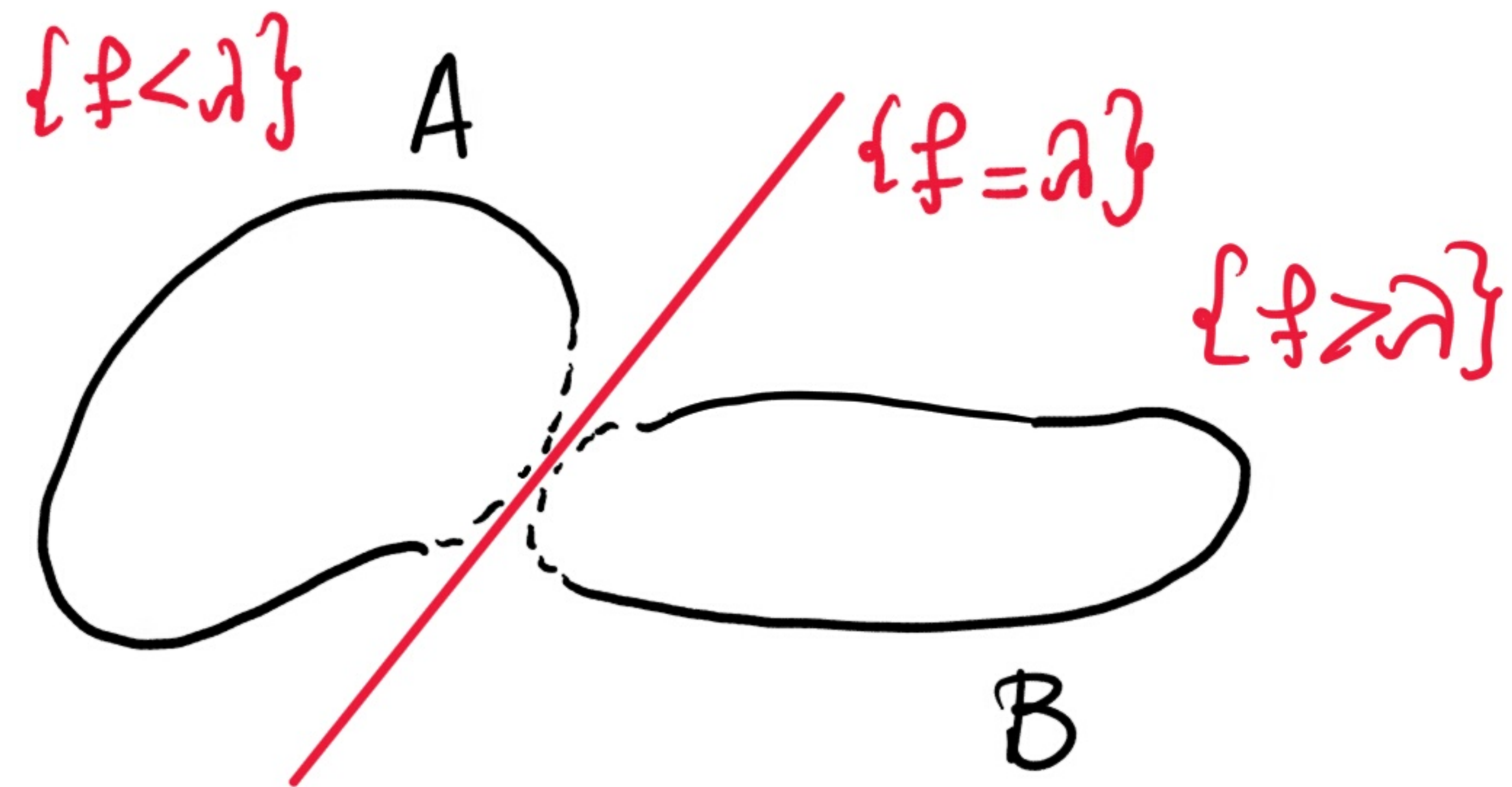


- Διαχωρίζει **γρήσια** τα A, B αν

$\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$A \subseteq \{f < \lambda\},$$

$$B \subseteq \{f > \lambda\}.$$

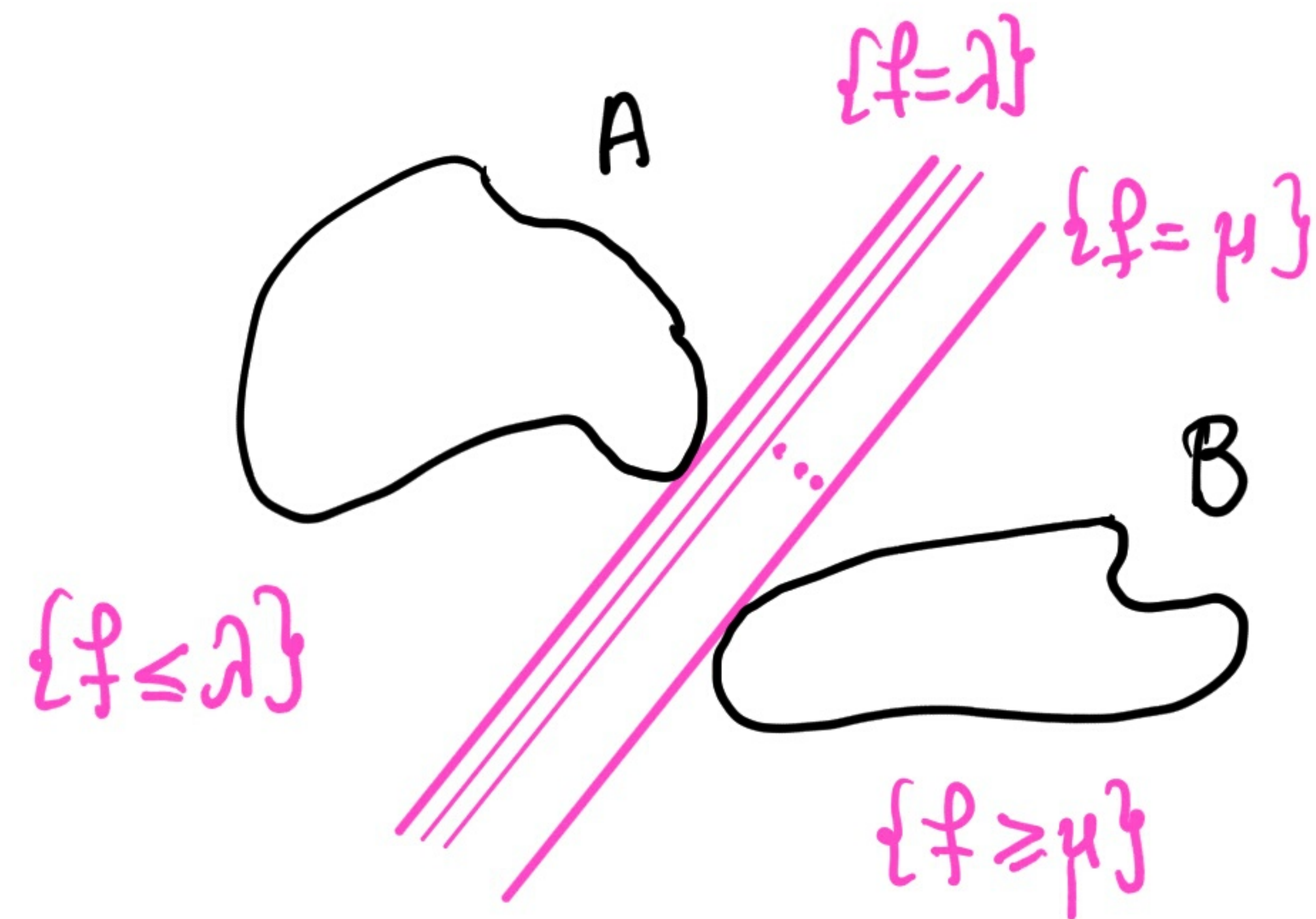


- Διαχωρίζει **αυστηρά** τα A, B αν

$\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$A \subseteq \{f \leq \lambda\},$$

$$B \subseteq \{f \geq \mu\}.$$



Θα χρειαστούμε τα παρακάτω:

→ Λήμμα: Έστω (X, γ) τυχ και $A \subseteq X$ ανοιχτό, κυρτό, που περιέχει το 0. Τότε, το συναρτησοειδές του Minkowski

$$p_A : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\text{με } p_A(x) := \inf \{ t \geq 0 : x \in tA \}$$

είναι καλά ορισμένο, μη αρνητικό υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Απόδ: Άσκηση. Ακολουθεί σε μεγάλο βαθμό την απόδειξη του ότι, αν το A έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι είναι ισορροπημένο, τότε το p_A είναι ημιμόρφα. ■

Υποδιύμηση:

→ Ορισμός (υπογραμμικό συναρτησοειδές): Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Μια $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν :

(i) $\forall x, y \in X$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, και

(ii) $\forall x \in X$ και $\forall \lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. (δηλ., p θεωρεί ομογενής).

⚠ Κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί :

- $p(0) = 0$

- p κυρτή $(\forall \lambda \in [0,1] \text{ και } x,y \in X, p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) = \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y))$

Όμως:

- Όμως $p(x) \neq p(-x)$ για κάποια $x \in X$.
- Όμως η p να παίρνει και αρνητικές τιμές.

Π_X , κάθε ημινόρμα $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε γραμμική $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι υπογραμμικά συναρτησοειδή.

→ Θεώρημα επέκτασης του Hahn: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, και $Y \leq X$. Έστω:

(i) $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές, και

(ii) $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική, με $f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y$.

Τότε, υπάρχει γραμμική επέκταση $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ της f , με

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

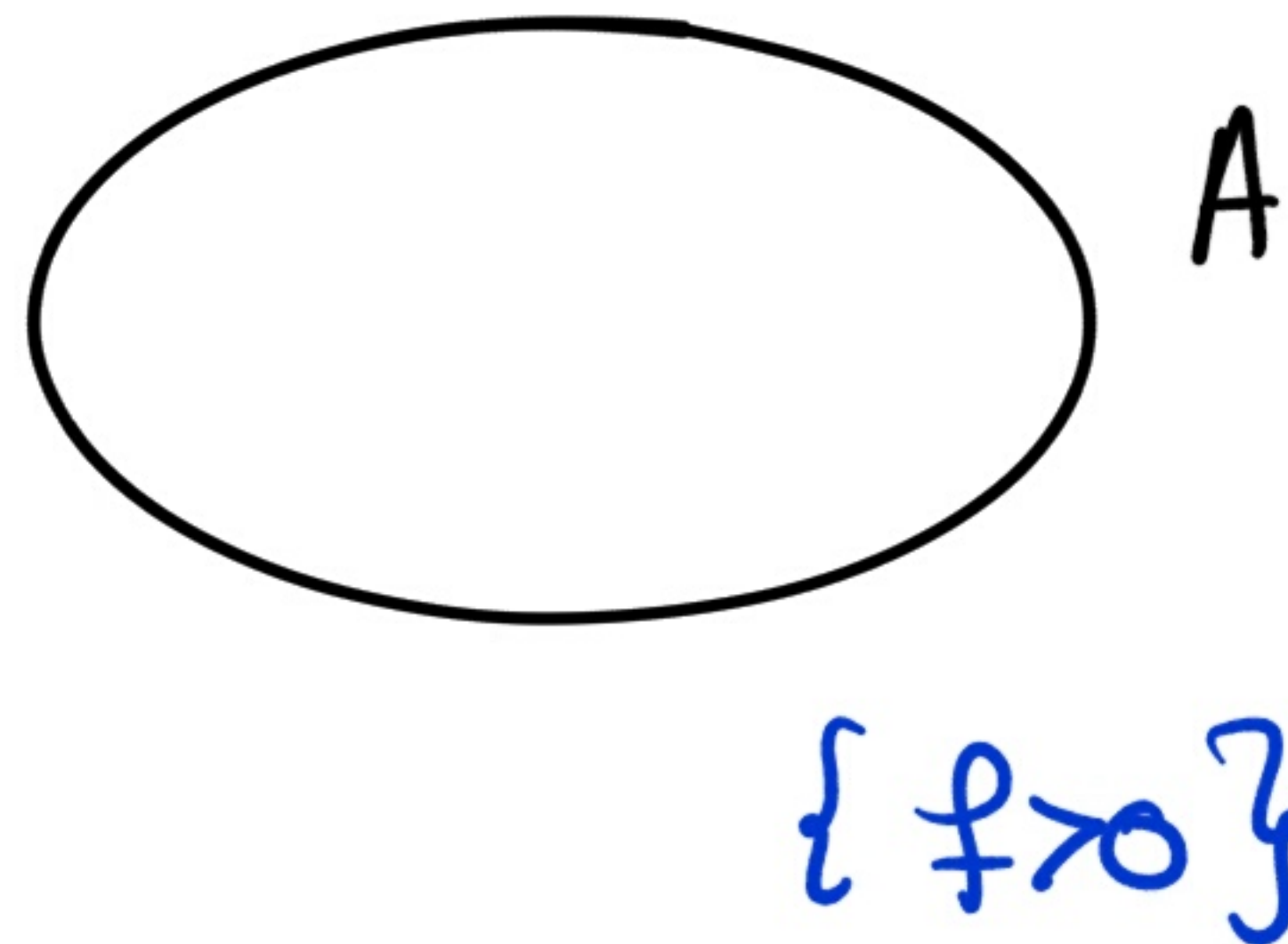
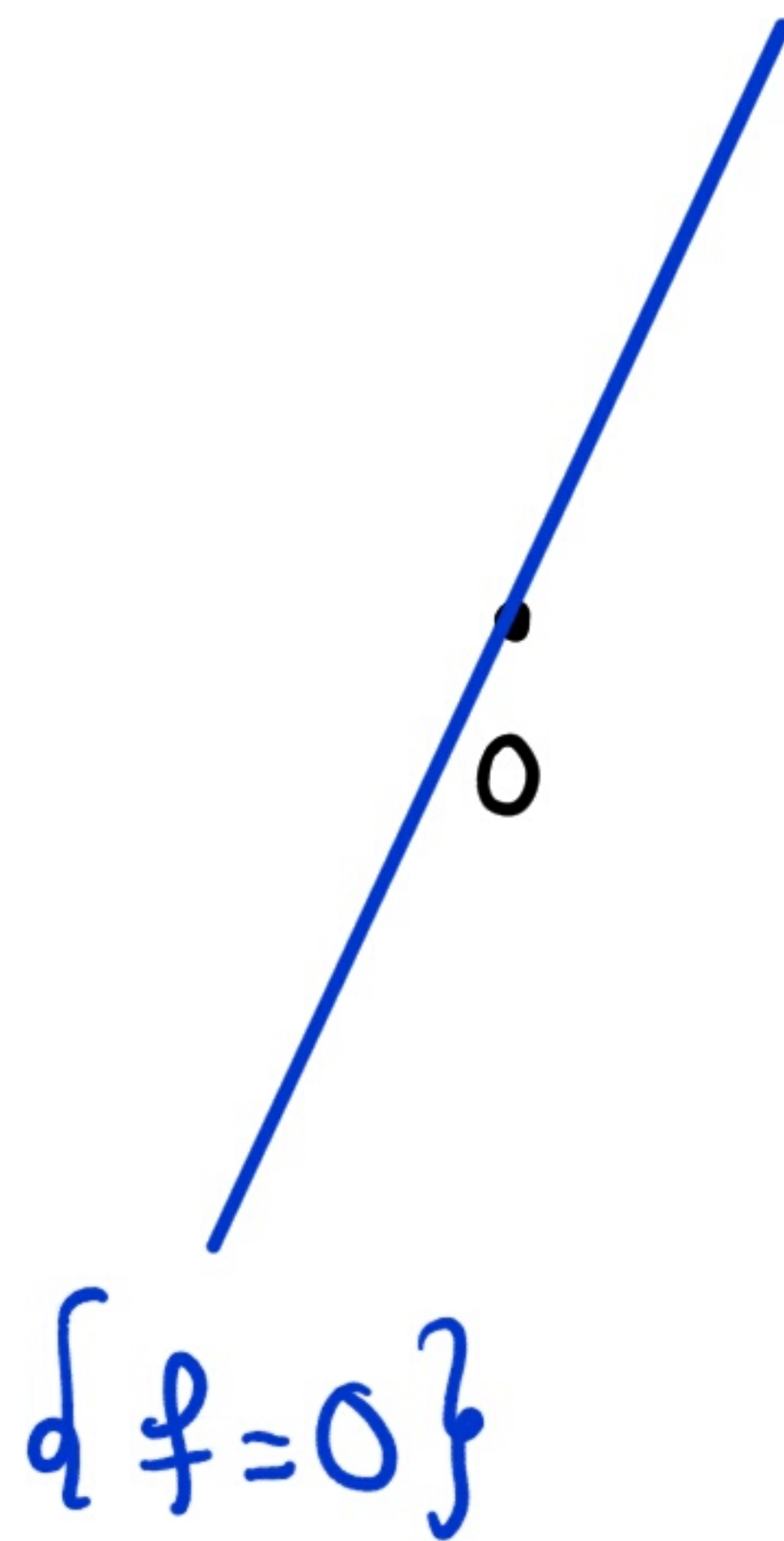
⚠ $\forall x \in X, \tilde{f}(x) \leq p(x)$ και $\underbrace{\tilde{f}(-x)}_{= -\tilde{f}(x)} \leq p(-x)$, δηλ. $\tilde{f}(x) \geq -p(-x)$.

Άρα: $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X$.

→ Πρόταση: $(0, (X, \tau)^*)$ διαχωρίζεται το 0 and ανοιχτά κυρτά):

Έστω (X, τ) γλχ επί του $\mathbb{R}$. Έστω A ανοιχτό, κυρτό $\subseteq X$,
με $0 \notin A$. Τότε, $\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A.$$



Απόδ. Σταθεροποιούμε κάποιο $x_0 \in A$. Τότε, $0 \in x_0 - A \in \mathcal{T}$.

Άρα, το $A' := x_0 - A$ είναι ανοιχτή, κυρτή περιοχή του 0

$$\implies A' = \{x \in X : p_{A'}(x) < 1\}, \quad \text{όπου το}$$

$$p_{A'} : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\text{με } p_{A'}(x) := \inf \{t \geq 0 : x \in tA'\} \quad \forall x \in X$$

είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Ιδέα: Θα βρούμε γραμμική $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, με $f \leq p_{A'}$. Τότε,
αφού $p_{A'}$ μικρή στο $A' \implies f$ μικρή στο $A' = x_0 - A \implies$
 $\implies f$ μεγάλη στο A .

$$0 \notin A \Rightarrow x_0 \notin A' \Rightarrow p_A(x_0) \geq 1.$$

Ορίσουμε $Y := \text{span}\{x_0\}$, και $f_0: Y \rightarrow \mathbb{R}$ τη γραμμική
 απεικόνιση με $f_0(\lambda x_0) := \lambda \cdot p_{A'}(x_0), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Έχουμε:

- $Y \leq X$

- $f_0(y) \leq p_{A'}(y) \quad \forall y \in Y:$

$$\rightsquigarrow \text{Αν } \lambda < 0 \Rightarrow f_0(\lambda x_0) = \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{p_{A'}(x_0)}_{>0} < 0 \leq p_{A'}(\lambda x_0).$$

$$\rightsquigarrow \text{Αν } \lambda \geq 0 \Rightarrow f_0(\lambda x_0) = \lambda p_{A'}(x_0) = p_{A'}(\lambda x_0).$$

Αφού το $p_{A'}$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές, από το Θ. επέκτασης του Hahn υπάρχει $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική με

$$\textcircled{1} \quad f|_Y = f_0 \implies f(x_0) = f_0(x_0) = p_{A'}(x_0) \geq 1.$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) \leq p_{A'}(x) \quad \forall x \in X.$$

Άρα:

$$\textcircled{\bullet} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in A:$$

$$\forall x \in A, \text{ το } x_0 - x \in A' \implies \underbrace{f(x_0 - x)}_{f(x_0) - f(x)} \leq p_{A'}(\underbrace{x_0 - x}_{\in A'}) < 1 \implies$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0) - 1 > 1 - 1 = 0.$$

⊙ $f \in (X, \tau)^*$: Αρκεί ΝΔΟ υπάρχει περιοχή του $0 \in X$ όπου
η f είναι φραγμένη.

$\forall x \in X$, έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq p_{A'}(x), \\ f(-x) \leq p_{A'}(-x) \Rightarrow f(x) \geq -p_{A'}(-x) \end{array} \right\} \Rightarrow -p_{A'}(-x) \leq f(x) \leq p_{A'}(x)$$

$\begin{array}{c} \parallel \\ -f(x) \end{array}$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \max \{ p_{A'}(x), p_{A'}(-x) \}.$$

Άρα, αρκεί να βρεθεί περιοχή του O όπου οι $p_{A'}$, $p_{A'}(-\cdot)$ είναι συγχρόνως φραγμένες.

Η $p_{A'}$ είναι φραγμένη στο $A' \in \mathcal{N}_0$ (καθώς $p_{A'}(x) < 1 \ \forall x \in A'$),
άρα η $p_{A'}(-\cdot)$ είναι φραγμένη στο $-A' \in \mathcal{N}_0$.

Επομένως, η f είναι φραγμένη στο $\tilde{A} := A' \cap (-A') \in \mathcal{N}_0$.

Άρα, η f είναι συνεχής.

■

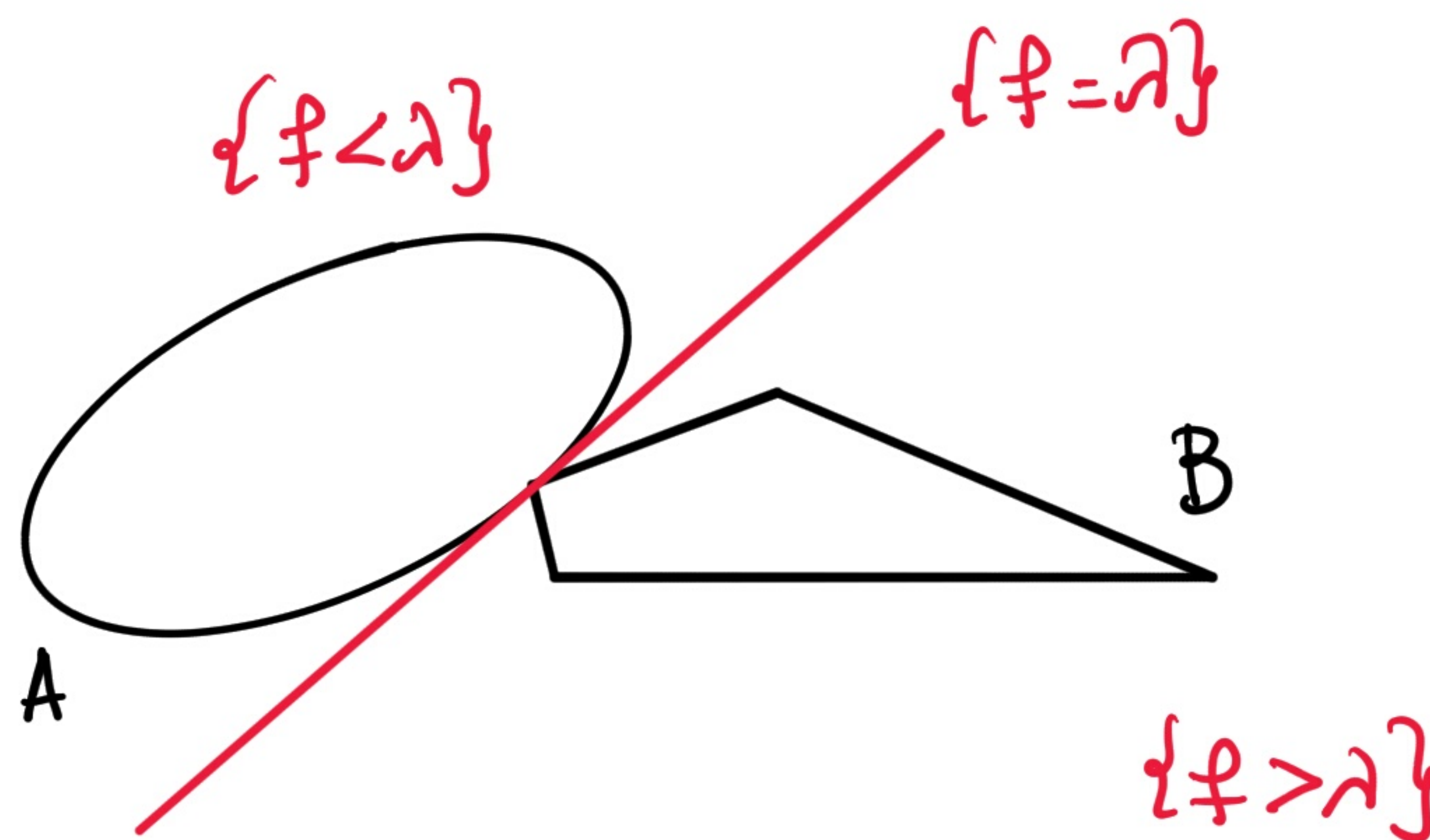
Τα υπόλοιπα διαχωριστικά θεωρήματα είναι νορίσματα του παραπάνω.

→ Πρόταση: (ο $(X, \tau)^*$ διαχωρίζει γνήσια ζένα ανοιχτά κυρτά):

Έστω (X, τ) τυχ επι του $\mathbb{R}$. Έστω $A, B \subseteq X$ ζένα, ανοιχτά, κυρτά.

Τότε, $\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} A \subseteq \{f < \lambda\}, \\ B \subseteq \{f > \lambda\}. \end{cases}$$



Απόδ: To $0 \notin \underbrace{B-A}_{\text{ανοιχτό, κυρτό}} \subseteq X$

Αρα, από την προηγούμενη πρόταση, $\exists f \in (X, \tau)^*$ ώστε

$$\underbrace{f(b-a)}_{f(b) - f(a)} > 0 \quad \forall a \in A, b \in B$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b) \quad \forall a \in A, b \in B$$

$$\Rightarrow \sup \{ f(a) : a \in A \} \leq \inf \{ f(b) : b \in B \}.$$

- A ανοιχτό $\longrightarrow f(a) \neq \sup \{f(a) : a \in A\} \quad \forall a \in A$
(δηλ., το $f(A)$ δεν έχει μέγιστο).

Πράγματι, $\forall a \in A$, υπάρχει $\tilde{a} \in A$ με $f(\tilde{a}) > f(a)$:

Έστω $a \in A$. Το A είναι ανοιχτό $\longrightarrow$ είναι απορροφούν

έστω $a \implies \forall y \in X$ υπάρχει $\varepsilon_y > 0$ ώστε $a + ty \in A$
 $\forall t \in [0, \varepsilon_y)$

$\implies f(a) + t f(y) \in f(A), \quad \forall t \in [0, \varepsilon_y)$.

Επιλέγοντας $y \in X$ με $f(y) > 0$ (υπάρχει τέτοιο y , αφού $f \neq 0$),

βλέπουμε ότι
$$\underbrace{f(a) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{>0} \underbrace{f(y)}_{>0}}_{\in f(A)} > f(a)$$

Ανλ. , το $\tilde{\alpha} := a + \frac{\varepsilon}{2} y \in A$ και $f(\tilde{\alpha}) > f(a)$.

- Παράδοξα, $f(b) \geq \inf \{ f(b) : b \in B \}$, $\forall b \in B$
(δηλ. το $f(B)$ δεν έχει ελάχιστο).

Έτσι, επιλέγοντας κάποιο $\lambda \in [\sup \{ f(a) : a \in A \}, \inf \{ f(b) : b \in B \}]$,

έχουμε ότι
$$\begin{aligned} f(a) &< \lambda & \forall a \in A, \\ f(b) &> \lambda & \forall b \in B. \end{aligned}$$

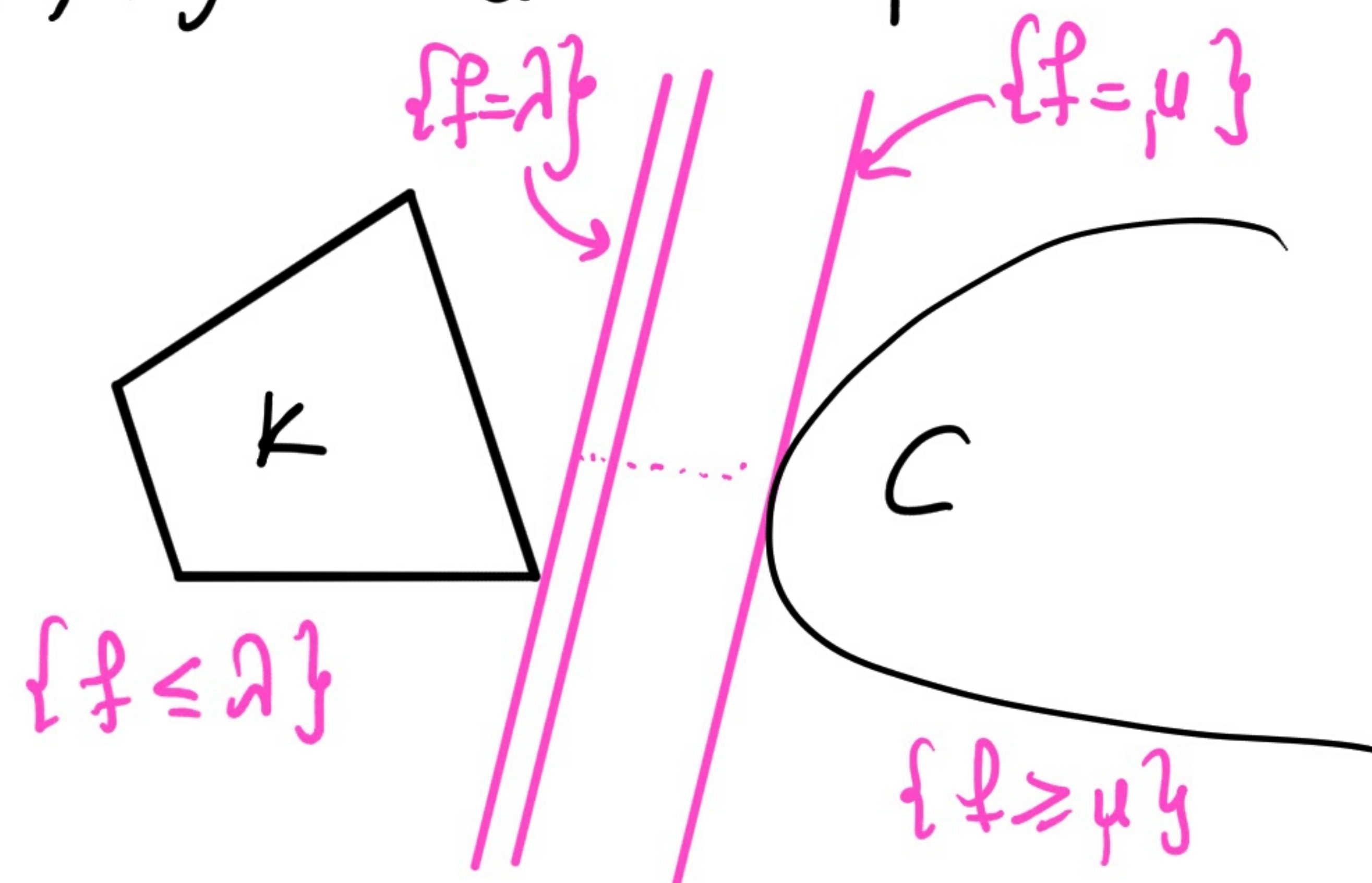
→ Πρόταση (Έξτρα διαχωριστικό θεώρημα σε τοπικά κυρτούς χώρους :
 0 $(X, \tau)^*$ διαχωρίζει αυστηρά συμπαγή κυρτά από κλειστά κυρτά) :

Έστω (X, τ) τοπικά κυρτός χώρος (διανυσματικός επί του $\mathbb{R}$).

Έστω K συμπαγές κυρτό $\subseteq X$ και C κλειστό κυρτό $\subseteq X$,
 με $K \cap C = \emptyset$. Τότε, $\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\lambda < \mu$ στο $\mathbb{R}$

ώστε :

$$\begin{cases} K \subseteq \{f \leq \lambda\}, \\ C \subseteq \{f \geq \mu\} \end{cases}$$



Απόδ: (X, τ) τ ρχ $\Rightarrow \exists W \in \mathcal{N}_0$ ώστε

$$(K + W) \cap (C + W) = \emptyset.$$

Αφού ο (X, τ) είναι τοπικά κυρτός, υπάρχει V κυρτή περιοχή του 0 ώστε $V \subseteq W$. Άρα,

$$\underbrace{(K + V)} \cap \underbrace{(C + W)} = \emptyset$$

ανοιχτά, κυρτά

Από την παραπάνω ηρέωση, $\exists f \in (X, \tau)^*$ και $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} K+V \subseteq \{f < \mu\}, \\ C+V \subseteq \{f > \mu\} \quad (\subseteq \{f \geq \mu\}). \end{cases}$$

$$0 \in V \implies K = K+0 \subseteq K+V \subseteq \{x \in X : f(x) < \mu\}.$$

Το K είναι συμπαγές $\subseteq (X, \gamma)$ και η $f: (X, \gamma) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

είναι συνεχής. Άρα, η f παίρνει μέγιστη τιμή στο K ,

δηλαδή $\exists x_0 \in K$ ώστε $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in K$.

Επιλέγοντας $\lambda := f(x_0) < \mu$ (αφού $x_0 \in K$), έχουμε:

$f(x) \leq \lambda \quad \forall x \in K$, δηλαδή $K \subseteq \{f \leq \lambda\}$. ■