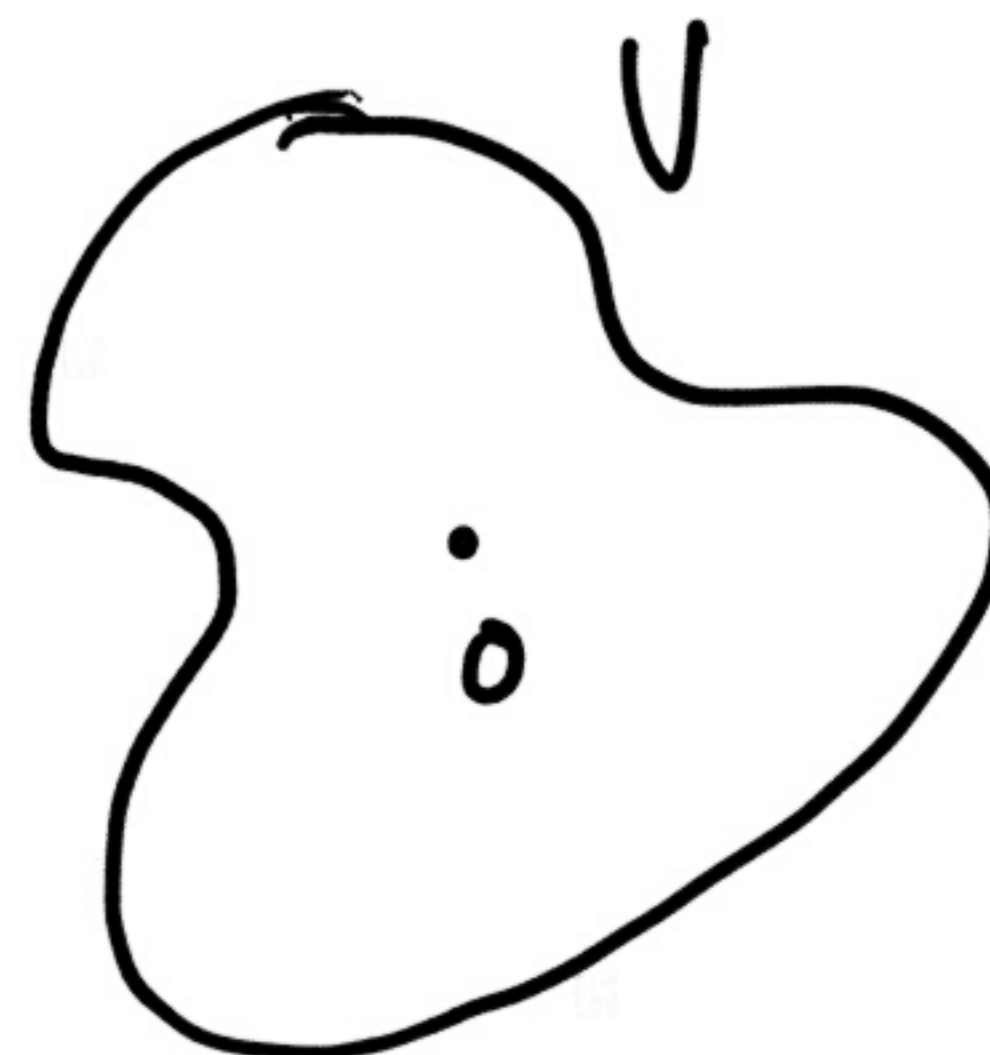
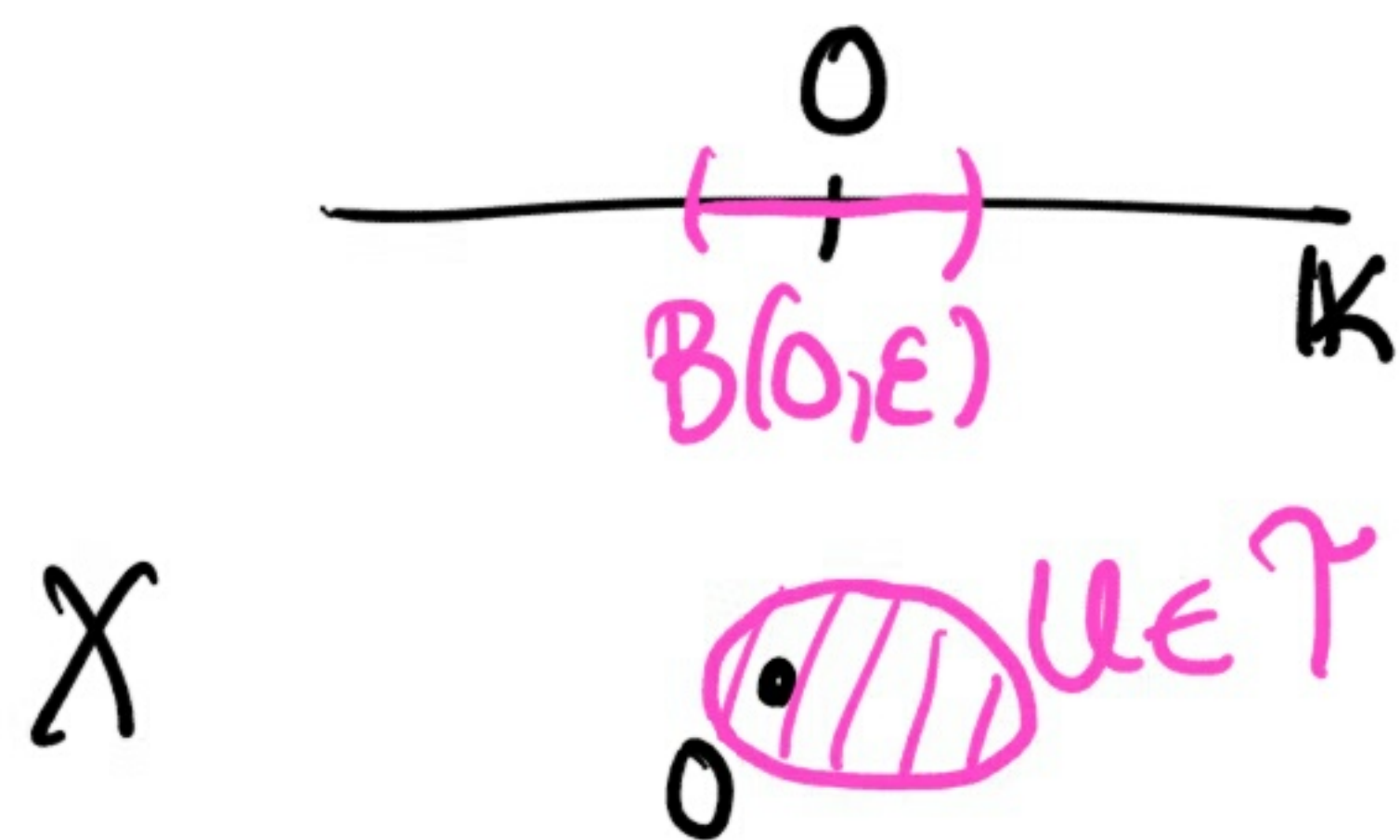
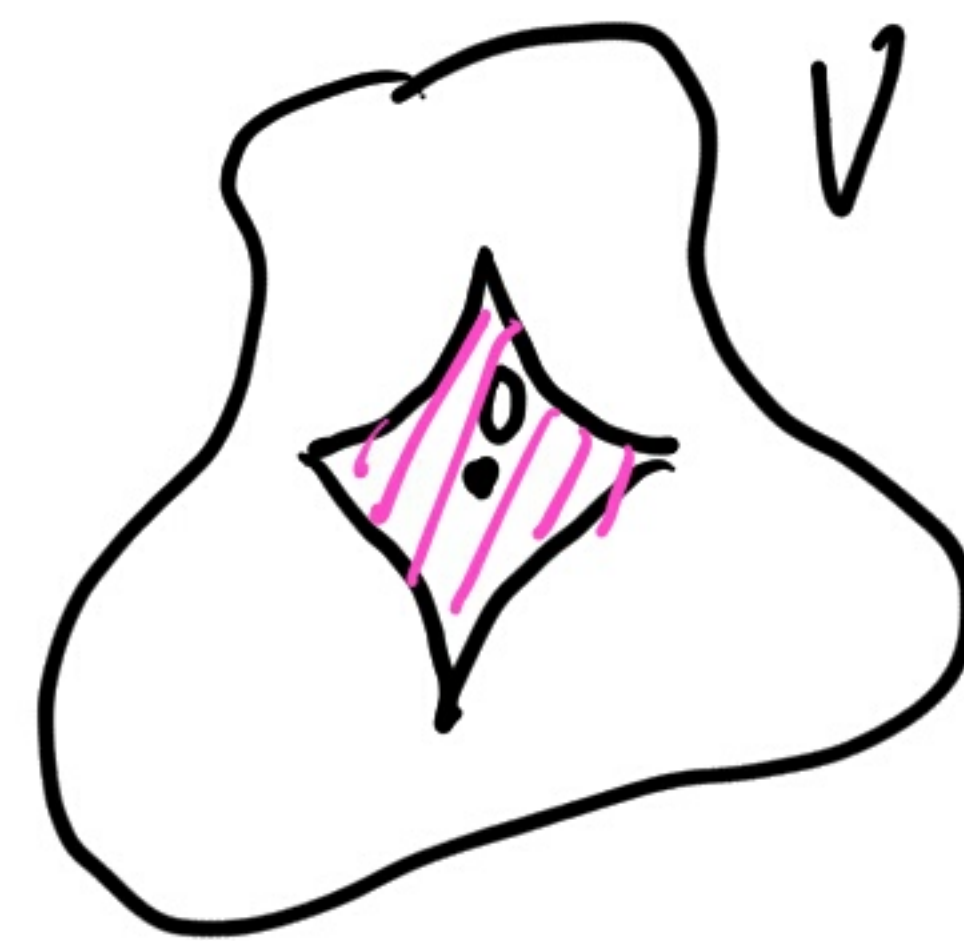


Άρα, $\bar{W} \subseteq X \setminus (X \setminus V + W) \subseteq V$.

→ Πρόταση: Έστω (X, τ) τυχ. Τότε, κάθε περιοχή του 0
 περιέχει ισορρονημένη περιοχή του 0 .

Απόδ.: $0 \cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ είναι συνεχής,
 άρα είναι συνεχής στο $(0, 0) \in \mathbb{K} \times X$.



Έστω λοιπόν
 V περιοχή του
 $0 \cdot 0 = 0$.

$\exists \varepsilon > 0$ και U περιοχή του 0 ώστε:

$$\lambda U \subseteq V, \quad \forall |\lambda| < \varepsilon,$$

δηλ. ώστε $\underbrace{U(\lambda U)}_{|\lambda| < \varepsilon} \subseteq V.$

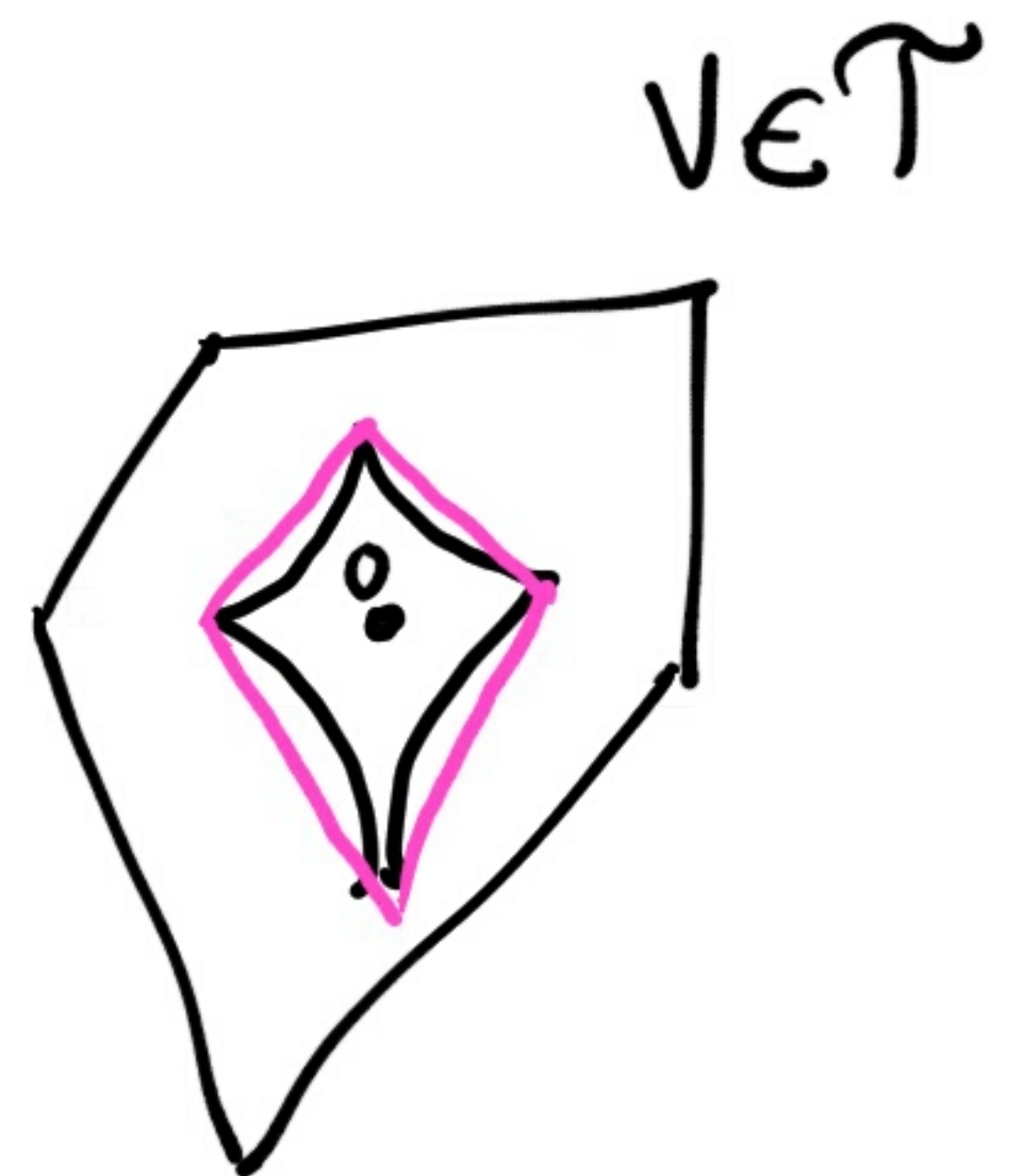
ανοιχτή,
ισορροπημένο,
περιέχει το 0 .



→ Πρόταση: Έστω $(X, \mathcal{T})$ τυχ. Τότε, κάθε κυρτή περιοχή του O περιέχει κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του O .

Απόδ.: Έστω V κυρτή περιοχή του O .

Ξέρουμε ότι $\exists U$ ισορροπημένη περιοχή του O ,
με $U \subseteq V \xrightarrow[V \text{ κυρτή}]{} \text{conv}(U) \subseteq V$.



Επίσης, $O \in U \subseteq \text{conv}(U)$,

και $\text{conv}(U) = \bigcup_{t \in (0,1)} \underbrace{(tU + (1-t)U)}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}.$

■

→ Τονικά κυρτοί χώροι: Θα δούμε ότι οι παρακάτω δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

→ Ορισμός 1: Έστω X διανυσματικός χώρος, και τ τοπολογία στον X .
Ο (X, τ) λέγεται τονικά κυρτός αν υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, που διαχωρίζει σημεία του X , ώστε $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$ (δηλ. ώστε η $\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$ να αποτελεί βάση περιοχών του x_0 , $\forall x_0 \in X$).

→ Ορισμός 2: Έστω X διανυσματικός χώρος, και τ τοπολογία στον X .
Ο (X, τ) λέγεται τοπικά κυρτός αν (α) ο (X, τ) είναι τ γλ,
και (β) το $\mathcal{O} \in \mathcal{X}$ έχει βάση περιοχών που ανοιχτείται από
κυρτά σύνολα.

Ξεκινάμε δεχόμενοι τον Ορισμό 1, και σταδιακά θα δείξουμε
ισοδυναμία με τον Ορισμό 2.

→ Πρόταση: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$,
και έστω τ τοπολογία στον X .

Έστω ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινόρμων $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
που διαχωρίζει σημεία του X , ώστε $\tau = \tau_{\mathcal{P}}$ (δηλ., ώστε η

$$\mathcal{B}_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$$

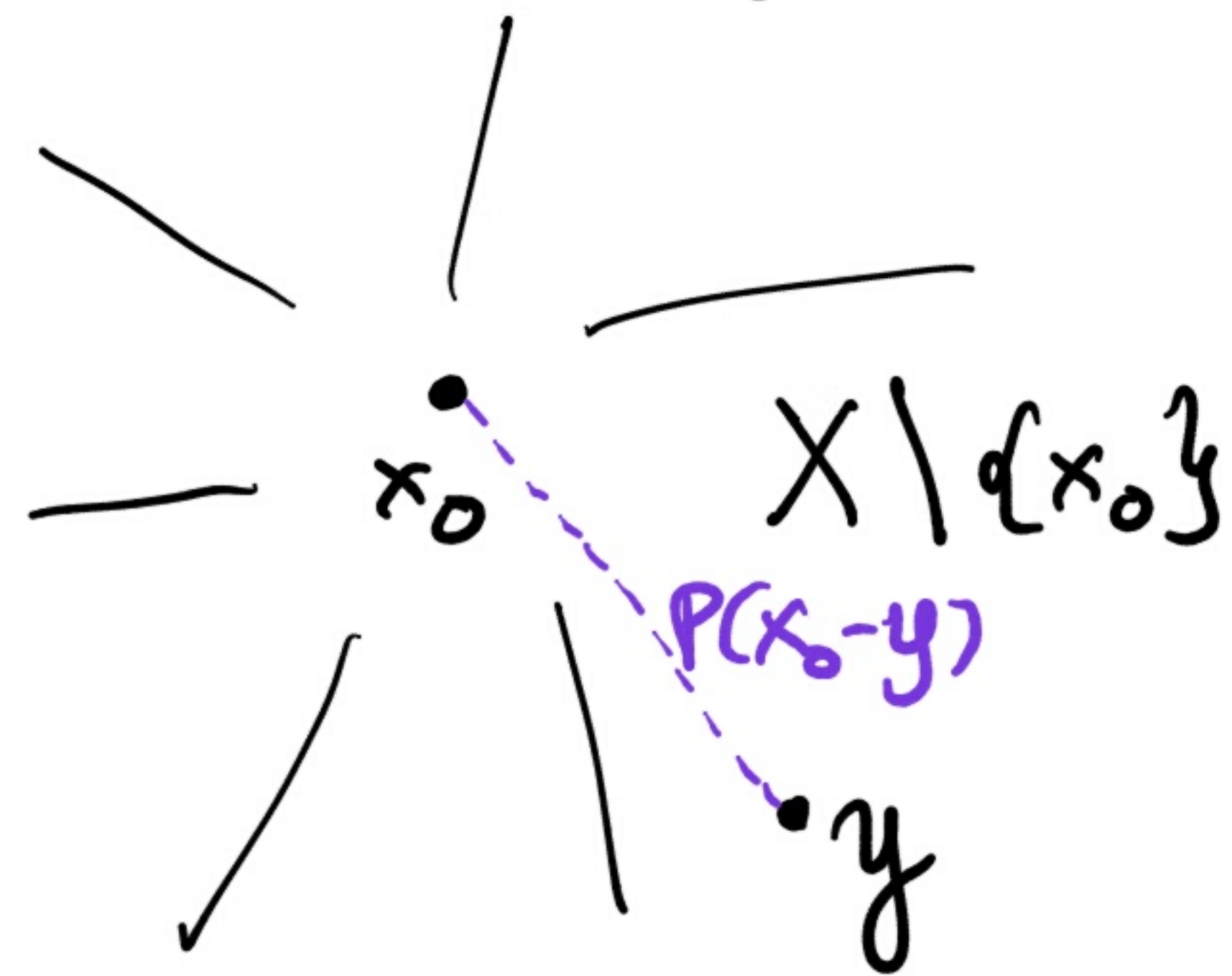
να αποτελεί βάση περιοχών του x_0 , $\forall x_0 \in X$). Τότε:

(α) (X, τ) είναι γλ.

(β) Κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής: $(X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Ανδδ: (α) • Τα μονομενόμενα είναι κλειστά ως προς την $\mathcal{T}$:

Έστω $x_0 \in X$. Το $X \setminus \{x_0\} \in \mathcal{T}$: Έστω $y \in X \setminus \{x_0\}$.



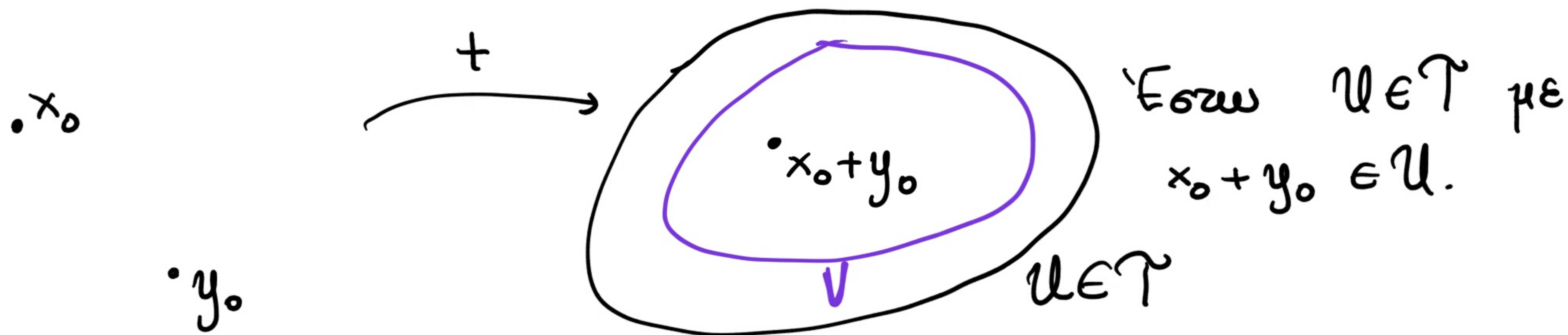
Η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει σημεία του X , άρα
 $\exists p \in \mathcal{P} : p(x_0 - y) \neq 0$.

Τότε, το $A = \{x \in X : p(x - y) < \varepsilon\}$ είναι
περιοχή του y , και περιέχεται στο $X \setminus \{x_0\}$

(καθώς $x_0 \notin A$).

• Η $+$: $X \times X \rightarrow X$ είναι συνεχής:

Έστω $x_0, y_0 \in X$.



Θα βρούμε $U_{x_0} \in \mathcal{T}$, με $x_0 \in U_{x_0}$,
 και $U_{y_0} \in \mathcal{T}$, με $y_0 \in U_{x_0}$, ώστε

$U_{x_0} + U_{y_0} \subseteq U.$ And undecsn, $\exists n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$

ώστε to $V := \underbrace{\bigcap_{i=1}^n \{z \in X : p(z - (x_0 + y_0)) < \varepsilon\}}_{\in \mathcal{T}} \subseteq U.$

Ορίζοντας
$$\mathcal{U}_{x_0} := \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in X : p_i(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

και
$$\mathcal{U}_{y_0} := \bigcap_{i=1}^n \left\{ y \in X : p_i(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

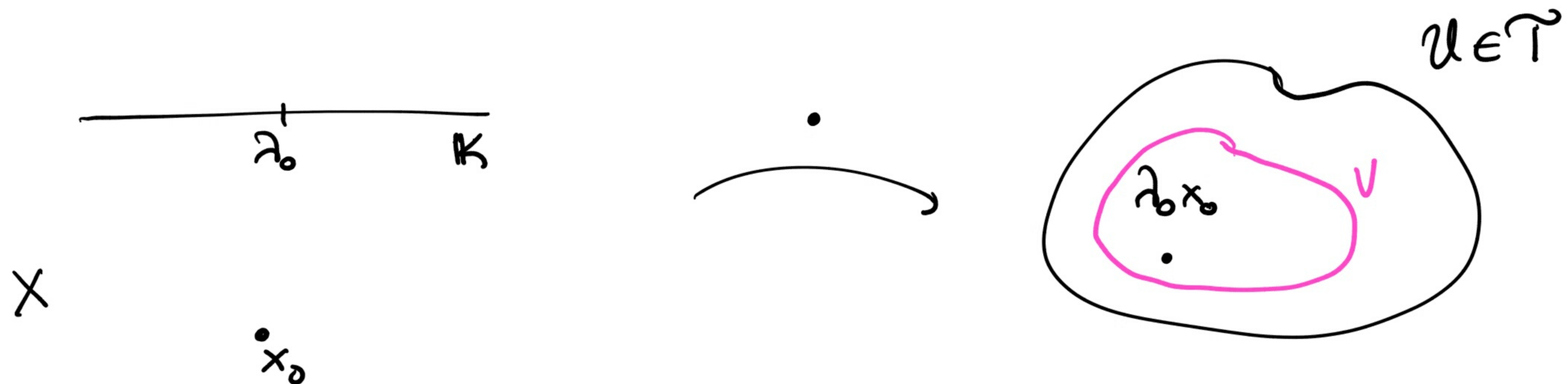
έχουμε: το $\mathcal{U}_{x_0}$ είναι περιοχή του x_0 ,

το $\mathcal{U}_{y_0}$ είναι περιοχή του y_0 ,

και $\mathcal{U}_{x_0} + \mathcal{U}_{y_0} \subseteq V \subseteq \mathcal{U}$, καθώς, $\forall x \in \mathcal{U}_{x_0}$ και $y \in \mathcal{U}_{y_0}$,

$$\left. \begin{array}{l} p(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \\ p(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \implies p((x+y) - (x_0+y_0)) \leq p(x - x_0) + p(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- $0 \cdot : K \times X \rightarrow X$ είναι συνεχής:



Έστω $(\lambda_0, x_0) \in K \times X$. $0 \cdot$ είναι συνεχής στο (λ_0, x_0) :

Έστω $U \in \mathcal{U}_{\lambda_0, x_0}$. $\exists V = \bigcap_{i=1}^n \{z \in X : p_i(z - \lambda_0 x_0) < \varepsilon\} \subseteq U$,

για κάποιες $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$.

Ορίσουμε, για $M > 0$ κατάλληλα μεγάλο (το πόσο μεγάλο θα προσδιοριστεί αργότερα) :

$$\Lambda := B(\lambda_0, \frac{\varepsilon}{M}) \quad (\text{περιοχή του } \lambda_0 \text{ στον } (\mathbb{K}, |\cdot|)),$$

$$\mathcal{U}_{x_0} := \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in X : p_i(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{M} \right\} \quad (\text{περιοχή του } 0 \text{ στον } (X, T)).$$

Τότε, $\forall \lambda \in \Lambda$ και $x \in \mathcal{U}_{x_0}$, $\forall i=1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\leq p_i(\lambda x - \lambda x_0) + p_i(\lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \\ &= |\lambda| \cdot p_i(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| \cdot p_i(x_0) \\ &< \left(|\lambda_0| + \frac{\varepsilon}{M} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{M} \cdot p_i(x_0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

για M μεγάλο. Άρα, $\exists M > 0$ ώστε $\lambda x \in U \subseteq \mathcal{U}$,

$\forall \lambda \in \Lambda$ και $x \in U_{x_0}$.

(b) Κάθε $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής ως απεικόνιση από τον $(X, \mathcal{T}_p)$ στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, από τον ορισμό της $\mathcal{T}_p$.

■

Τώρα δείχνουμε την ισοδυναμία των Ορισμών 1 και 2 για τοπικά κυρτούς χώρους.

→ Θεώρημα: Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) $O(X, \tau)$ είναι τοπικά κυρτός.
- (ii) $O(X, \tau)$ είναι $\tau_{\text{σχ}}$ και το O έχει βάση περιοχών που αποτελείται από κυρτά σύνολα.
αφαιρούμε και κάθε $x_0 \in X$
- (iii) $O(X, \tau)$ είναι $\tau_{\text{σχ}}$ τα ανοιχτά, κυρτά, ισορροπημένα υποσύνολα του X αποτελούν βάση περιοχών του O .

Ανδδ: • $(ii) \iff (iii)$: αληδ. Πράγματα:

$\rightsquigarrow (ii) \implies (iii)$: Κάθε κυρτή περιοχή του O σε εχχ περιέχει κυρτή και ισορροπημένη περιοχή του O (έχει δείξει).

$\rightsquigarrow (iii) \implies (ii)$: Προφανές.

- Πρέπει να δείξει η ισοδυναμία του (i) με οποιοδήποτε από τα (ii) , (iii) .

$\leadsto (i) \implies (ii)$: Υπάρχει οικογένεια $\mathcal{P}$ ημινορμών $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
που διαχωρίζει σημεία, ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (δηλ., ώστε, $\forall x_0 \in X$, η

$$B_{x_0} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x - x_0) < \varepsilon : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\} \right.$$

να αποτελεί βάση περιοχών του x_0). Άρα, τα σύνολα

$$B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon) := \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\},$$

$\forall n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$, αποτελούν βάση περιοχών του 0.

Κάθε $B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ είναι τοιηδόν ανοιχτό ($\in \mathcal{T}$) και

είναι και κυρτό: $\forall x, y \in B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$ και $\forall t \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \text{έχουμε ότι } p_i(tx + (1-t)y) &\leq p_i(tx) + p_i((1-t)y) \\ &= \underbrace{t p_i(x)}_{< \varepsilon} + \underbrace{(1-t) p_i(y)}_{< \varepsilon} \\ &< t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

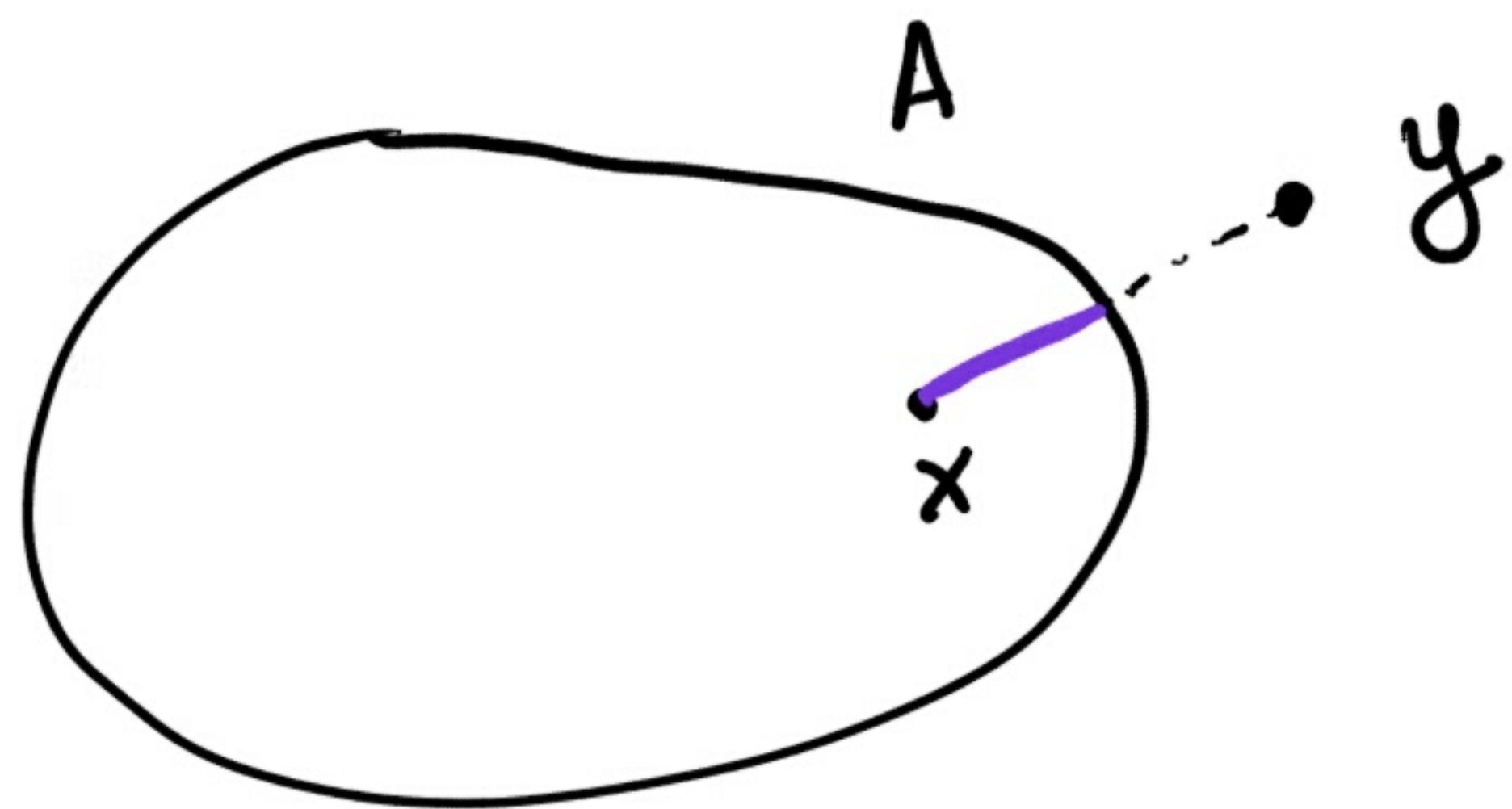
$\forall i = 1, \dots, n$. Επομένως, $tx + (1-t)y \in B(p_1, \dots, p_n; \varepsilon)$.

Άρα, το O έχει βάση περιοχών που αποσπείζονται από κυρτά σύνολα.

$\rightsquigarrow (ii) \implies (i)$: Κάθε ανοιχτό σύνολο είναι απορροφούν σε κάθε σημείο του, καθώς ο χώρος είναι τυχ. Πράγματι,

Έστω $A \in \mathcal{T}$ και $x \in A$.

Το A είναι απορροφούν στο x :

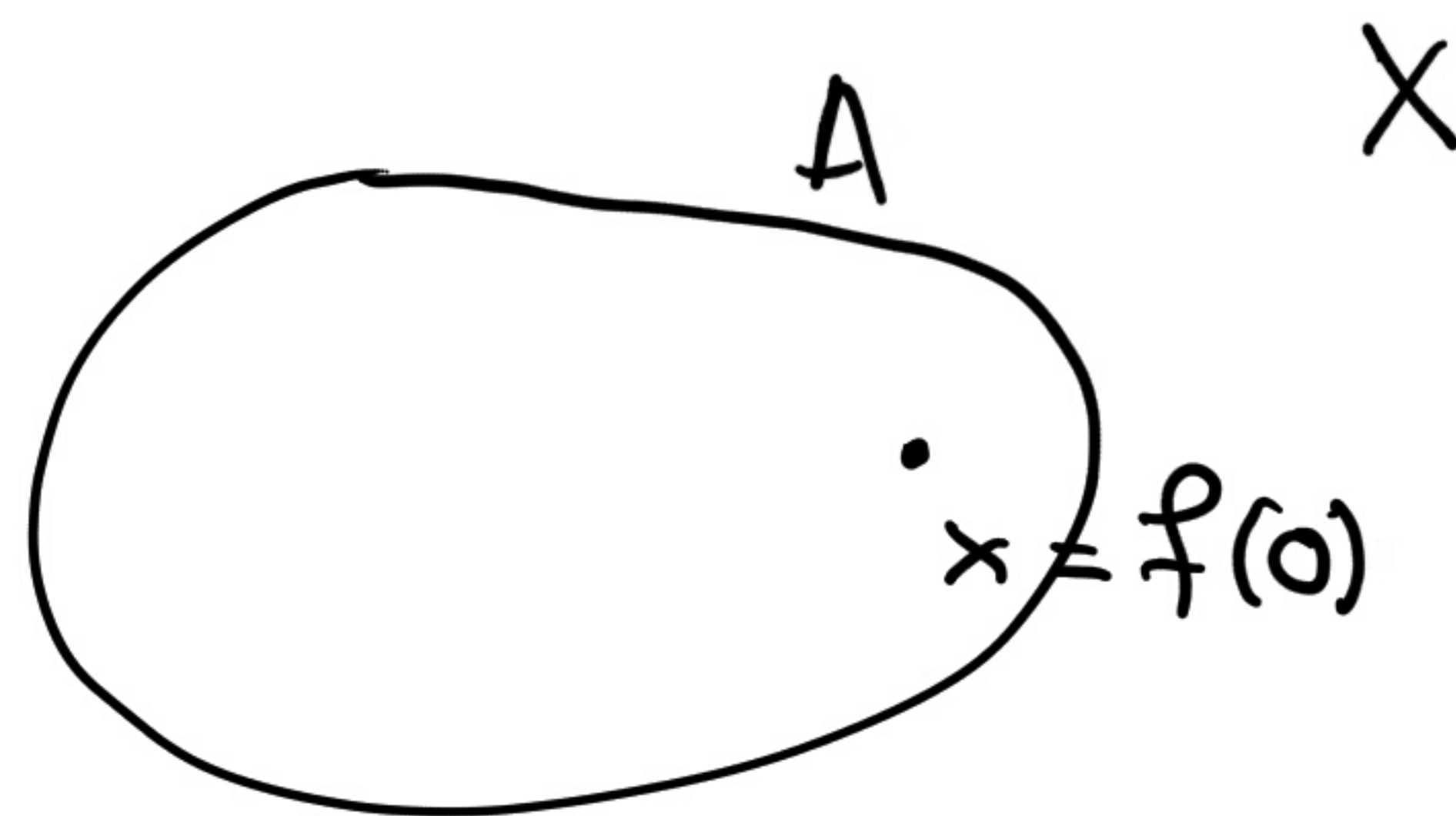
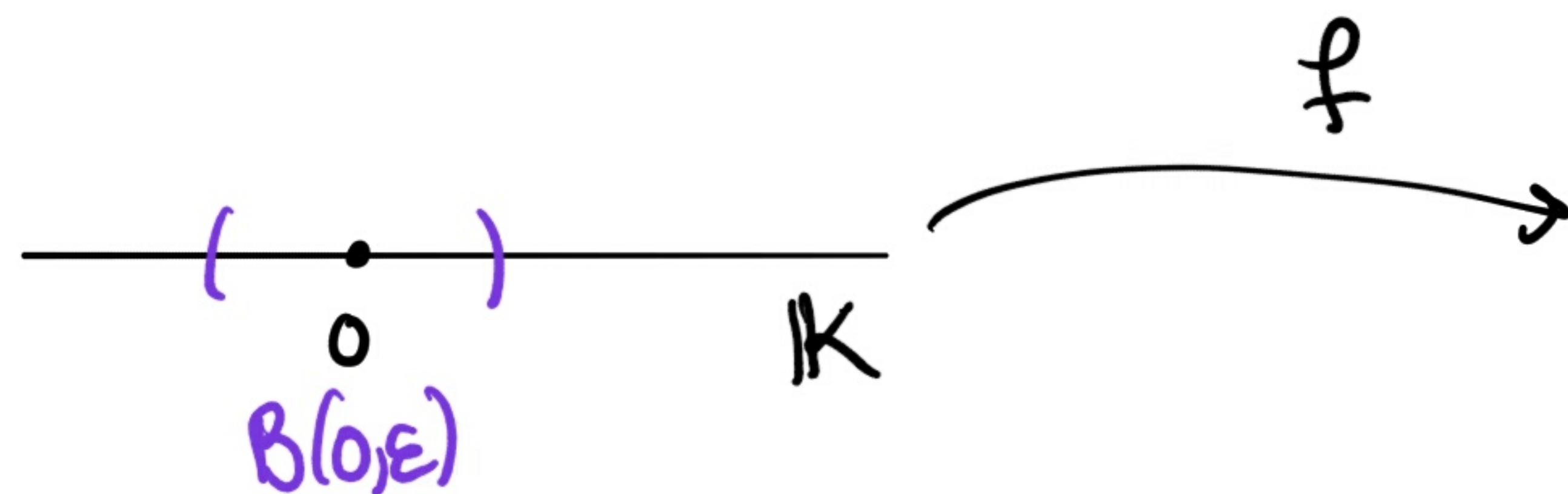


$\forall y \in A$, η ανεικόνιση

$$f: (\mathbb{K}, |\cdot|) \rightarrow (X, \mathcal{T})$$

$$f(t) := x + ty \quad \forall t \in \mathbb{K}$$

είναι συνεχής (καθώς η πράξη $\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ είναι συνεχής). Άρα, η f είναι συνεχής στο $0 \in \mathbb{K}$.



Το $A \in \mathcal{N}_{f(\omega)}$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$: $f(B_K(0, \varepsilon)) \subseteq A$.

Δηλαδή, $\forall t \in K$ με $|t| < \varepsilon$, έχουμε ότι $f(t) = x + ty \in A$.

Επομένως, $x + ty \in A \quad \forall t \in [0, \varepsilon) \implies A$ απορροφούν στο x .

Άρα, κάθε A ανοιχτό, ισορροπημένο και κυρτό είναι
κυρτό, ισορροπημένο και απορροφούν σε κάθε σημείο του.

Άρα, $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$, όπου $p_A : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

είναι το συναρπασοειδές του Minkowski.

Ορίζοντας λοιπόν $\mathcal{C} := \{A \subseteq X : A \text{ ανοιχτό, κλειστό, ισορροπημένο}\}$

και $\mathcal{P} := \{p_A : A \in \mathcal{C}\}$, προκύπτει ότι

η $\mathcal{P}$ είναι οικογένεια ημινόρμων στον X , και ότι

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0 \right\}$$

είναι βάση περιοχών του 0. Πράγματι, $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$,

$$\bigcap_{i=1}^n \{x \in X : p_{A_i}(x) < \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^n \varepsilon \cdot \underbrace{\{x \in X : p_{A_i}(x) < 1\}}_{\substack{\parallel \\ A_i \text{ τα}}}$$

$$= \bigcap_{i=1}^n (\varepsilon A_i) \in \mathcal{T}, \quad \text{και ειδικότερα } \varepsilon A_i \text{ τα}$$

$A \in \mathcal{C}$, δηλ. τα $\{x \in X : p_A(x) < 1\}$, ανήκουν στη $\mathcal{B}_0$
και αποτελούν βάση περιοχών του O .

Τέλος, η $\mathcal{P}$ διαχωρίζει σημεία:

$O (X, \gamma)$ είναι τ.χ.χ., και άρα Hausdorff.

Επομένως, $\forall x \neq y$, υπάρχουν $U_x \in \mathcal{U}_x$, $U_y \in \mathcal{U}_y$

ώστε $U_x \cap U_y = \emptyset$. Λόγω του ότι τα ανοιχτά, κυρτά

και ισορροπημένα $\subseteq X$ αποτελούν βάση περιοχών του O ,

και $\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_y = y + \mathcal{U}_0$ (αφού (X, γ) τ.χ.χ.),

υπάρχουν ανοιχτά, κυρτά και ισορροπημένα $A, B \in \mathcal{U}_0$

$$\text{ώστε } x+A \subseteq \mathcal{U}_x, \quad y+B \subseteq \mathcal{U}_y$$

$$\Rightarrow (x+A) \cap (y+B) = \emptyset.$$

$$\text{Επίσης, } A = \{z \in X : p_A(z) < 1\} \Rightarrow x+A = \{z \in X : p_A(z-x) < 1\}.$$

$$\text{Παρόμοια, } B = \{z \in X : p_B(z-y) < 1\}.$$

$$\text{Το } y \notin x+A \Rightarrow p_A(z-x) \geq 1 \Rightarrow p_A(x-y) \neq 0. \text{ Άρα, η } \mathcal{P}$$

διαχωρίζει σημεία. ■

→ Χαρακτηρισμοί συνέχειας γραμμικών συναρτησοειδών

Πρώτα θα δούμε χαρακτηρισμούς σε $\mathbb{R}^n$ γενικώς, και μετά ειδικότερα σε τοπικά κυρτούς χώρους. Σε $\mathbb{R}^n$, οι χαρακτηρισμοί είναι ανάλογοι αυτών που ισχύουν σε χώρους με νόρμα.

→ Ορισμός: Έστω (X, τ) τυχ. Συμβολίζουμε

$$(X, \tau)^* := \{ f: (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ γραμμική και συνεχής} \}.$$

→ Πρόταση: Έστω (X, τ) τγλ, και $f: (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ γραμμική, $f \neq 0$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (α) f συνεχής (δηλ., $f \in (X, \tau)^*$).
- (β) $\ker f$ κλειστός
- (γ) $\ker f$ όχι πυκνός στον (X, τ) .
- (δ) f φραγμένη σε μια περιοχή του 0 .
- (ε) f συνεχής στο 0 .

Ανδδ.: (α) $\implies$ (β): $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ κλειστός, ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς απεικόνισης.

(β) $\implies$ (γ): $\ker f$ κλειστός στον $(X, \tau) \implies \overline{\ker f}^\tau = \ker f \neq X$, αφού $f \neq 0$.

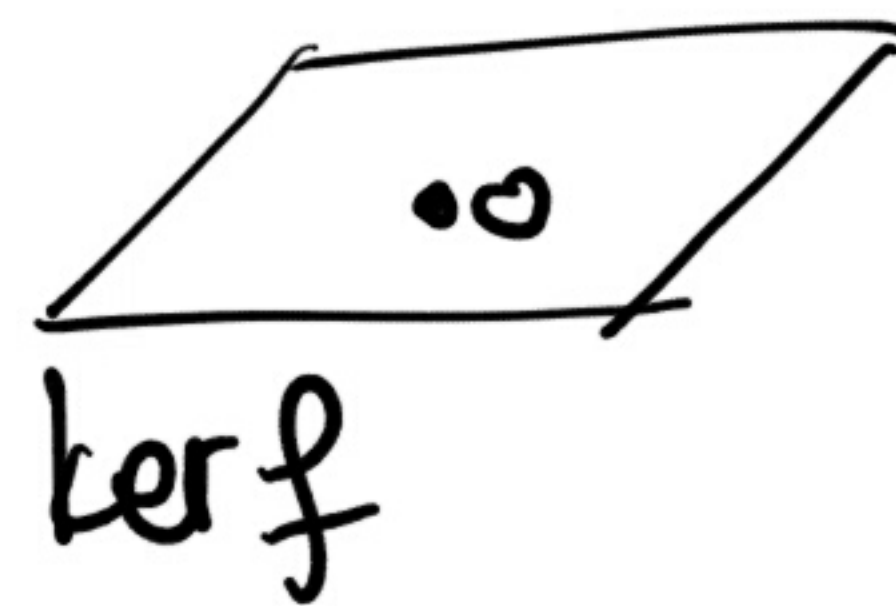
Άρα, $\ker f$ όχι πυκνός στον (X, τ) .

(γ) $\implies$ (δ): $\overline{\ker f}^\tau \neq X \implies \exists x \in X$ ώστε $x \notin \overline{\ker f}^\tau$.

Άρα, $\exists \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}_x$ ώστε $\mathcal{U}_x \cap \ker f = \emptyset$.

$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0 \implies \exists V \in \mathcal{U}_0$ ώστε $\mathcal{U}_x = x + V$.

Επομένως, $(x + V) \cap \ker f = \emptyset$.



Αφού το V είναι περιοχή του O και $o(X, Y)$ είναι $εχχ$,
υπάρχει ισορρονημένη περιοχή V_0 του O ώστε $V_0 \subseteq V$.

Άρα, $(x + V_0) \cap \ker f = \emptyset$ ^(*) για αυτό το ισορρονημένο V_0 .

Ισχυρισμός: $\forall W$ ισορρονημένο $\subseteq X$, ή $f(W) = \mathbb{K}$ ή $f(W)$ φραγμένο.

Πράγματι, έστω ότι $f(W)$ αφραχτο. Τότε, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\exists y \in W$

με $|f(y)| > |a|$. Επίσης, λόγω γραμμικότητας,

$$\left| f\left(\frac{a}{f(y)} \cdot y\right) \right| = |a|$$

μέτρο $< 1 \Rightarrow$

$\frac{a}{f(y)} \cdot y \in W$ ^{$\because y_0$} (W ισορρονημένο)

Άρα, $f(y_0) = \lambda a$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| = 1$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot y_0\right) = a, \text{ όπου } \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 1, y_0 \in W \xrightarrow[\text{isopp.}]{W} \frac{1}{\lambda} y_0 \in W.$$

Αφού $(x + V_0) \cap \ker f = \emptyset$ (✖), είναι αδύνατον να ισχύει ότι

$$f(V_0) = \mathbb{K} \quad (\text{γιατί τότε θα είχαμε και } f(x + V_0) = f(x) + f(V_0) = \mathbb{K}).$$

Άρα, $f(V_0)$ φραγμένο $\subseteq (\mathbb{K}, |\cdot|)$.