Επιχειρηματολογία και Απόδειξη στα Μαθηματικά

Ν. Μεταξάς

Αντιπροσωπευτικά επιχειρήματα και αποδείξεις

- Έστω ν περιττός και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ μια τυχαία αναδιάταξη των αριθμών 1,2,…,ν. Δείξτε ότι το γινόμενο

(α_1 -1)(α_2 -2)… (α_ν -ν) είναι άρτιος.

- 1η απόδειξη (**generic**)

Θεωρούμε την περίπτωση ν=11. Τότε επειδή 6 από τους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{11}$ είναι περιττοί συνεπάγεται ότι ένας τουλάχιστον από αυτούς θα είναι στην ίδια παρένθεση (α_1 -1),(α_2 -2)…, (α_{11} -11) με έναν περιττό, οπότε η παρένθεση και επομένως και το γινόμενο θα είναι άρτιος.

- 2η απόδειξη

(επεξηγηματική: χαρακτηριστική ιδιότητα/ιδέα κλειδί/ενότητα - αναλλοίωτα)

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα : (α_1 -1)+(α_2 -2)+… +(α_ν -ν) είναι ίσο με 0. Εφόσον έχουμε περιττό πλήθος όρων (παρενθέσεις) που έχει άθροισμα άρτιο (το 0), μια τουλάχιστον παρένθεση θα πρέπει να είναι άρτιος.

Συγκρίνετε και σχολιάστε τις 2 αποδείξεις.

(παραδείγματα προβλημάτων μετασχηματίζοντας την χαρακτηριστική ιδιότητα)

1. *Ο Γενναίος Ιππότης συνάντησε τον Τρικέφαλο Δράκο και αποφάσισε να δείξει πόσο γενναίος είναι κόβοντάς του όλα τα κεφάλια. Στην πραγματικότητα απέδειξε την ανικανότητά του: αποδείχθηκε ότι μετά την κοπή ενός κεφαλιού, τρία νέα κεφάλια εμφανίστηκαν στη θέση του κομμένου. Ο ιππότης επέμενε να κόβει κεφάλια και όταν αποφάσισε να σταματήσει μέτρησε 2040 κεφάλια. Μέτρησε σωστά;*
2. *Οι ακέραιοι από το 1 έως το 99 γράφονται στη σειρά. Η Lily διαγράφει δύο από αυτούς τους ακέραιους αριθμούς και γράφει τη διαφορά τους στο τέλος της σειράς. Στη συνέχεια επαναλαμβάνει αυτή τη λειτουργία με τη νέα λίστα ακεραίων μέχρι να πάρει έναν μόνο αριθμό. Ο τελευταίος αριθμός είναι άρτιος ή περιττός;*

Κριτήρια αντιπροσωπευτικών αποδείξεων κατά Rowland

Σύμφωνα με τον Rowland (2002) μια απόδειξη για να είναι αντιπροσωπευτική πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια:

1. η συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να μην είναι ούτε τετριμμένη ούτε πολύπλοκη
2. να είναι διαφανής στο πώς χρησιμοποιείται στο επιχείρημα
3. να διαφωτίζει γιατί ισχύει και σε άλλες περιπτώσεις
4. να είναι κατασκευαστική
5. να διαθέτει τη δυνατότητα για δημιουργία «σκαλωσιάς» (scaffolding) προς ένα τυπικό, γενικεύσιμο επιχείρημα.

Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα

- Η συνάρτηση της απόλυτης τιμής f(x)=|x| συχνά χρησιμοποιείται ως αντιπροσωπευτικό παράδειγμα μιας συνάρτησης που είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη.
- Η αναπαράσταση παίζει σημαντικό ρόλο στη λειτουργία ενός αντιπροσωπευτικού παραδείγματος καθώς μπορεί είτε να βοηθήσει είτε να εμποδίσει την ανάδειξη της δομής ή των γενικών χαρακτηριστικών του αντικειμένου. Για παράδειγμα στην περίπτωση της απόλυτης τιμής μπορεί να μεταφέρει την ουσία της ύπαρξης σημείου συνέχειας που δεν παραγωγίζεται χωρίς τη χρήση συμβολικών αναπαραστάσεων.
- Άλλο παράδειγμα: η κυβική συνάρτηση $f(x) = x^3$ θεωρείται ως κλασικό παράδειγμα περιττής συνάρτησης.
- Ο Michener (1978) τα ονομάζει **μοντέλα-παραδείγματα** γιατί «πιάνουν» τις γενικές ιδιότητες μιας έννοιας.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2013): Generic proving: reflections on scope and method

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

(Leron & Zaslavsky, 2013) Ένας αριθμός που είναι τετράγωνο έχει περιττό πλήθος παραγόντων.

Αντιπροσωπευτική απόδειξη

Θεωρούμε το τέλειο τετράγωνο 36. Θέλουμε να δείξουμε ότι έχει περιττό αριθμό παραγόντων.

Γράφουμε όλες τις παραγοντοποιήσεις του 36 ως γινόμενο δύο παραγόντων: 1x36 , 2x18, 3x12, 4x9,6x6.

Κάθε γινόμενο δίνει 2 διαιρέτες εκτός του 6 που δίνει ένα οπότε το πλήθος είναι περιττό. Εφόσον το τελευταίο γινόμενο, το 6x6, συμβάλλει μόνο με έναν παράγοντα στην καταμέτρηση, λαμβάνουμε, συνολικά, έναν περιττό αριθμό παραγόντων. Συγκεκριμένα, έχουμε 2 x 4 + 1 = 9 παράγοντες.

Παράδειγμα

- Σχόλιο: προφανώς, η γενική απόδειξη δεν είναι πλήρης, αφού το θεώρημα έχει αποδειχθεί μόνο για τον συγκεκριμένο αριθμό 36. Ωστόσο, ο **αριθμός 36 αντιμετωπίστηκε ως αντιπροσωπευτικός** με την έννοια ότι δεν χρησιμοποιήσαμε καμία από τις συγκεκριμένες ιδιότητές του εκτός από το ότι είναι ένα τέλειο τετράγωνο.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Όλες **οι σημαντικές ιδέες της γενικής απόδειξης εμφανίζονται ήδη στην αντιπροσωπευτική απόδειξη**, οπότε οι μαθητές μπορούν εύκολα να αναπαράγουν την απόδειξη για οποιοδήποτε άλλο παράδειγμα. Επομένως χρησιμεύει ως μια εύκολη εισαγωγή στην κύρια απόδειξη
- Το 36 ήταν **αρκετά μικρός** για να είναι διαχειρίσιμος και **αρκετά μεγάλος** ώστε να μην είναι τετριμμένο παράδειγμα (με λίγους παράγοντες).
- **Διδακτική διαχείριση**: ο διδάσκων θα μπορούσε να δημιουργήσει μια συζήτηση με σκοπό την ανάδειξη των στοιχείων που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μια τυπική απόδειξη.

Παράδειγμα

Leron & Zaslavsky: Κάθε μετάθεση γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ξένων κυκλικών μεταθέσεων.

- Καθηγητής: *Ας δούμε ένα παράδειγμα μετάθεσης, έστω η μετάθεση σ και δείτε αν μπορούμε να βρούμε πώς μπορεί να κατασκευαστεί από απλούστερες μεταθέσεις* (όπως οι αριθμοί κατασκευάζονται από τους πρώτους παράγοντες).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Για παράδειγμα, ας ξεκινήσουμε από το 1 και ακολουθούμε τη διαδρομή του εφαρμόζουμε τη μετάθεση σ διαδοχικά, έτσι: 1 ► 6 ►3 ►2 ►1.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Παρατηρώντας την $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, βλέπουμε ότι αρχικά εμφανίζεται ο πρώτος κύκλος : (1 6 3 2)
- Συνεχίζοντας βρίσκουμε τους κύκλους (4) και (5 7), δηλαδή :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$= (1 6 3 2) (4) (5 7)

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Μαθητής 1 : Μπορεί να ήμασταν τυχεροί που το 2 επέστρεψε στο 1 στον πρώτο κύκλο, αλλά τι θα γινόταν αν δεν γινόταν; Κι αν πήγαινε πίσω στο 6 για παράδειγμα; Τότε δεν θα είχαμε κύκλο.
- Καθηγητής : Εάν είχαμε το 2 να πηγαίνει στο 6, και νωρίτερα είχαμε επίσης το 1 στο 6, τότε θα είχαμε και τα δύο: $\sigma(1) = 6$ και $\sigma(2) = 6$. Είναι αυτό δυνατό;
- Μαθητής 2: Όχι, αυτό είναι αδύνατο, επειδή μια μετάθεση είναι μια συνάρτηση ένα προς ένα, επομένως δεν μπορούμε να έχουμε $\sigma(1) = \sigma(2)$.

Παράδειγμα

- Σχόλιο:

Η επιλογή του γενικού παραδείγματος ήταν μια μετάθεση σε 7 γράμματα, έχοντας κύκλους μήκους 1, 2 και 4. Μικρότερη μετάθεση σε 6 θα μπορούσαν να είναι δυνατές, με μήκος κύκλων 1, 2 και 3, αλλά αυτή μας φαινόταν πολύ ιδιαίτερη και πιθανώς παραπλανητική. Έτσι, επιλέξαμε το ευρύτερο παράδειγμα που θα ήταν ακόμα αρκετά περίπλοκο για να αντιπροσωπεύει τη γενική περίπτωση.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει μια λεπτή παγίδα που κρύβεται πίσω από αντιπροσωπευτικές αποδείξεις. **Μερικά φαινόμενα συμβαίνουν αυτόματα στην ειδική περίπτωση, ενώ μπορεί να απαιτούν απόδειξη στη γενική περίπτωση**.. Στο παράδειγμα οι κύκλοι απλώς προέκυψε να γυρνάνε πίσω στο αρχικό γράμμα, και επίσης προέκυψε να είναι μεταξύ του ξένοι. Το γεγονός ότι αυτό διαπιστώνεται άμεσα στο παράδειγμα κρύβει την ανάγκη απόδειξης για τη γενική περίπτωση, το ότι δηλαδή οι κύκλοι που προκύπτουν είναι ξένοι αφού κάθε μετάθεση είναι συνάρτηση 1-1. Επομένως, η κρίσιμη ιδιότητα που έχουν οι μεταθέσεις ως 1-1 αντιστοίχιση χρειάζεται να τονιστεί από τον διδάσκοντα.

Παράδειγμα

Leron & Zaslavsky

Θεώρημα του Lagrange Αν H υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G, τότε η τάξη o(H) της H διαιρεί την τάξη o(G) της ομάδας.

- Η απόδειξη αφορά στην υποομάδα $\{0,3,6,9\}$ της Z_{12} . Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι δημιουργώντας «μετατοπίσεις» του H, λαμβάνουμε μια διαμέριση του G σε ξένα υποσύνολα έχοντας την ίδια πληθικότητα με το H, από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την o(G) σε σχέση με την o(H).
- Θεωρούμε στοιχείο g στην G και το σύμπλοκο του g και του H:

H + g = {h+g: h στο H}

- Έχουμε: H + 0 = H, H + 1 = {1,4,7,10} , H + 2 = {2,5,8,11}, H + 3 = {0,3,6,9}

Παράδειγμα

Τα σύμπλοκα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων με την H (4 στο παράδειγμά μας) και κάθε στοιχείο στο G ανήκει σε ένα και μόνο ένα από τα σύμπλοκα της H. Αφού η G είναι ένωση των ξένων συμπλόκων, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τάξη της G είναι ο αριθμός διακριτών συμπλόκων επί την τάξη της H, δηλαδή:

$$o(Z_{12}) = o(H)\ x\ i_G(H)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισχυρότερο από την αρχική πρόταση.

Τα δυο «λήμματα», ότι όλα τα σύμπλοκα έχουν την ίδια πληθικότητα με την H και ότι τα σύμπλοκα είναι ξένα ανά δυο, είναι τα βασικά στοιχεία που πρέπει να τονιστούν ώστε η απόδειξη να μεταφερθεί στη γενική περίπτωση.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- **Παρόλο που η ομάδα $\mathbb{Z}_{12}$ δεν αντιπροσωπεύει μια τυχαία ομάδα** με την έννοια η $\mathbb{Z}_{12}$ είναι ειδικού τύπου (κυκλική), οι γενικές ιδέες της απόδειξης περιγράφονται ικανοποιητικά μέσα από το ειδικό αυτό παράδειγμα. Αντίθετα, ένα παράδειγμα με μη-κυκλική ομάδα π.χ S_3, S_6 κλπ θα είχε πιο πολύπλοκους υπολογισμούς.

- Υπάρχουν στοιχεία στην απόδειξη που φαίνονται προφανή για την ειδική περίπτωση αλλά για την γενική περίπτωση απαιτείται απόδειξη. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι όλα τα σύμπλοκα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (η τάξη του H) και ότι τα διαφορετικά σύμπλοκα είναι ξένα. Στην πραγματικότητα, όπως στο παράδειγμα των μεταθέσεων, στην απόδειξη αυτών των λημμάτων χρησιμοποιούνται οι ορισμοί της ομάδας και της υποομάδας.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

Γενικά σχόλια

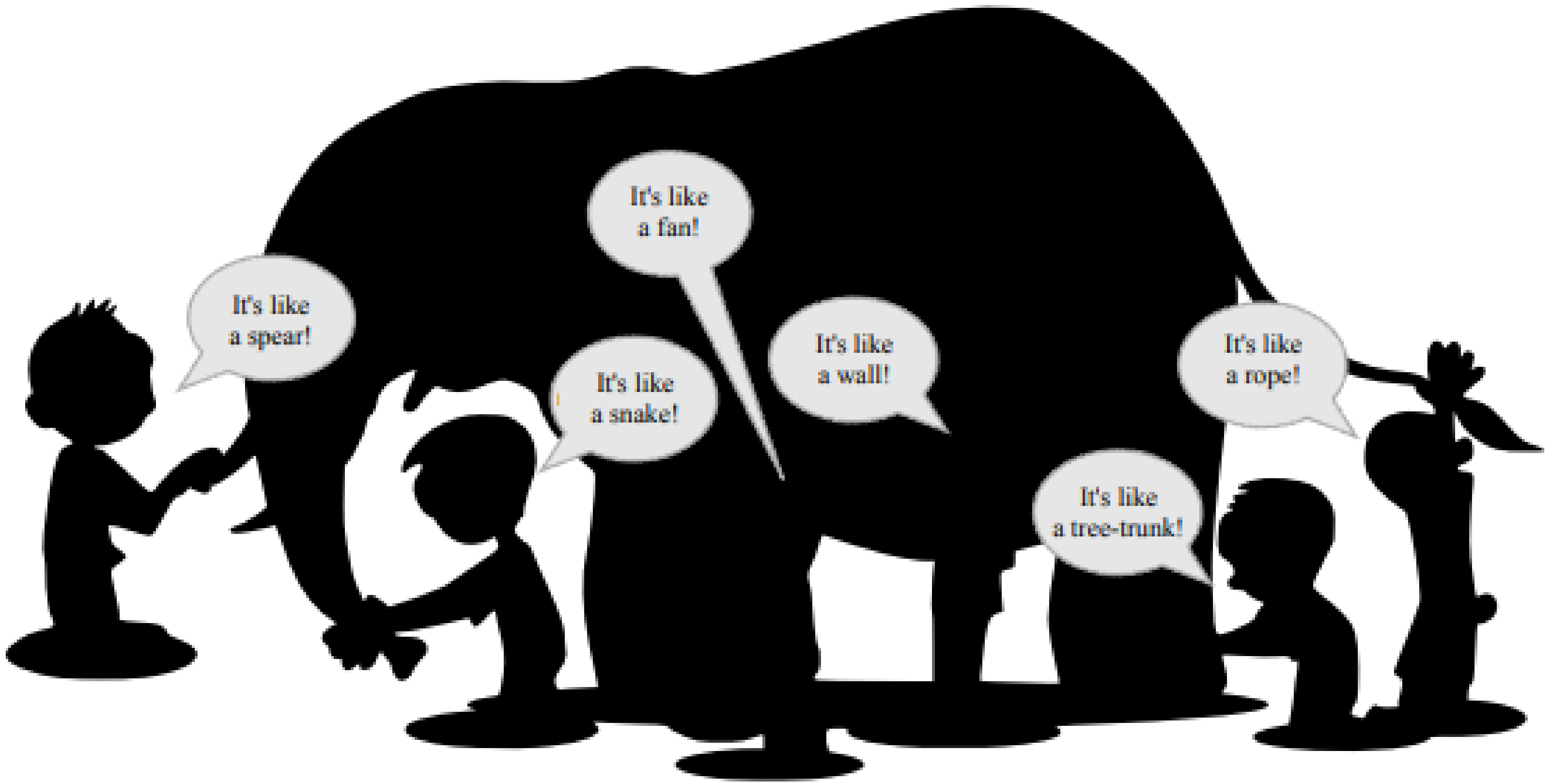
- Ορισμένες φορές για να αναδειχθούν οι ιδέες μιας απόδειξης μέσω μιας αντιπροσωπευτικής απόδειξης, μπορεί να επιλεχθεί ένα παράδειγμα που μπορεί να μοιάζει πιο ειδικό, αλλά ωστόσο η απόδειξη σε αυτήν την περίπτωση είναι διαφανής και δεν είναι πολύπλοκη. Η **πολυπλοκότητα** ενός παραδείγματος που χρησιμοποιείται είναι συχνά **αντιστρόφως ανάλογη της γενικότητας** του. Για αυτό χρειάζεται μια ισορροπί μεταξύ των δυο κατά την επιλογή των παραδειγμάτων.

- Σε μια αντιπροσωπευτική απόδειξη κάποια γεγονότα είναι προφανή ενώ σε μια γενική απόδειξη πρέπει να **προκύπτουν**. Αυτό αποτελεί μια πρόκληση για όποιον διδάσκει με αντιπροσωπευτικές αποδείξεις: ο εκπαιδευτικός πρέπει να παρακινήσει τους μαθητές να **αναλύσουν τα πρόσθετα** μέρη της απόδειξης τα οποία μπορεί να φαίνονται περιττά στο πλαίσιο του παραδείγματος.

Παράδειγμα αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Όταν τα μαθηματικά αντικείμενα που αποτελούν την απόδειξη είναι απλά (αριθμοί, μεταθέσεις, γραφήματα), τότε η ισορροπία κλίνει προς τη γενικότητα του παραδείγματος. Όταν τα αντικείμενα γίνονται πιο περίπλοκα και αφηρημένα (ομάδες, υποομάδες), η ισορροπία κλίνει προς την απλότητα και όχι τη γενικότητα.
- Το κριτήριο της γενικότητας δεν αφορά το ίδιο το παράδειγμα (π.χ η ομάδα $\mathbb{Z}_{12}$ δεν είναι ένα γενικό παράδειγμα ομάδας), αλλά τη διαδικασία απόδειξης που περιγράφεται σε αυτό το παράδειγμα (π.χ η διαμέριση της G με βάση τα σύμπλοκα είναι αρκετά γενική, αν και η ομάδα στην οποία εφαρμόζεται δεν είναι).

Depiction of The Blind Men and the Elephant parable



We have to remember that what we observe is not nature in itself, but nature exposed to our method of questioning.
Werner Heisenberg

Διδακτικά οφέλη της αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Οι αντιπροσωπευτικές αποδείξεις χρησιμεύουν στο να πειστούν οι μαθητές για την αλήθεια ενός ισχυρισμού και επιτρέπουν στους μαθητές να ασχοληθούν με τις **κύριες ιδέες** της πλήρους απόδειξης σε ένα **διαισθητικό και οικείο πλαίσιο**, αναστέλλοντας προσωρινά ζητήματα πλήρους γενικότητας, φορμαλισμού και συμβολισμού. Έτσι μπορούν πώς να πραγματοποιήσουν την απόδειξη σε οποιοδήποτε παράδειγμα, όχι μόνο σε αυτό που αναλύθηκε.
- Επιπλέον μπορούν να ανοίξουν το δρόμο για τη **μετάβαση** από τα εμπειρικά αποδεικτικά σχήματα προς την τυπική απόδειξη και να βοηθήσουν τους μαθητές να χειριστούν τις μεταβλητές και τη δομή της απόδειξης. Διευκολύνει την μετάβαση από τους άτυπους επαγωγικούς συλλογισμούς των μαθητών σε περισσότερο τυπικούς παραγωγικού τύπου συλλογισμούς.

Διδακτικά οφέλη της αντιπροσωπευτικής απόδειξης

- Οι πολύπλοκες αποδείξεις, (όπως στο παράδειγμα με τις μεταθέσεις), μπορεί να αναπαρασταθούν σταδιακά, μέσω διαδοχικών βημάτων πιο πολύπλοκων generic αποδείξεων, καθεμία από τις οποίες επισημαίνει λεπτότερα σημεία της απόδειξης που δεν ήταν εμφανή στα προηγούμενα βήματα. Έτσι, ακόμη και αν μια πλήρης απόδειξη μπορεί να μην είναι προσιτή για έναν μαθητή σχολείου, μπορούν να έχουν μια καλή εικόνα των βασικών ιδεών μέσω ενός generic επιχειρήματος. Ακόμη και για φοιτητές, το να προηγηθεί μια αντιπροσωπευτική απόδειξη μιας πλήρους μπορεί να βοηθήσει στην ανάδειξη των βασικών ιδεών της απόδειξης, απομακρύνοντάς την από τις τεχνικές λεπτομέρειες.