Διάλεξη 6

Ασκήσεις 4, 5, 6, 7 (Evans 1, 2, 3, 5, 6, σσ 305–306)

Άσκηση 8 (Ως προς τις προσεγγίσεις $\eta_\varepsilon * u$ σε φραγμένα χωρία U)

Θα υποθέσουμε ότι ισχύει το Θεώρημα (D.13) του Folland:

Θεώρημα

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, τότε ισχύει

$$\| \eta_\varepsilon * f - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0 \quad \text{όπως} \quad \varepsilon \to 0.$$

Έστω U ανοικτό, $\mathcal{L}^n(U) < \infty$, και έστω $u \in L^p(U)$

Ορίζουμε

$$u^\varepsilon(x) := \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

Δείξτε ότι

(i) $u^\varepsilon \in C^\infty(U)$

(ii) $\| u^\varepsilon - u \|_{L^p(U)} \longrightarrow 0$, όπως το $\varepsilon \to 0$

(iii) Εξετάστε κατά πόσον για $u \in W^{k,p}(U)$ ισχύουν τα ακόλουθα (βλ. σ. 27 Σημειώσεις):

$$D_x^\alpha u^\varepsilon = \int_U D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_U D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= (-1)^{2|\alpha|} \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy$$

$$= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(U)} D^\alpha u, \quad |\alpha| \le k.$$

$\square$

ανοικτό

Επιλέγουμε και ένα $V_0 \subset\subset U$ έτσι ώστε

$$U \subset \bigcup_{i=0}^{N} V_i$$

και θεωρούμε μια ομαλή διαμέριση της μονάδος ως προς την οικογένεια

$$\left\{ V_0, B^0\left(x_1^0, \frac{r_1}{2}\right), \ldots, B^0\left(x_N^0, \frac{r_N}{2}\right) \right\}$$

και ορίζουμε

$$v = \sum_{i=0}^{N} \zeta_i v_i^{\varepsilon}$$

Από το Θ1 $\exists\, v_0 \in C^\infty(\overline{V}_0)$

$$\|v_0 - u\| \leq \delta$$

$\therefore$

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\| \leq \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\zeta_i v_i^{\varepsilon}) - D^\alpha u\|_{L^p(V_i)}$$

$$\leq C(N+1)\delta.$$

$\blacksquare$

3. • $v^\varepsilon \to u$ στο $W^{k,p}(V)$

(Απ: $\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}$

$|\alpha| \le k$

π.χ. $\|u_\varepsilon - u\|^p_{L^p(V)} = \int_V |u(x+10\varepsilon e_n) - u(x)|^p dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

(Lebesgue, κυριαρχημένης σύγκ.)

$\|v^\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^p(V)} =$

$v^\varepsilon - u_\varepsilon = [\eta_\varepsilon * u_\varepsilon] - [(u_\varepsilon - u) + u]$

$= [\eta_\varepsilon * (u_\varepsilon - u) + \eta_\varepsilon * u] - \{(u_\varepsilon - u)\} - u$

$= \underbrace{\eta_\varepsilon * (u_\varepsilon - u)} + (\eta_\varepsilon * u - u) - \underbrace{(u_\varepsilon - u)}$.

Αντίστοιχο επιχείρημα με $D^\alpha v^\varepsilon$ - το επιτρέπει

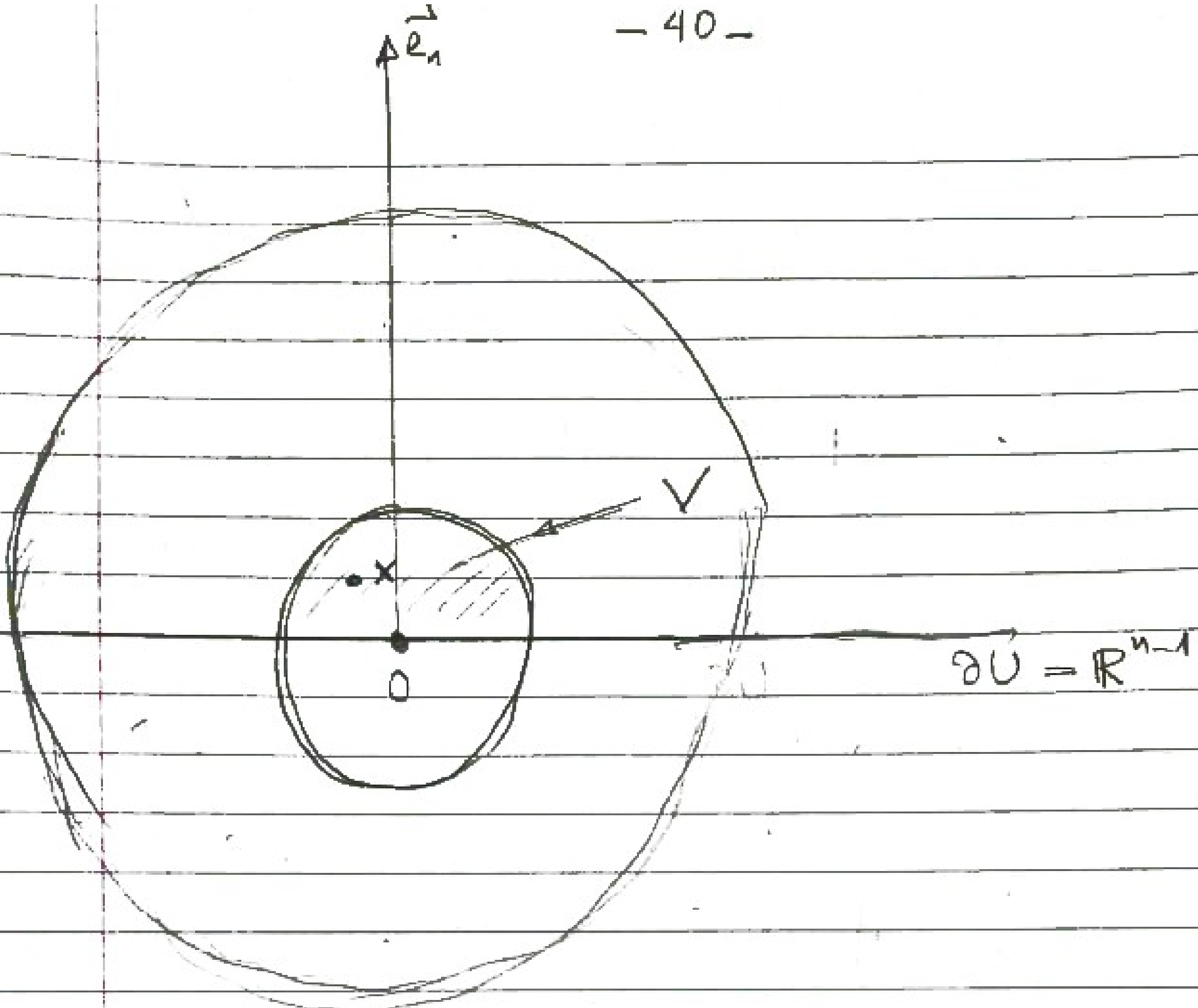
το $D^\alpha v_\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u_\varepsilon$ - ο φορέας συμπαγής

(να το ελέγξετε!)

4. Επιλέγουμε $\delta > 0$.
Τέλος θα αξιοποιήσουμε ότι το ∂U είναι συμπαγές και μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένο αριθμό μπαλών : $\partial U \subset \bigcup_{i=1}^{N} B^0(x_i^0, \frac{r_i}{2})$,

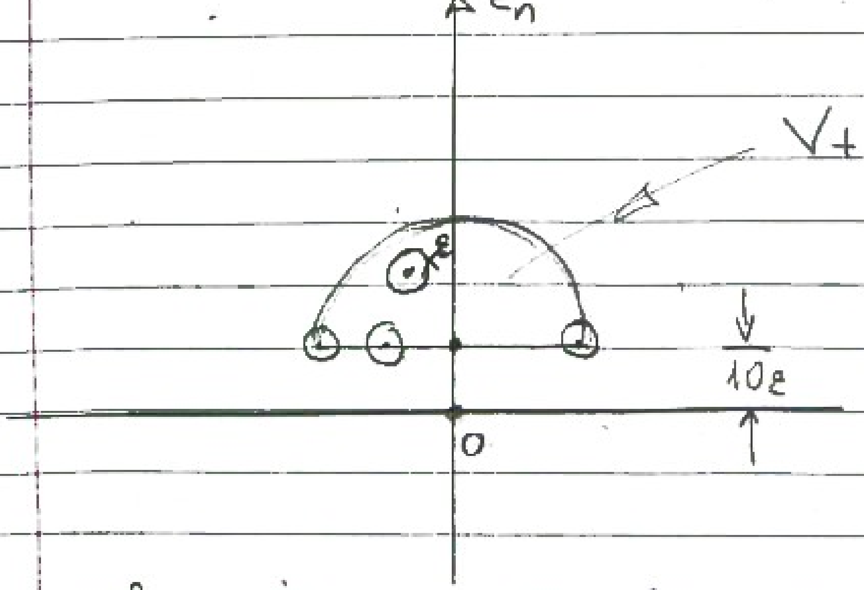
$V_i = U \cap B^0(x_i^0, \frac{r_i}{2})$, $v_i^\varepsilon \in C^\infty(\overline{V_i})$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$

$\|D^\alpha v_i^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V_i)} \le \delta$, $i = 1, \dots, N$



$x^0 = 0$, $r = 1$, $\partial U \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$\lambda = 10$, $x^\varepsilon = x + 10\varepsilon e_n$



$V + 10\varepsilon \vec{e}_n$

$B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset B(0,1)$

supp $\eta_\varepsilon \subset B(0;\varepsilon)$

$u_\varepsilon(x) := u(x + 10\varepsilon e_n)$
$x \in V$

$v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$, supp $v^\varepsilon \subset\subset U$

$v^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon((x+10\varepsilon e_n)-z)\, u(z)\, dz$, $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$

<u>Θεώρημα</u> (Προσέγγιση μέχρι το σύνορο)

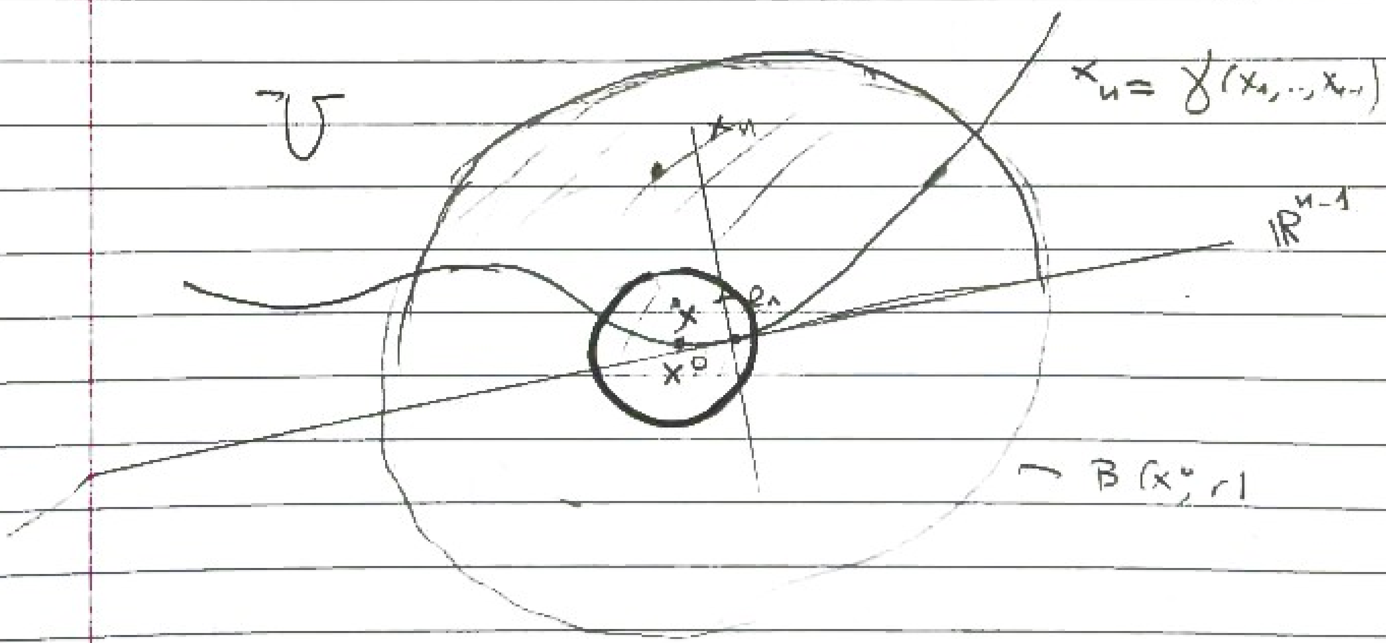
$U \subset \mathbb{R}^n$, φραγμένο, $\partial U \in C^1$. Έστω $u \in W^{k,p}(U)$, για κάποιο $p \in [1,\infty)$. Τότε $\exists\ u_m \in C^\infty(\bar{U})$ τ.ω.

$$u_m \xrightarrow{W^{k,p}(U)} u$$

<u>Απόδειξη</u>

1. Έστω $x^0 \in \partial U$. Εξ' υποθέσεως τοπικά περί το x^0 το ∂U είναι γράφημα $x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$, και

$$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) \mid x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$



$V := U \cap B(x^0, r/2)$

2. $x^\varepsilon := x + \lambda\varepsilon \vec{e_n}$, $(x \in V,\ \varepsilon > 0)$

$u_\varepsilon(x) := u(x + \lambda\varepsilon \vec{e_n})$