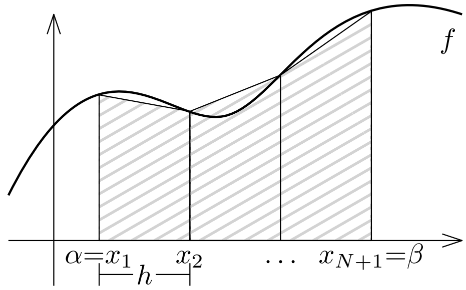
1 Αριθμητική ολοκλήρωση

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να *προσεγγίσουμε* το ολοκλήρωμα της στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τον τύπο

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}, \tag{1}$$

όπου $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ είναι μία ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ με βήμα $h = \frac{\beta-\alpha}{N}$, $x_i = \alpha + ih$, $i = 1, \ldots, N+1$.
Ο τύπος (1) είναι γνωστός και ως **τύπος του τραπεζίου**. Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 1, καθώς $h \to 0$, το παραπάνω άθροισμα θα τείνει στο ζητούμενο ολοκλήρωμα.



Σχήμα 1: Ολοκλήρωση με τον τύπο του τραπεζίου.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν η συνάρτηση f είναι αρκετά ομαλή, το σφάλμα φράσσεται από

$$\frac{\beta - \alpha}{12} h^2 \|f''\|_{\infty},$$

όπου $\|f''\|_{\infty} = \max_{\alpha \le x \le \beta} |f''|$, η μέγιστη τιμή της δεύτερης παραγώγου της f.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της $f(x) = \exp(x)$ για $x \in [0, 1]$.

Μπορούμε να φτιάξουμε μία ομοιόμορφη διαμέριση στο Octave χρησιμοποιώντας την εντολή `xn=linspace(a,b,N+1)`, επίσης το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από

```
s=0;
for i=1:N
  s = s + h*(f(xn(i))+f(xn(i+1)))/2;
end
```

Μπορούμε να δούμε το σφάλμα στο πινακάκι 1 παρακάτω.

N	σφάλμα
5	5.7238e-03
10	1.4317e-03
50	5.7276e-05
100	???

Table 1: Σφάλματα για διάφορα N.

Άσκησεις

i) Μπορεί να βελτιωθεί ο παραπάνω κώδικας;

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{για } x < 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $x \in [-1, 1]$.