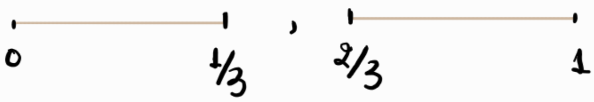
⚠ Παρατηρούμε ότι το C έχει το χαρακτηριστικό ότι, όταν "ζουμάρουμε" κατάλληλα πάνω του, βλέπουμε ξανά το C.

Συγκεκριμένα:

$C_0 =$  ,

$C_1 =$  ,

και από εκεί και στο εξής η διαδικασία κατασκευής του C επαναλαμβάνεται αυτούσια στα  (απλά σε κλίμακα $\times 1/3$ της αρχικής).

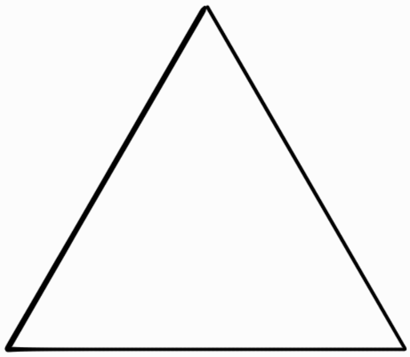
Έτσι,
$$C = \underbrace{\left(\frac{1}{3} C\right)}_{\substack{\text{το κομμάτι του } C \\ \text{που ζει στο } [0,1/3]}} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{3} C + \frac{2}{3}\right)}_{\substack{\text{το κομμάτι του } C \\ \text{που ζει στο } [2/3,1].}}$$

Δηλαδή, το C αποτελείται από ένα συρρικνωμένο αντίγραφο του εαυτού του, καθώς και από ένα μεταφερμένο αντίτυπο αυτού.

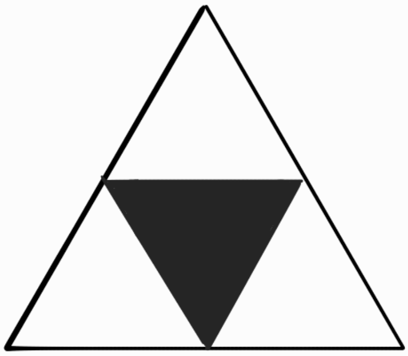
Υπάρχουν και άλλα ενδιαφέροντα σύνολα παρόμοιας μορφής, που εμφανίζονται στη θεωρία των fractals. Π.χ.:

→ Το τρίγωνο του Sierpinski :

$S_0 =$

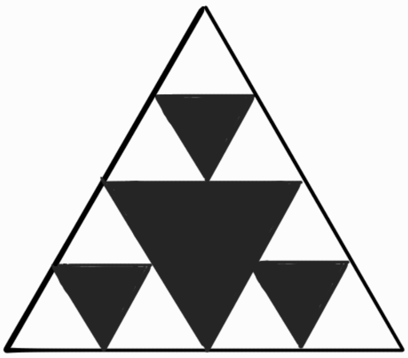


$S_1 =$

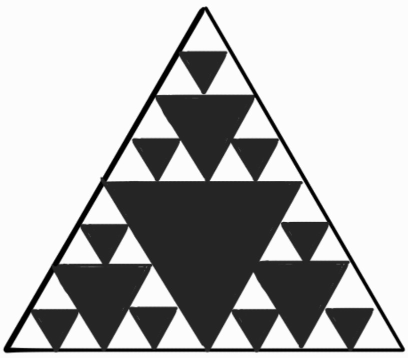


Σε κάθε βήμα, αφαιρούμε το σκιασμένο χωρίο.

$S_2 =$

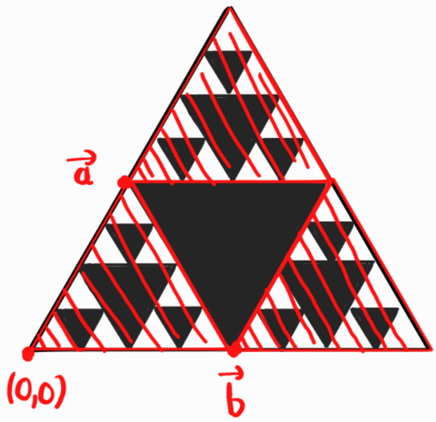


$S_3 =$



⋮

Το τρίγωνο του Sierpinski ορίζεται ως το $S := \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n$.



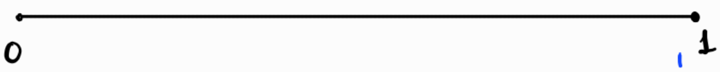
Παρατηρούμε ότι τα κόκκινα τρίγωνα είναι συστολές του αρχικού κατά $\frac{1}{2}$, και ότι, σε κάθε ένα, το κομμάτι του S εκεί κατασκευάζεται με την ίδια διαδικασία όπως το S, αλλά σε κλίμακα $\times \frac{1}{2}$.

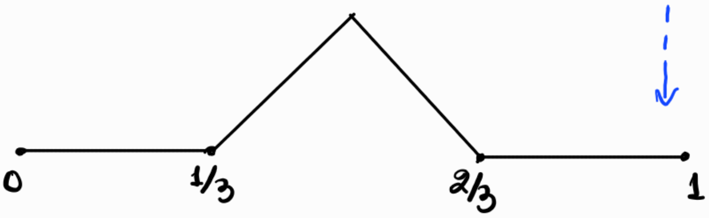
Επομένως, $S = \left(\frac{1}{2} S\right) \cup \left(\frac{1}{2} S + \vec{a}\right) \cup \left(\frac{1}{2} S + \vec{b}\right)$.

3 αντίτυπα του $\frac{1}{2} S$

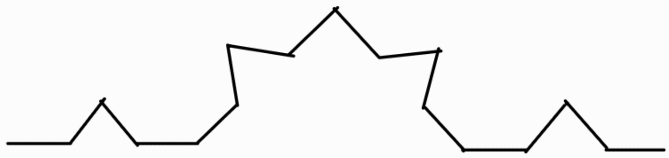
Τελικά, ΘΔΟ:
$$\dim_H S = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

→ Η χιονονιφάδα του Koch:

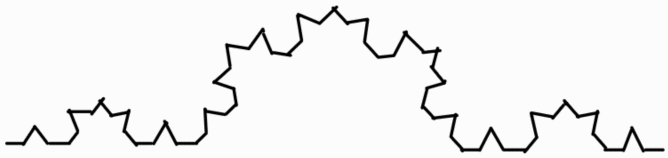
$X_1 =$ 

$X_2 =$ 

Αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο, και το αντικαθιστούμε με 2 τμήματα ίσου μήκους με αυτό που αφαιρέθηκε. Άρα, μήκος$(X_2) = \frac{4}{3} \cdot$ μήκος(X_1).

$X_3 =$ 

Ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία σε κάθε στάδιο, για κάθε τμήμα της πολυγωνικής γραμμής του σταδίου.

$X_4 =$ 

⋮

Η χιονονιφάδα του Koch είναι το όριο αυτών των πολυγωνικών καμπυλών X_n, καθώς το $n \to +\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

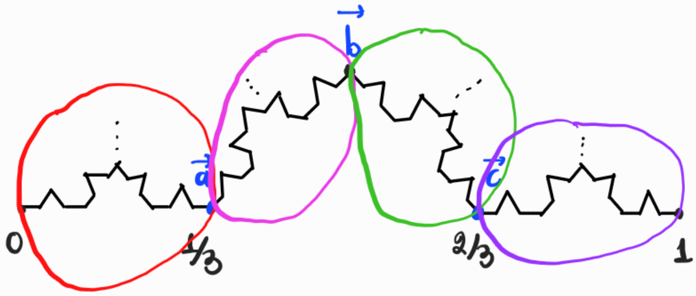
Συμβολίζοντας με $X_i(t)$, $0 \le t \le 1$, κατάλληλη παραμέτρηση της X_i με σταθερή ταχύτητα ($\forall i \in \mathbb{N}$), αποδεικνύεται ότι

$$\| X_{n+1} - X_n \|_\infty \le \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και άρα ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, ο οποίος είναι πλήρης.

Επομένως, $\exists\, X \in C([0,1]) : \| X_n - X \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Η χιονονιφάδα του Koch είναι η εικόνα αυτής της X.



Κάθε ένα από τα κυκλωμένα χωρία περιέχει ένα αντίγραφο του $\frac{1}{3}S$.

Έτσι,

$$S = \left(\tfrac{1}{3}S\right) \cup \left(T_1\left(\tfrac{1}{3}S\right) + \vec{a}\right) \cup \left(T_2\left(\tfrac{1}{3}S\right) + \vec{b}\right) \cup \left(\left(\tfrac{1}{3}S\right) + \vec{c}\right),$$

4 αντίτυπα του $\frac{1}{3}S$.

όπου T_1, T_2 στροφές του $\mathbb{R}^2$.

(*) Σε κάθε στάδιο της κατασκευής, το μήκος της πολυγωνικής γραμμής X_n είναι τα $\frac{4}{3}$ του μήκους της X_{n-1}.

Άρα, περιμένουμε ότι $\mathcal{H}^1(X) = +\infty$ $(\Rightarrow \dim_H X \geq 1)$.

Τελικά, ΘΔΟ $\dim_H X = \dfrac{\log 4}{\log 3}$.

→ Θα δούμε ότι, μέσω μιας κατάλληλης ανάλυσης, μπορούμε να προσδιορίσουμε άμεσα τη διάσταση Hausdorff όλων των αυτοόμοιων συνόλων (υπό μία μικρή προϋπόθεση).

→ **Ορισμός:** Μια απεικόνιση $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ λέγεται συστολή με λόγο $0 \leq r \lneq 1$ αν:

$$|S(x) - S(y)| = r \cdot |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε συστολή (με λόγο r) στον $\mathbb{R}^d$ είναι ή γραμμική απεικόνιση (η $S(x) = r \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$), ή μεταφορά αυτής, ή στροφή αυτής, ή σύνθεση αυτής με μεταφορές και στροφές.

→ Ορισμός: Ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται αυτοόμοιο με λόγο ομοιότητας r ($\in [0,1)$) αν υπάρχουν συστολές $S_1, \dots, S_m$ (για κάποιο $m \in \mathbb{N}$), όλες με (τον ίδιο) λόγο r, ώστε

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

⚠ Τελικά, ΘΔΟ "κάθε"⊛ αυτοόμοιο F έχει $\dim_H F = \frac{\log m}{\log(1/r)}$, όπου r είναι ο λόγος ομοιότητας του F και m είναι το πλήθος των συστολών $S_1, \dots, S_m$, με λόγο r, για τις οποίες ισχύει ότι $F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F)$.

⊛ Υπό μια μικρή προϋπόθεση!

→ Θεώρημα: Έστω $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ συστολές με λόγο ομοιότητας r (<1). Τότε, υπάρχει μοναδικό μη κενό συμπαγές $F \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε

$$F = S_1(F) \cup \dots \cup S_m(F).$$

Μάλιστα, συμβολίζοντας $\tilde{S}(A) := S_1(A) \cup \dots \cup S_m(A)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, προκύπτει ότι $F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)$, για κάποια (οποιαδήποτε) κλειστή μπάλα $B \subseteq \mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα ότι $\tilde{S}(B) \subseteq B$.

$\left(\tilde{S}^k(B) := \underbrace{\tilde{S} \circ \tilde{S} \circ \dots \circ \tilde{S}}_{k \text{ φορές}}(B) \right)$.

⚠ Ισοδύναμα, θέλουμε να δείξουμε ότι, ανάμεσα στα σταθερά σημεία της $\tilde{S}$, υπάρχει μοναδικό (μη κενό) συμπαγές σύνολο.

Ιδέα της απόδειξης: Η $\tilde{S}$ παίρνει τη μπάλα B και τη "διασπείρει" σε μικρότερα n κομμάτια, τα οποία καλύπτουν το F.

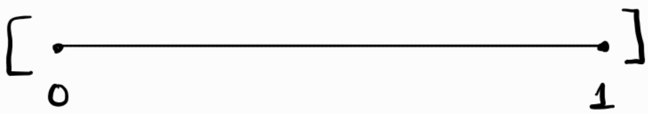
Εφαρμόζοντας ξανά και ξανά την $\tilde{S}$ σε αυτά τα κομμάτια, παίρνουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις του F.

Πχ, για το σύνολο Cantor C, για το οποίο

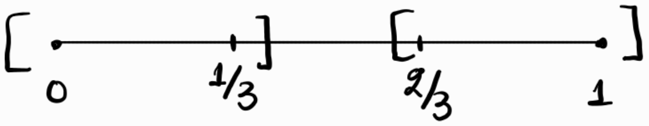
$$C = S_1(C) \cup S_2(C), \quad \text{όπου}$$

$$\begin{cases} S_1(x) = \frac{1}{3}x, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

αν ξεκινήσουμε με την κλειστή μπάλα $B = [0,1]$ (για την οποία βέβαια $\tilde{S}(B) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \subseteq B$), ή ακόμα και με οποιαδήποτε μεγαλύτερη B, η B είναι καλή προσέγγιση του C_0,

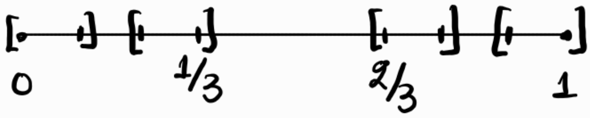


το $\tilde{S}(B) = \frac{1}{3}B \cup \left(\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}\right)$ είναι καλή προσέγγιση του C_1



,

το $\tilde{S}^2(B)$ είναι καλή προσέγγιση του C_2



,

κ.ο.κ. Τελικά, το $\tilde{S}^k(B)$ προσεγγίζει όλο και καλύτερα το C.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος, μάς χρειάζεται το παρακάτω:

→ <u>Λήμμα</u>: Έστω $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ συστολές με τον ίδιο λόγο ομοιότητας. Τότε, υπάρχει κλειστή μπάλα $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\tilde{S}(B) \subseteq B$ (όπου $\tilde{S}(B) := S_1(B) \cup \dots \cup S_m(B)$).

σίγουρα όχι μοναδική.

<u>Απόδ.</u>: Έστω $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ συστολή. Παρατηρούμε ότι, για όλες τις μεγάλες ακτίνες R, οι κλειστές μπάλες $B(0,R)$ έχουν την ιδιότητα ότι

$$S(B(0,R)) \subseteq B(0,R).$$

Πράγματι, έστω r $(\lneq 1)$ ο λόγος της συστολής S.

Ψάχνουμε R ώστε

$$x \in B(0,R) \Longrightarrow S(x) \in B(0,R),$$

δηλαδή ώστε

$$|x| \leq R \Longrightarrow |S(x)| \leq R.$$

Για κάθε $R>0$ και $x \in B(0,R)$,

$$\begin{aligned} |S(x)| &\leq |S(x)-S(0)| + |S(0)| \\ &= r \cdot |x-0| + |S(0)| \\ &= r \cdot |x| + |S(0)| \leq r \cdot R + |S(0)|, \end{aligned}$$

και αυτή η ποσότητα στο δεξί μέλος είναι $\leq R$

$$\Leftrightarrow r \cdot R + |S(0)| \leq R$$

$$\Leftrightarrow R(1-r) \geq |S(0)| \underset{r \lneq 1}{\Leftrightarrow} R \geq \frac{|S(0)|}{1-r}.$$

Άρα,
$$S(B(0,R)) \subseteq B(0,R) \quad \forall\, R \geq \frac{|S(0)|}{1-r}.$$

Τώρα, έστω r ο λόγος ομοιότητας των $S_1, \dots, S_m$.

Από τα παραπάνω, $\forall\, j=1, \dots, m$,

$$S_j\big(B(0,R)\big) \subseteq B(0,R) \quad \forall\, R \geq \frac{|S_j(0)|}{1-r},$$

άρα
$$\tilde{S}\big(B(0,R)\big) \subseteq B(0,R) \quad \forall\, R \geq \max_{j=1,\dots,m} \frac{|S_j(0)|}{1-r}.$$

∎

→ <u>Απόδειξη Θεωρήματος:</u> Επιλέγουμε κλειστή μπάλα $\neq \emptyset$ $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\tilde{S}(B) \subseteq B$$

(ξέρουμε πλέον από το Λήμμα ότι τέτοια μπάλα υπάρχει).

ΘΔΟ το $F := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)$ είναι συμπαγές με $\tilde{S}(F) = F$.

Πράγματι:

- $\forall$ συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^d$, το $\tilde{S}(K) = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$ είναι συμπαγές, ως πεπερασμένη ένωση των συμπαγών $S_j(K)$, $j = 1, \dots, m$ (τα οποία είναι συμπαγή ως εικόνες του συμπαγούς K μέσω των συνεχών συναρτήσεων S_j). Άρα, επαγωγικά, το B είναι συμπαγές $\Longrightarrow$ $\tilde{S}(B)$ συμπαγές $\Longrightarrow$ $\tilde{S}^2(B) = \tilde{S}(\tilde{S}(B))$ συμπαγές, κ.ο.κ.: $\tilde{S}^k(B)$ συμπαγές, $\forall k \in \mathbb{N}$.

- $\tilde{S}^k(B) \subseteq \tilde{S}^{k-1}(B)$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

  Και αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά:

  ⤳ Για $k = 1$ ισχύει, αφού $\tilde{S}(B) \subseteq B$ (έτσι επιλέξαμε τη B).

  ⤳ Έστω ότι $\tilde{S}^k(B) \subseteq \tilde{S}^{k-1}(B)$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

  ⤳ Τότε, $\tilde{S}^{k+1}(B) \subseteq \tilde{S}^k(B)$, αφού

$$\tilde{S}^{k+1}(B) = \tilde{S}^k(\underbrace{\tilde{S}(B)}_{\subseteq B}) \subseteq \tilde{S}^k(B).$$

Επομένως, η $\left(\tilde{S}^k(B)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων. Από γνωστό θεώρημα του Cantor (Cantor's Intersection Theorem),

το $$\boxed{F := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)}$$

είναι $\neq \emptyset$ και κλειστό, άρα και συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\tilde{S}(B)$ στον $\mathbb{R}^d$).

Επιπλέον, $\boxed{\tilde{S}(F) = F}$:

$$\tilde{S}(F) = \tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)\right) \overset{!}{=\!=} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^{k+1}(B)$$

$$= \bigcap_{k=2}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)$$

$$= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B),$$

τα $\tilde{S}^k(B)$ περιέχονται όλα στο $\tilde{S}(B)$.

όπου η ! δικαιολογείται ως εξής:

- $\tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)\right) \subseteq \tilde{S}\left(\tilde{S}^k(B)\right) = \tilde{S}^{k+1}(B) \quad \forall k\in\mathbb{N}$, άρα

$$\tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)\right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^{k+1}(B) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B).$$

- $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B) \subseteq \tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)\right)$:

Έστω $x \in \tilde{S}^k(B)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{S}^k(B) = \bigcup_{y\in B} \tilde{S}^k(y) = \bigcup_{y\in B} \bigcup_{\substack{j_i\in\{1,\dots,m\} \\ \forall i=1,\dots,k}} S_{j_k}\circ\dots\circ S_{j_1}(y).$$

Άρα, $\forall k\in\mathbb{N}$ $\exists$ $(j_1,\dots,j_k)\in\{1,\dots,m\}^k$ και $y_k\in B$

ώστε $\boxed{x = S_{j_k}\circ\dots\circ S_{j_1}(y_k).}$ (*)

Επομένως, έχουμε βρει άπειρους τρόπους να εκφράσουμε το x : για κάθε $k\in\mathbb{N}$, το x προκύπτει συνθέτοντας (κατάλληλες) k από τις $S_1,\dots,S_m$ (πιθανόν με επανάληψη), και εφαρμόζοντας τη σύνθεση σε κάποιο στοιχείο της B.

Ωστόσο, $\forall k\in\mathbb{N}$, η τελευταία συνάρτηση στη σύνθεση (δηλαδή η S_{j_k}, που εμφανίζεται πρώτη στην αλυσίδα (*)) μπορεί να είναι μόνο κάποια από τις (πεπερασμένες το πλήθος) $S_1,\dots,S_m$.

Επομένως, υπάρχουν άπειρα $k\in\mathbb{N}$, έστω $k_1<k_2<k_3<\dots$, ώστε όλες οι $S_{j_{k_n}}$ να είναι ίδιες μεταξύ τους.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι

$$S_{j_{k_n}} = S_1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και έτσι η ⊛ συνεπάγεται ότι

$$x = S_1 \circ S_{j_{k_{n-1}}} \circ \dots \circ S_{j_{k_1}}(y_{k_n})$$

$$= \boxed{S_1\left(S_{j_{k_{n-1}}} \circ \dots \circ S_{j_{k_1}}(y_{k_n})\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Ως συστολή, η S_1 είναι 1-1. Άρα, όλα τα στοιχεία $S_{j_{k_{n-1}}} \circ \dots \circ S_{j_{k_1}}(y_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή, $\exists\ \tilde{y} \in \mathbb{R}^d$:

$$\tilde{y} = S_{j_{k_{n-1}}} \circ \dots \circ S_{j_{k_1}}(y_{k_n}), \quad \forall n \geq 2.$$

Αυτό σημαίνει ότι:

- $x = S_1(\tilde{y}) \in \tilde{S}(\tilde{y})$, και
- $\tilde{y} \in \tilde{S}^{k_n - 1}(B)$, $\forall n \geq 2 \Longrightarrow$

$$\longrightarrow \tilde{y} \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \tilde{S}^{k_n}(B) \overset{(\tilde{S}^k(B))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow}{=\!=\!=} \bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B).$$

Άρα, $x \in \tilde{S}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \tilde{S}^k(B)\right)$.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Θεωρήματος, απομένει η μοναδικότητα: να δειχθεί ότι δεν υπάρχει άλλο μη κενό, συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\tilde{S}(K) = K$.

Αυτό προκύπτει επειδή ορίζεται μία μετρική στο σύνολο $\mathcal{C} := \{$συμπαγή, μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d\}$, και μπορούμε να δείξουμε πως, αν υπάρχει τέτοιο K, η απόσταση του από το F (με αυτή τη μετρική) θα είναι 0. Πράγματι:

→ Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Για κάθε $\delta > 0$, ορίζουμε τη δ-περιοχή του A ως το σύνολο

$$A^\delta := \{y \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(y, A) < \delta\}.$$

→ Ορισμός: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε την απόσταση Hausdorff των A, B ως την ποσότητα

$$\operatorname{dist}_H(A,B) := \inf\{\delta > 0 : B \subseteq A^\delta \text{ και } A \subseteq B^\delta\}.$$

⚠ Η απόσταση Hausdorff δύο συνόλων μάς λέει κατά πόσο πρέπει να "φουσκώσουμε" τα δύο σύνολα, ώστε η "μεγέθυνση" του καθενός να περιέχει το άλλο.

Η $dist_H(A,B)$ είναι σαν να μάς λέει πόσους βαθμούς μυωπίας θα έπρεπε να έχουμε, για να μάς φαίνονται τα A, B σαν ένα σύνολο.

Είναι εύκολο να δειχθεί το παρακάτω:

Πρόταση: Η $dist_H : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ είναι μετρική (όπου $\mathcal{C}$ είναι η οικογένεια των συμπαγών μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$). Με άλλα λόγια:

επειδή τα σύνολα στη $\mathcal{C}$ είναι φραγμένα.

- $dist_H(A,B) \geq 0 \quad \forall A,B \in \mathcal{C}$, και

  $dist_H(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$,

  χρησιμοποιείται η συμπάγεια

- $dist_H(A,B) = dist_H(B,A)$, $\forall A,B \in \mathcal{C}$,

- $dist_H(A,B) \leq dist_H(A,C) + dist_H(C,B)$, $\forall A,B,C \in \mathcal{C}$.

Επιπλέον:

- Για κάθε συστολή $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με λόγο $r \; (\neq 1)$, ισχύει:

  $dist_H(S(A),S(B)) \leq r \cdot dist_H(A,B)$, $\forall A,B \in \mathcal{C}$.

- Επομένως, για κάθε $S_1, \dots, S_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με κοινό λόγο $r \,(\leq 1)$, ισχύει ότι
$$\mathrm{dist}_H\left(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)\right) \leq r \cdot \mathrm{dist}_H(A,B), \ \forall A, B \in \mathcal{C}$$
(όπου $\tilde{S}(C) := S_1(C) \cup \dots \cup S_m(C), \ \forall C \subseteq \mathbb{R}^d$).

Αυτό προκύπτει άμεσα από το παραπάνω, καθώς κάθε $S_2(A), \dots, S_m(A)$ είναι αντίτυπο του $S_1(A)$, κάθε $S_2(B), \dots, S_m(B)$ είναι αντίτυπο του $S_1(B)$, <u>και</u> κάθε $S_2(A \cup B), \dots, S_m(A \cup B)$ είναι αντίτυπο του $S_1(A \cup B)$. Επομένως, $\forall j = 2, \dots, m$,
$$S_j(A)^\delta \supseteq S_j(B) \iff S_1(A)^\delta \supseteq S_1(B),$$
και
$$S_j(B)^\delta \supseteq S_j(A) \iff S_1(B)^\delta \supseteq S_1(A).$$

Γνωρίζοντας αυτά, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος:

Έστω ότι $\exists$ μη κενό, συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε
$$\tilde{S}(K) = K.$$
Τότε (αφού και $\tilde{S}(F) = F$, F συμπαγές), έχουμε ότι
$$0 \leq \mathrm{dist}_H(F, K) = \mathrm{dist}_H\left(\tilde{S}(F), \tilde{S}(K)\right) \leq r \cdot \mathrm{dist}_H(F, K)$$
Αφού $r \leq 1$, το παραπάνω είναι εφικτό <u>μόνο</u> αν $\mathrm{dist}_H(F, K) = 0$, και άρα μόνο αν $F = K$. ■