



Αξιώσεις τοπολογίες

→ Η w -τοπολογία στον X :

$$X^* = \{ x^* : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : x^* \text{ συνεχής γραμμική απεικόνιση} \}.$$

Κάθε $x^* \in X^*$ είναι συνεχής $: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$, και άρα

αντιστρέφει ανοιχτά του $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ σε ανοιχτά του $(X, \|\cdot\|)$

(τα ανοιχτά του $(X, \|\cdot\|)$ είναι ενώσεις ανοιχτών μισθών

$$B_{(X, \|\cdot\|)}(x, r).$$

Όμως, ο $(X, \|\cdot\|)$ μπορεί να έχει ηίο ποσότητα ανοιχτά από ένα χρειά-

Ζητάμε για να είναι οι $x^* : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ συνεχείς.

Ορίζουμε

$\tau_w :=$ η μικρότερη τοπολογία στον X που περιέχει ως
 $(x^*)^{-1}(U)$, $\forall U$ ανοιχτό στον $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, $\forall x^* \in X^*$

= η μικρότερη τοπολογία τ στον X ώστε κάθε
 $x^* \in X^*$ να είναι συνεχής: $(X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Αποκαλούμε την τ_w την αδύνη τοπολογία στον X , ή την
w-τοπολογία στον X . Συμβολίζουμε $(X, \tau_w) =: (X, w)$.

Η w -τοπολογία στον X είναι χρήσιμη επειδή έχει πιο πολλά ανοιχτά από όσα η τοπολογία του $(X, || \cdot ||)$.

Άρα, ο (X, w) έχει περισσότερα συμπαγή από τον $(X, || \cdot ||)$, και έτσι περισσότερα σύνολα απολαμβάνουν τις όμορφες ιδιοτητές που η συμπαγεια συνεπάγεται (π.χ. ύπαρξη υποδιεκτακών ορίων κάθε δικτύου).

→ Παρατήρηση 1: $\forall x_0 \in X$ και $\forall U \in \mathcal{T}_X$, ισχύει ότι
 $U \in \mathcal{T}_w \iff x_0 + U \in \mathcal{T}_w$.

Δηλαδή, $\mathcal{U}_{x_0} = x_0 + \mathcal{U}_0, \quad \forall x_0 \in X$.

Ανδδ: Αρκεί το ($\Rightarrow$). Έστω $x_0 \in X$. Θάδο, $\forall U \in \mathcal{T}_w, x_0 + U \in \mathcal{T}_w$ ενίοτε.

Βήμα 1: Ισχύει για $U = (x^*)^{-1} (B(z, r))$, όπου $B(z, r)$ η τυχαία ανοιχτή μπάλα του $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Πράγματι:

$$U \in \mathcal{T}_w, \text{ και } U = \{x \in X : |x^*(x) - z| < r\}$$

$$\Rightarrow x_0 + U = \{ \underbrace{x_0 + x}_{=y} \in X : |x^*(x) - z| < r \} =$$

$$= \{ y \in X : \underbrace{|x^*(y - x_0) - \bar{x}|}_{x^*(y) - x^*(x_0)} < r \}$$

$$= \{ y \in X : |x^*(y) - \underbrace{(x^*(x_0) + \bar{x})}_{\alpha \in K}| < r \}$$

$$= (x^*)^{-1} (B(\alpha, r)) \in \mathcal{T}_w \text{ ενισκ.}$$

Βήμα 2: Ισχύει για $U = (x^*)^{-1}(V)$, όπου x^* το τυχόν στοιχείο του $\mathcal{X}^*$ και V το τυχόν ανοικτό στον $(K, |\cdot|)$.

Πράγματι, $U \in \mathcal{T}_w$, και:

$$\begin{aligned} V = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) &\implies U = (x^*)^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} (x^*)^{-1}(B(x_i, r_i)) \\ &\implies x_0 + U = \bigcup_{i \in I} \underbrace{x_0 + (x^*)^{-1}(B(x_i, r_i))}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ and Βήμα 1}} \in \mathcal{T}_w. \end{aligned}$$

→ Βήμα 3: Ισχύει για το τυχαίο στοιχείο U της βάσης

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(V_i) : n \in \mathbb{N}, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, V_1, \dots, V_n \text{ ανοιχτά στον } (K, |\cdot|) \right\}.$$

Πράγματι, για την τυχαία επιλογή τέτοιων παραμέτρων,

$$\text{το } \mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(V_i) \in \mathcal{T}_w, \text{ και}$$

$$x_0 + \mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \underbrace{\left(x_0 + (x_i^*)^{-1}(V_i) \right)}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ and Πρόμα 2}} \in \mathcal{T}_w.$$

Πρόμα 4: Έστω $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_w$. Τότε, $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} B_i$, όπου $B_i \in \mathcal{B} \ \forall i \in I$

$$\Rightarrow x_0 + \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(x_0 + B_i)}_{\in \mathcal{T}_w, \text{ and Πρόμα 3}} \in \mathcal{T}_w.$$

→ Παρατήρηση 2: Το σύνολο

$$\mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^n (x_i^\Phi)^{-1} (B(0, \varepsilon)) : n \in \mathbb{N}, x_1^\Phi, \dots, x_n^\Phi \in X^\Phi, \varepsilon > 0 \right\}$$
$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |x_i^\Phi(x)| < \varepsilon\} : \text{—————} \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του 0. Επομένως, n

$$\mathcal{B}_{x_0} := x_0 + \mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x_0 + x \in X : |x_i^\Phi(x)| < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}, x_1^\Phi, \dots, x_n^\Phi, \varepsilon > 0 \right\}$$
$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{x \in X : |x_i^\Phi(x - x_0)| < \varepsilon\} : \text{—————} \right\}$$

αποτελεί βάση περιοχών του x_0 , $\forall x_0 \in X$.

Απόδ.: Έστω $U \in \mathcal{N}_0$. Τότε, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$,
 $V_1, \dots, V_n$ ανοιχτά στο $(K, |\cdot|)$, ώστε $0 \in \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(V_i) \subseteq U$.

Κάθε ανοιχτό V_i περιέχει το 0 (καθώς $0 \in (x_i^*)^{-1}(V_i)$

$$\Rightarrow x_i^*(0) \in V_i$$

Άρα, $\exists \varepsilon_i > 0$ ώστε:

$$B(0, \varepsilon_i) \subseteq V_i.$$

Άρα, $B(0, \varepsilon) \subseteq V_i$, $\forall i=1, \dots, n$,

όπου $\varepsilon := \min \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Επομένως, $0 \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(B(0, \varepsilon))}_{\in \mathcal{T}_W} \subseteq \bigcap_{i=1}^n (x_i^*)^{-1}(V_i) \subseteq U$.



Μπορούμε να εκφράσουμε κάθε

$$\{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\} = \{x \in X : |x_i^*|(x-0) < \varepsilon\}$$

ως την " $B_{|x_i^*|}(0, \varepsilon)$ " : την "μπαλα" στον X , με

κέντρο 0 και ακτίνα ε , ως προς την "απόσταση"

$|x_i^*|$. Έτσι, η B_0 αποτελείται από πεπερασμένες τσμπές

$\bigcap_{i=1}^n B_{|x_i^*|}(0, \varepsilon)$ "ανοιχτών μπαλών" κέντρου 0 , ως προς τις

"αποστάσεις" $|x_i^*|$.

Παρόμοια, εκφράζουμε κάθε $\{x \in X : |x_i^*(x-x_0)| < \varepsilon\}$

ως την $B_{|x_i^*|}(x_0, \varepsilon)$. Έτσι, η B_{x_0} αποτελείται από πεπερ.

τσμπές $\bigcap_{i=1}^n B_{|x_i^*|}(x_0, \varepsilon)$ "ανοιχτών μπαλών" κέντρου x_0 ,

ως προς τις "αποστάσεις" $|x_i^*|$.

Στην πραγματικότητα, τα $|x^*|$, για $x^* \in X^*$, δεν είναι νόρμες

(και έτσι η $d(x, y) := |x^*|(x-y)$, $\forall x, y \in X$, δεν είναι μετρική).

Είναι όμως ημινόρμες (δηλ. ψευδονόρμες).

→ Ημινόρμες, Θεώρημα Hahn-Banach

→ Ορισμός: Έστω X διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Μια $p: X \rightarrow \boxed{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ λέγεται ημινόρμα αν:

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$, $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

→ Ιδιότητες:

- $p(x) = p(-x)$, $\forall x \in X$.

- $p(0) = 0$

- $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$, $\forall x, y \in X$.

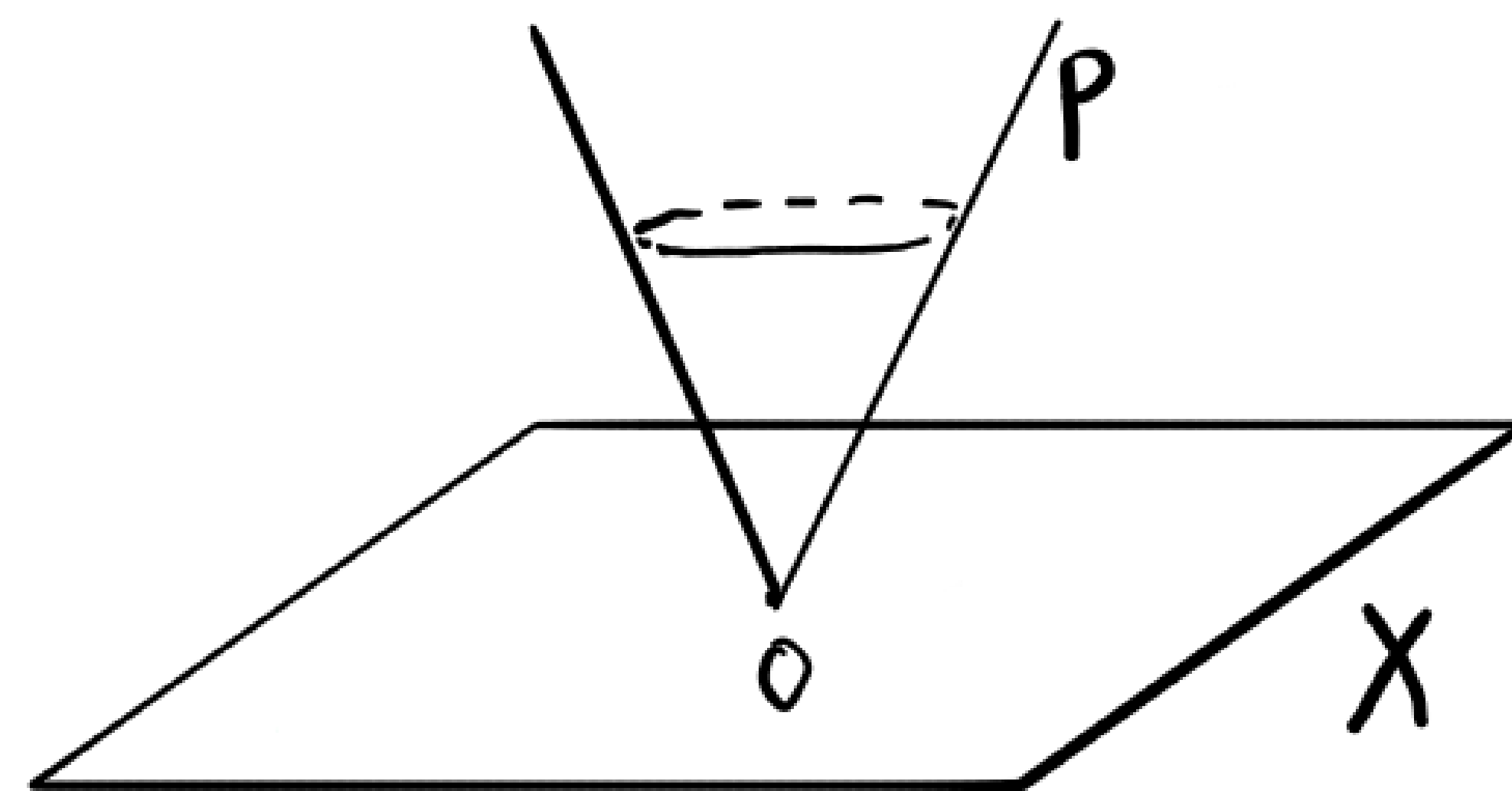
- Το $Y = \{x \in X : p(x) = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X :

$$\left[\begin{array}{l} \forall x, y \in Y, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x+y \in Y. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in Y, \quad p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) = |\lambda| \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in Y. \end{array} \right]$$

- Κάθε ημινόρμα $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι κυρτή συνάρτηση:

$$\forall x, y \in X, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} p(tx + (1-t)y) &\leq p(tx) + p((1-t)y) \\ &= tp(x) + (1-t)p(y). \end{aligned}$$



⚠ $\forall x^* \in X^*$, $\omega |x^*|: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι ημινόρμα.

→ Θεώρημα Hahn - Banach: Έστω X διανυσματικός χώρος επί

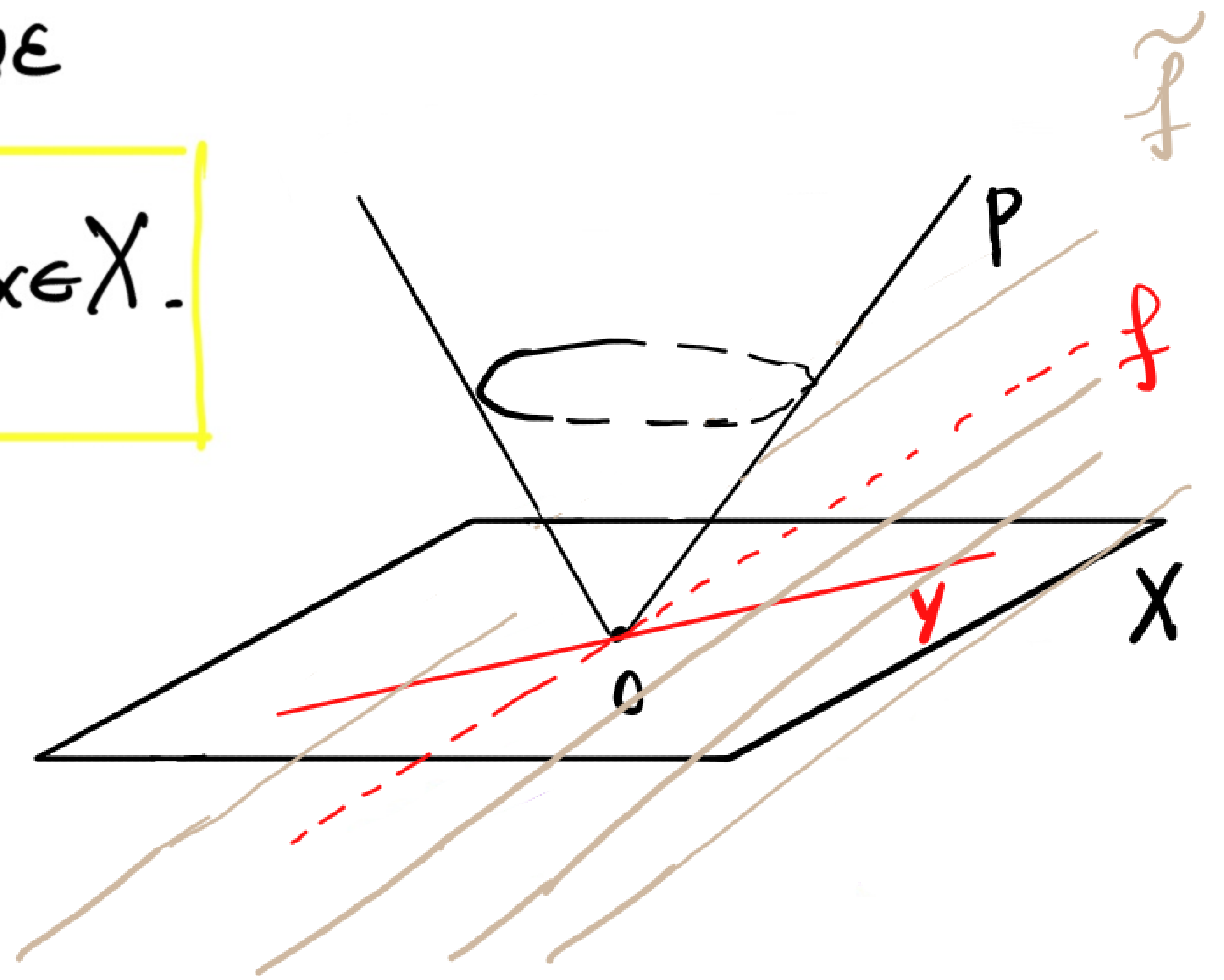
του $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω:

(i) $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ημινόρμα, και

(ii) $Y \leq X$ και $f: Y \rightarrow K$ γραμμική, με $|f(y)| \leq p(y) \quad \forall y \in Y$.

Τότε, $\exists \tilde{f}: X \rightarrow K$ γραμμική, με

$$\tilde{f}|_Y = f \quad \text{και} \quad |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$



→ Θεώρημα: (αναλυτική μορφή του Θ. Hahn-Banach)

Έστω X χώρος με νόρμα, και $Y \leq X$.

Έστω $f \in Y^*$. Τότε, $\exists \tilde{f} \in X^*$, με

$$\tilde{f}|_Y = f \quad \text{και} \quad \|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$$

Αποδ.: $\forall y \in Y, \quad |f(y)| \leq \underbrace{\|f\|_{Y^*}}_{\text{νημνόρμα στον } Y} \cdot \|y\|.$

Ορίζουμε $p: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

με $p(x) = \|f\|_{Y^*} \cdot \|x\| \quad \underline{\forall x \in X}$. Η p είναι ημινόρμα στον X ,

και η γραμμική $f: Y \rightarrow \mathbb{K}$ ικανοποιεί:

$$|f(y)| \leq p(y) \quad \forall y \in Y.$$

Από το Θ. Hahn-Banach, $\exists$ γραμμική $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{K}$, με

$$\tilde{f}|_Y = f \quad \text{και} \quad |\tilde{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X,$$

$$\text{δηλ.} \quad |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_{Y^*} \cdot \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Άρα, $\tilde{f} \in X^*$ και μάλιστα $\|\tilde{f}\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}$.

και τετριμμένα: $\|f\|_{Y^*} \leq \|\tilde{f}\|_{X^*} :$

$$\|f\|_{Y^*} = \sup_{y \in S_Y(0,1)} \underbrace{|f(y)|}_{\|\tilde{f}(y)\|}$$

$$\begin{array}{l} S_Y(0,1) \\ \subseteq \\ S_X(0,1) \end{array} \quad \leq \sup_{x \in S_X(0,1)} |\tilde{f}(x)| = \|f\|_{X^*}.$$

Also, $\|\tilde{f}\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}.$



→ Βασικά νοήματα του Θ. Hahn - Banach:

① $\forall x_0 \in X, \exists f \in S_{X^*}(0,1)$ με $f(x_0) = \|x_0\|$ (Ανλ., $\exists f \in S_{X^*}(0,1)$ που "βλέπει" εν $\|x_0\|$.)

Απόδ: Έστω $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Ορίζουμε $Y := \text{span}\{x_0\}$,

και $f_0: Y \rightarrow \mathbb{K}$
με $f_0(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Τότε, $f_0 \in Y^*$ και $\|f_0\|_{Y^*} = 1$: $|f_0(\underbrace{\lambda x_0}_y)| = \underbrace{|\lambda x_0|}_y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Από Θ. Hahn - Banach, η f_0 επεκτείνεται σε κάποια γραμμική

$$f: X \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mu \in \quad \|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} = 1$$

$$\text{και} \quad f(x_0) \stackrel{x_0 \in Y}{=} f_0(x_0) = 1 \cdot \|x_0\| = \|x_0\|.$$

②

$$\forall x \in X, \quad \|x\| = \max_{f \in S_{X^*}(0,1)} |f(x)|$$

$$\left(= \max_{f \in \tilde{B}_{X^*}(0,1)} |f(x)| \right)$$



Ando: Έστω $x \in X$.

$\forall f \in B_{X^*}(0,1)$, έχουμε:

$$|f(x)| \leq \underbrace{\|f\|_{X^*}}_1 \cdot \|x\|. \text{ Άρα:}$$

$$\|x\| \geq \sup_{x \in B_{X^*}(0,1)} |f(x)|$$

Kau $\exists f_0 \in S_{X^*}(0,1) \left(\subseteq B_{X^*}(0,1) \right)$ wace

$$\|x\| = |f_0(x)|.$$

Apra, $\|x\| = |f_0(x)| = \max_{x \in S_{X^*}(0,1)} |f(x)| = \max_{x \in B_{X^*}(0,1)} |f(x)|.$



③ $0 \in X^*$ διαχωρίζει σημεία του X .

Απόδ.: Έστω $x \neq y$ στον X . Τότε, $\exists f \in X^*$, με $\|f\|_{X^*} = 1$,

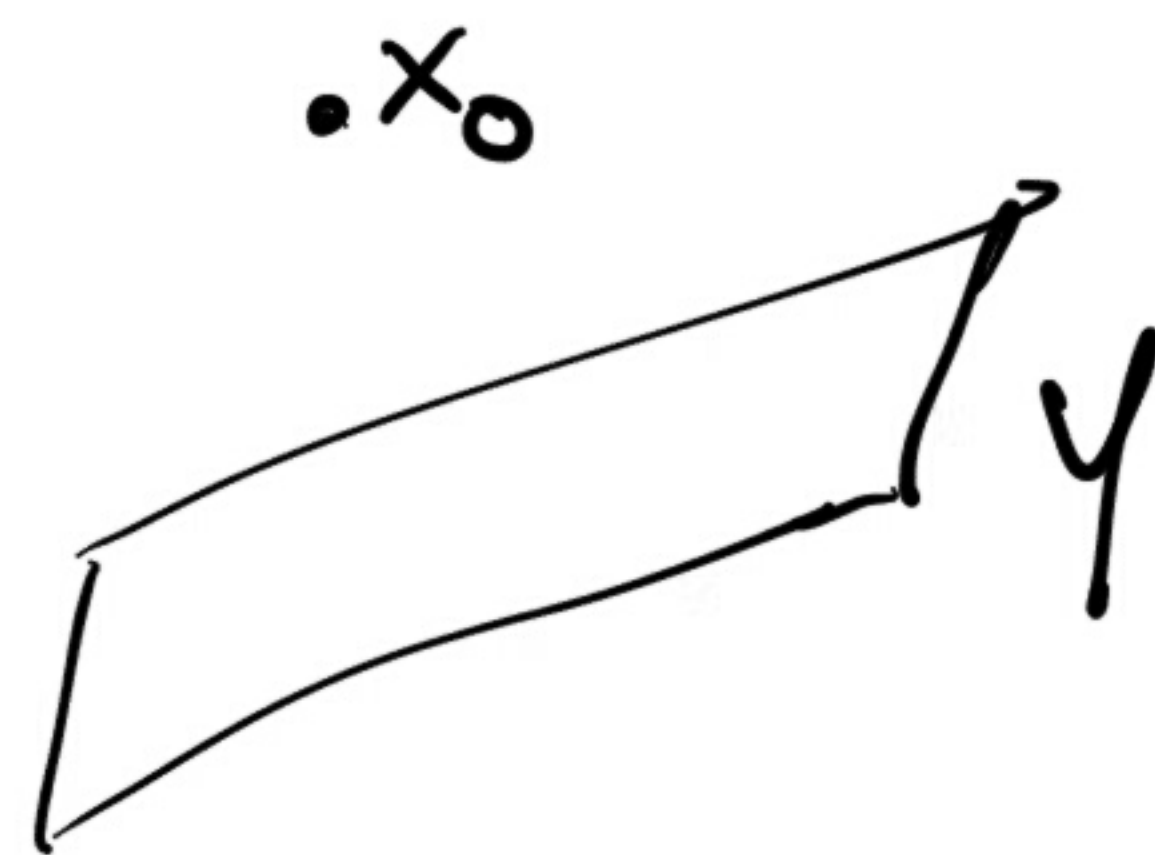
ώστε $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ για αυτήν
εν $f \in X^*$.

④ $0 \in X^*$ διαχωρίζει σημεία από κλειστούς υποχώρους (στον X).

Αν1., έστω $x_0 \in X$ και $Y \leq X$ κλειστός. Τότε, $\exists f \in X^*$,

με $\|f\| = 1$, ώστε

$f(y) = 0 \quad \forall y \in Y$
και $f(x_0) = \text{dist}_{\|\cdot\|}(x_0, Y)$



→ Η w^* -τοπολογία στον X^* : $\forall (X, \|\cdot\|)$, ορίσαμε

$$X^* = \{x^* : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : x^* \text{ γραμμική και συνεχής}\}.$$

Χρησιμοποιώντας τον $(X^*, \|\cdot\|)$ στη θέση του $(X, \|\cdot\|)$,
↪ νόρμα τελεστών

ορίζουμε

$$X^{**} := (X^*)^* = \{f : (X^*, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \text{ γραμμική και συνεχής}\}$$

Η w^* -τοπολογία στον X^* θα είναι η μικρότερη τοπολογία
ώστε κάποιες από τις $f \in X^{**}$ να είναι συνεχείς : συσχετιζόμενα,

αυτές που δίνονται and υπολογισμοί σε σημείο:

→ Πρόταση: $\forall x_0 \in X$, ορίζουμε $f_{x_0} : X^* \rightarrow K$,
με $f_{x_0}(x^*) = x^*(x_0)$, $\forall x^* \in X^*$.

Τότε, $f_{x_0} \in X^{**}$ και $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$.

Απόδ: $\forall x^* \in X^*$, $|f_{x_0}(x^*)| = |x^*(x_0)| \leq \|x_0\| \cdot \|x^*\|$. Άρα, $f_{x_0} \in X^{**}$
και $\|f_{x_0}\| \leq \|x_0\|$.

Όμως, $\|f_{x_0}\| \geq \|x_0\|$: and Θ. Hahn-Banach, $\exists x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| = 1$
και $x_0^*(x_0) = \|x_0\|$. Άρα, $\|f_{x_0}\| \left(= \sup_{\|x^*\|=1} |f_{x_0}(x^*)| \right) \geq |f_{x_0}(x_0^*)| =$
 $f_{x_0}''(x_0^*) = \|x_0\|$. ■

→ Πρόβλημα: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Η απεικόνιση

$$\tau: (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X^{**}, \|\cdot\|)$$

$\hookrightarrow$ νόρμα του X $\hookrightarrow$ νόρμα τελεστών

με

$$\tau(x) := f_x \quad \forall x \in X,$$

είναι

ισομετρική εμφύτευση (δηλ. τ γραμμική, τ ισομετρία, άρα και τ 1-1).

⚠ Η τ δεν είναι πάντα ονι! Αν είναι, τότε ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται αυτοανι.

→ Ορίζουμε

$\tau_{w^*} :=$ η μικρότερη τοπολογία τ στον X^* ώστε η
 $f_x : (X^*, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$ να είναι συνεχής, $\forall x \in X$

= η μικρότερη τοπολογία στον X^* που περιέχει τα
 $(f_x)^{-1}(V)$, $\forall x \in X$, $\forall V$ ανοικτό στο $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Αποκαλούμε την τ_{w^*} την αδθενή* -τοπολογία στον X^* , ή
την w^* -τοπολογία στον X^* . Συμβολίζουμε $(X^*, \tau_{w^*}) =: (X^*, w^*)$.

→ Παρατηρήσεις : ① $\mathcal{N}_{x_0^*} = x_0^* + \mathcal{N}_0$, $\forall x_0^* \in X^*$.

$$\textcircled{2} \text{ Η } \mathcal{B}_0 := \left\{ \bigcap_{i=1}^n (f_{x_i})^{-1} (B(0, \varepsilon)) : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{ x^* \in X^* : |f_{x_i}(x^*)| < \varepsilon : \text{---} // \text{---} \} \right.$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{ x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon : \text{---} // \text{---} \} \right.$$

είναι βάση περιοχών του $0 \in X^*$ στην $\mathcal{T}_{w^*}$.

Επομένως, n

$$\mathcal{B}_{x_0^*} := x_0^* + \mathcal{B}_0 =$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \left\{ x_0^* + x^* \in X^* : |f_{x_i}(x^*)| < \varepsilon : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0 \right\} \right\}$$

$$= \left\{ \bigcap_{i=1}^n \left\{ x^* \in X^* : \underbrace{|f_{x_i}(x^* - x_0^*)|}_{\substack{= \\ |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)|}} < \varepsilon : \text{---} // \text{---} \right\} \right\}$$

είναι βάση περιοχών του x_0^* , $\forall x_0^* \in X^*$.

Απόδ.: Άσκηση (συνάρτηση με την περίπτωση του (X, w)). ■

⚠ $\forall x \in X$, η $\|f_x\|: X^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι ημινόρμα.

⚠ Μπορούμε να εφευράσουμε το $\{x^* \in X^*: \underbrace{\|f_{x_i}\|(x^*)}_{\|f_{x_i}\|(x^*-0)} < \varepsilon\}$

ως την $B_{\|f_{x_i}\|}(0, \varepsilon)$, την "ανοιχτή μπάλα" στον X^*
με κέντρο το $0 \in X^*$ και ακτίνα ε , ως προς "απόσταση"
στην ημινόρμα $\|f_{x_i}\|$.

Έτσι, η B_0 αποτελείται από πεπερασμένες κομés $\bigcap_{i=1}^n B_{\|f_{x_i}\|}(0, \varepsilon)$
"ανοιχτών" μπαλών των ημινόρμών $\|f_{x_i}\|$, με κέντρο το $0 \in X^*$.

Παρόμοια, εφευράσουμε το $\{x^* \in X^*: \|f_{x_i}\|(x^*-x_0^*) < \varepsilon\}$ ως την

"ανοιχτή μπάλα" $B_{\|f_{x_i}\|}(x_0^*, \varepsilon)$ ως προς την ημινόρμα $\|f_{x_i}\|$,
με κέντρο το x_0^* και ακτίνα $\varepsilon > 0$.

Έτσι, η $B_{x_0^*}$ αποτελείται από πεπερασμένες κομés $\bigcap_{i=1}^n B_{\|f_{x_i}\|}(x_0^*, \varepsilon)$

"ανοιχτών μπαλών" των ημινόρμών $\|f_{x_i}\|$, με κέντρο x_0^* .